ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2008. Том 15, № 4. 30–43

УДК 519.8

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ВЫБОРА ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ КООРДИНАТАМИ С МАКСИМАЛЬНОЙ НОРМОЙ СУММЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*)

Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков, И. А. Рыков

Аннотация. Рассматриваются две задачи выбора из множества векторов, состоящего из n векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$, подмножества векторов мощности m с максимальной нормой суммы. Предполагается, что координаты векторов целочисленны. С использованием техники динамического программирования построены новые точные алгоритмы решения этих задач, псевдополиномиальные при фиксированной размерности пространства. Новые алгоритмы (по сравнению с ранее известными) обладают определённым преимуществом: задача выбора решается быстрее при $m < (k/2)^k$, а с учётом дополнительного ограничения на порядок векторов время решения уменьшается в k^{k-1} раз независимо от m.

Ключевые слова: выбор подмножества, евклидова метрика, временная сложность, псевдополиномиальный алгоритм, динамическое программирование.

Введение

В статьях [1, 2] были рассмотрены две дискретные оптимизационные задачи — ПОДМНОЖЕСТВО ВЕКТОРОВ (далее ПВ) и ПОДМНОЖЕСТВО ВЕКТОРОВ С ОГРАНИЧЕНИЕМ (далее ПВО), связанные с выбором из множества векторов, состоящего из n векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^k$, подмножества из m векторов с максимальной нормой суммы (под нормой будем понимать евклидову норму в k-мерном пространстве $\mathbb{R}^k$, т. е. $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$).

Задача ПВ. *Заданы конечное семейство векторов $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ в еклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ и натуральное число $m < n$. Требуется*

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08–01–00516 и 07–07–00222).

найти подсемейство $\widetilde{V}$ векторов из V мощности m, обладающее максимальной нормой суммы.

Задача ПВО. *Заданы последовательность векторов $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ и натуральные числа m и l, удовлетворяющие условию $lm < n$. Требуется выделить в V подпоследовательность $\widetilde{V} = \{\vec{v}_{a_1}, \vec{v}_{a_2}, \ldots, \vec{v}_{a_m}\}$ векторов, норма суммы которых максимальна при соблюдении ограничений на номера соседних векторов в выделенной подпоследовательности:*

$$a_{i+1} - a_i \geqslant l \quad \text{для всякого} \quad i = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Эти задачи возникают при поиске в зашумлённой числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов. Они типичны для таких приложений, как электронная разведка, радиолокация, телекоммуникация, геофизика, обработка речевых сигналов, медицинская и техническая диагностика и др. [4, 5].

В общем случае эти задачи NP-трудны [1], что стимулирует выделение таких подклассов этих задач, для которых оказывается возможным построение точных, либо приближённых алгоритмов полиномиальной или псевдополиномиальной временно́й сложности.

В [1] для каждой из задач ПВ и ПВО разработан алгоритм, решающий задачу приближённо с произвольной наперёд заданной гарантированной относительной погрешностью $\varepsilon > 0$ за время

$$O\left(\frac{nk^{(k+3)/2}}{\varepsilon^{(k-1)/2}}\right).$$

При фиксированной размерности k пространства $\mathbb{R}^k$ путём выбора ε это позволило получить вполне полиномиальную аппроксимационную схему (FPTAS), полиномиальные асимптотически точные алгоритмы соответствующей сложности, а также, в случае целочисленности координат всех векторов, псевдополиномиальные точные алгоритмы сложности $O(nk^{k+1}(mb)^{k-1})$, где b — максимальная абсолютная величина координат векторов $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. В [2] для задачи ПВ без ограничения на мощность выбираемого подмножества векторов получен точный алгоритм сложности $O(k^2 n^k)$, полиномиальный в случае фиксированного k.

В разд. 1 приведены известные факты о сложности и алгоритмах решения задач ПВ и ПВО. В разд. 2 и 3 для задач ПВ и ПВО с целочисленными координатами векторов, в продолжение работы [3], представлено построение точных алгоритмов с использованием техники ди-

намического программирования (ДП). Для них установлены оценки временно́й сложности $O(nkm(mb)^{k-1})$ в случае неотрицательных координат и $O(nkm(2mb)^{k-1})$ в случае координат произвольного знака, где скрытые в обозначениях константы не зависят от k.

1. Известные факты о сложности и алгоритмах решения задач ПВ и ПВО

Напомним некоторые результаты, полученные для этих задач в [1].

Теорема 1 [1]. *Задачи* ПВ *и* ПВО NP-*трудны.*

Заметим, что утверждение теоремы 1 верно при условии, что размерность пространства k является входным параметром.

Теорема 2 [1]. *Задача* ПВ *решается с гарантированной относительной погрешностью, не превышающей величины* $(k-1)/(8L^2)$, *за время*

$$O(nk^2(2L+1)^{k-1}),$$

где L *— параметр алгоритма.*

Теорема 2′ [1]. *Задача* ПВО *решается с гарантированной относительной погрешностью, не превышающей* $(k-1)/(8L^2)$, *за время*

$$O(nk(k+m)(2L+1)^{k-1}).$$

Теоремы 2, 2′ устанавливают для задач ПВ и ПВО построение вполне полиномиальной аппроксимационной схемы (FPTAS) для случая фиксированной размерности k пространства $\mathbb{R}^k$. Действительно, положим относительную погрешность равной $\varepsilon = (k-1)/(8L^2)$. Тогда

$$L = \sqrt{(k-1)/(8\varepsilon)}$$

и для времени решения, например, задачи ПВ получим оценку

$$O\left(nk^2\left(\frac{k-1}{\varepsilon}\right)^{\frac{k-1}{2}}\right),$$

полиномиальную относительно n и $1/\varepsilon$.

Из теоремы 2 следуют приведённые ниже теоремы 3 и 4.

Теорема 3 [1]. *При фиксированной размерности* k *пространства* $\mathbb{R}^k$ *задача* ПВ *решается асимптотически точно при выборе параметра*

$L = L(n)$, где $L(n)$ — произвольная неограниченно растущая функция от n.

Теорема 4 [1]. *Задача* ПВ *с целочисленными координатами входных векторов решается точно алгоритмом с параметром $L = 0,5kmb$ за время*

$$O(nk^2(kmb)^{k-1}),$$

где b — максимальная по абсолютной величине координата векторов из V.

Следствие 1. *Если размерность k пространства $\mathbb{R}^k$ фиксирована, то задача* ПВ *с целочисленными координатами входных векторов решается точно алгоритмом с параметром $L = 0,5kmb$ за псевдополиномиальное время*

$$O(n(mb)^{k-1}).$$

В последующих разделах для точного решения задач ПВ и ПВО в предположении целочисленности всех координат векторов предложены алгоритмы с использование техники ДП.

2. Алгоритм решения задачи ПВ

2.1. Задача ПВ в терминах целочисленного программирования. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор с булевыми переменными $x_j \in \{0,1\}$, $j = \overline{1,n}$. Запишем задачу ПВ в терминах целочисленного (булева) программирования:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j \right)^2 \to \max; \;\; \sum_{j=1}^{n} x_j = m; \;\; x_j \in \{0,1\}, \; j = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Здесь переменная x_j принимает значение, равное 1, если соответствующий вектор входит в выбранное множество $\widetilde{V}$; ограничение определяет, что выбрано ровно m векторов, а целевая функция представляет квадрат еклидовой нормы вектора-суммы.

Пусть $\vec{B} \in Z_+^{k-1}$ — вектор с компонентами

$$B_i = \sum_{r=1}^{m} v_{i,\sigma_r(i)}, \quad 1 \leqslant i < k,$$

где $\sigma(i)$ — перестановка, упорядочивающая элементы $(v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in})$ i-й строки матрицы (v_{ij}) по невозрастанию, т. е. B_i — сумма m максимальных значений i-й строки. Аналогично, обозначим через $\vec{L} \in Z_+^{k-1}$ вектор

с компонентами

$$L_i = \sum_{r=1}^{m} v_{i,\sigma_r(n+1-i)}, \quad 1 \leqslant i < k,$$

т. е. L_i — сумма m минимальных значений i-й строки.

Положим $\mathcal{B} = \bigl\{\vec{\beta} \in Z_+^{k-1} \mid L_i \leqslant \beta_i \leqslant B_i,\ 1 \leqslant i < k\bigr\}$.

Для элементов последней k-й строки матрицы (v_{kj}) введём обозначение $c_j = v_{kj}$.

Следующая теорема позволяет представить задачу ПВ в виде задачи двухуровнего программирования.

Теорема 5. *Пусть $x^*(\vec{\beta})$ и $\hat{f}_{mn}(\vec{\beta})$ — оптимальное решение и значение оптимума следующей задачи*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right| \to \max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j = \beta_i,\ 1 \leqslant i < k;\ \sum_{j=1}^{n} x_j = m;\ \ x_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Обозначим через $\vec{\beta}^*$ оптимальное решение задачи

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^2 + \hat{f}_{mn}^2(\vec{\beta}) \to \max_{\vec{\beta}\,\in\,\mathcal{B}}. \tag{3}$$

Тогда $x^*(\vec{\beta}^*)$ — оптимальное решение задачи ПВ *с неотрицательными целочисленными координатами векторов.*

Доказательство. Заметим, что для i-й координаты любого k-мерного вектора $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, представляющего сумму $\sum\limits_{r=1}^{m} \vec{v}_{a_r}$ каких-либо m векторов из множества $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$, при всех $i < k$ выполнено неравенство $L_i \leqslant s_i \leqslant B_i$, откуда заключаем, что вектор $(s_1, \ldots, s_{k-1})$ лежит в $\mathcal{B}$.

Отсюда следует, что задачу ПВ в форме (1) можно записать в эквивалентном виде:

$$g(\vec{\beta}, x) = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)^2 \to \max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j = \beta_i,\ 1 \leqslant i < k;\ \sum_{j=1}^{n} x_j = m;\ \vec{\beta} \in \mathcal{B};\ x_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Действительно, в силу указанного свойства дополнительные ограничения на компоненты вектора-суммы всегда выполнены для некоторого $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$, т. е. для каждого допустимого решения x задачи (1) найдётся допустимое решение $(\vec{\beta}, x)$ задачи (4).

Очевидно, что пара $(\vec{\beta}^*, x^*(\vec{\beta}^*))$ оптимальных решений задач (3) и (2) является допустимым решением задачи (4). Докажем оптимальность этого решения.

Пусть $(\vec{\beta}^0, x^0)$ — произвольное допустимое решение задачи (4). Тогда x^0 является допустимым решением задачи (2) с параметром $\vec{\beta}^0$. Отсюда следует, что для оптимального решения $x^*(\vec{\beta}^0)$ этой задачи выполняется

$$\left|\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*\right| = \hat{f}_{mn}(\vec{\beta}^0) \geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0\right|,$$

и поскольку $b \geqslant a \geqslant 0 \Rightarrow b^2 \geqslant a^2$, получаем

$$g(\vec{\beta}^0, x^*(\vec{\beta}^0)) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\beta_i^0\right)^2 + \hat{f}_{mn}^2(\vec{\beta}^0) \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} \left(\beta_i^0\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0\right)^2 = g(\vec{\beta}^0, x^0).$$

С другой стороны, так как $\vec{\beta}^0$ — допустимое решение задачи (3), а $\vec{\beta}^*$ — оптимальное решение этой задачи, то выполняется неравенство

$$g(\vec{\beta}^*, x^*(\vec{\beta}^*)) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\beta_i^*\right)^2 + \hat{f}_{mn}^2(\vec{\beta}^*) \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} \left(\beta_i^0\right)^2 + \hat{f}_{mn}^2(\vec{\beta}^0) = g(\vec{\beta}^0, x^*(\vec{\beta}^0)).$$

Таким образом, для любого допустимого решения $(\vec{\beta}^0, x^0)$ задачи (4) выполнено

$$g(\vec{\beta}^*, x^*(\vec{\beta}^*)) \geqslant g(\vec{\beta}^0, x^0),$$

т. е. $(\vec{\beta}^*, x^*(\vec{\beta}^*))$ — оптимальное решение задачи (4), а значит, $x^*(\vec{\beta}^*)$ — оптимальное решение задачи (1). Теорема 5 доказана.

В результате данной декомпозиции мы получаем возможность решения задачи (1) с помощью решения задачи (2) для каждого $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$.

Заметим, что для нахождения оптимального решения задачи (2) достаточно решить две следующие задачи максимизации с линейными целевыми функциями:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \\ \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j = \beta_i,\ 1 \leqslant i < k;\ \ \sum_{j=1}^{n} x_j = m;\ \ x_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,n};\end{gathered} \tag{5}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j \to \max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_j = \beta_i,\ 1 \leqslant i < k;\ \ \sum_{j=1}^{n} x_j = m;\ \ x_j \in \{0,1\},\ j=\overline{1,n} \tag{6}$$

и сравнить значения их оптимумов.

Опишем алгоритм A решения задачи (5), оптимум которой обозначим через $f_{mn}(\vec{\beta})$, для всех $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$. Заметим, что задача (6) решается этим же алгоритмом: достаточно заменить c_j на $-c_j$.

2.2. Алгоритм A вычисления оптимумов $\big\{f_{mn}(\vec{\beta}) \bigm| \vec{\beta} \in \mathcal{B}\big\}$. Обозначим задачу (5) отыскания оптимума $f_{mn}(\vec{\beta})$ через $\langle m,n;\ \vec{\beta}\rangle$ и погрузим её в семейство задач $\{\langle \mu, j;\ \vec{\beta}\rangle \mid\ 0 \leqslant \mu \leqslant j \leqslant n;\ 0 \leqslant \vec{\beta} \leqslant \vec{B}\}$ выбора μ векторов среди $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j$; соответствующие оптимумы обозначим через $f_{\mu,j}(\vec{\beta})$.

Будем обозначать $f_{\mu,j}(\vec{\beta}) = -\infty$, (в том числе для $\vec{\beta} \notin \mathcal{B}$), если допустимое множество соответствующей задачи пусто. Операции сложения и взятия максимума расширим естественным образом:

$$a + (-\infty) = -\infty,\ \ \max\{a, -\infty\} = a,\ \ \max\{-\infty,-\infty\} = -\infty.$$

Обозначим $(k-1)$-мерный вектор $(v_{1j}, \ldots, v_{k-1,\,j})$ через $\vec{v}_j,\ j=\overline{1,n}.$

Лемма 1. *Для всякого вектора $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ верны следующие рекуррентные соотношения:*

$$f_{0,j}(\vec{\beta}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{\beta} = \vec{0}, \\ -\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{для любого } j=\overline{1,n}; \tag{7}$$

$$f_{\mu,\mu}(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{\mu} c_r, & \text{если } \vec{\beta} = \sum\limits_{r=1}^{\mu} \vec{v}_r, \\ -\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{для любого } \mu=\overline{1,m}; \tag{8}$$

$$f_{\mu,j}(\vec{\beta}) = \max\{c_j + f_{\mu-1,j-1}(\vec{\beta} - \vec{v}_j);\ f_{\mu,j-1}(\vec{\beta})\} \tag{9}$$

для любых $\mu = \overline{1,m},\ j=\overline{\mu+1,n}.$

Доказательство. Формулы (7), (8), представляющие начальный шаг, вполне очевидны. Действительно, если $\mu = 0$, то все x_j равны 0 и множество допустимых решений непусто лишь для вектора $\vec{\beta} = 0$. В случае, когда $\mu = j$, т. е. когда необходимо выбрать все векторы, допустимое решение вновь существует для единственного $\vec{\beta}$, при этом оптимум также определяется однозначно.

Покажем, что верна основная формула (9). Действительно, оптимальный набор векторов задачи $\langle \mu, j;\ \vec{\beta} \rangle$ может содержать или не содержать вектор $\vec{v}_j$. Если этот вектор входит в оптимальное решение, то он даёт фиксированный вклад c_j в целевую функцию. В силу её линейности оптимум достигается на оптимальном решении задачи выбора оставшихся $\mu-1$ векторов из набора $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{j-1})$, причём сумма этих $\mu-1$ векторов должна равняться $\vec{\beta} - \vec{v}_j$, чтобы сумма всех μ векторов составила бы $\vec{\beta}$. Таким образом, оптимум среди решений задачи $\langle \mu, j;\ \vec{\beta} \rangle$, содержащих вектор $\vec{v}_j$, определяется первым аргументом в правой части. Оптимум среди решений, не содержащих этот вектор, совпадает с оптимумом задачи $\langle \mu, j-1;\ \vec{\beta} \rangle$ и равен $f_{\mu,j-1}(\vec{\beta})$. Максимум из этих величин определяет оптимум задачи $\langle \mu, j;\ \vec{\beta} \rangle$. Лемма 1 доказана.

2.3. Описание алгоритма A**.** Помимо вычисления оптимумов $f_{\mu,j}$ $(\vec{\beta})$ нам потребуется также вычислять множества векторов $\widetilde{V}_{\mu,j}(\vec{\beta})$, входящих в соответствующие оптимальные решения. Алгоритм состоит из начального и общего шагов. На начальном шаге находятся решения «краевых» задач — при $\mu = 0$ и $\mu = j$. На общем шаге находятся решения для произвольных $\mu \leqslant m$ и $j = \mu + 1, \ldots, n$.

Начальный шаг:

Для $j = \overline{1, n}$ $\Big\{$

Для каждого $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ $\Big\{$

  Если $\vec{\beta} = 0$, то $f_{0,j}(\vec{\beta}) := 0$, иначе $f_{0,j}(\vec{\beta}) := -\infty$;

  $\widetilde{V}_{0,j}(\vec{\beta}) := \varnothing$;

$\Big\}$

$\Big\}$

Для $\mu = \overline{1, m}$ $\Big\{$

Для каждого $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ $\Big\{$

  Если $\vec{\beta} = \sum\limits_{r=1}^{\mu} \vec{v_r}$, то $\Big\{ f_{\mu,\mu}(\vec{\beta}) := \sum\limits_{r=1}^{\mu} c_r;\ \widetilde{V}_{\mu,\mu}(\vec{\beta}) := \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\mu\} \Big\}$,

  иначе $\Big\{ f_{\mu,\mu}(\vec{\beta}) := -\infty;\ \widetilde{V}_{\mu,\mu}(\vec{\beta}) := \varnothing \Big\}$

$\Big\}$

$\Big\}$

Общий шаг:

Для $\mu = \overline{1, m}$ $\Big\{$

Для $j = \overline{\mu+1, n}$ $\Big\{$

Для каждого $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ $\Big\{$

Если $\vec{\beta} - \vec{v_j} \in \mathcal{B}$ и $c_j + f_{\mu-1,j-1}(\vec{\beta} - \vec{v_j}) > f_{\mu,j-1}(\vec{\beta})$, то

$$\Big\{ f_{\mu,j}(\vec{\beta}) := c_j + f_{\mu-1,j-1}(\vec{\beta} - \vec{v_j});\ \widetilde{V}_{\mu,j}(\vec{\beta}) := \widetilde{V}_{\mu-1,j-1}(\vec{\beta} - \vec{v_j}) \cup \{\vec{v_j}\} \Big\},$$

иначе $\Big\{ f_{\mu,j}(\vec{\beta}) := f_{\mu,j-1}(\vec{\beta});\ \widetilde{V}_{\mu,j}(\vec{\beta}) := \widetilde{V}_{\mu,j-1}(\vec{\beta}) \Big\}$

$\Big\}$

$\Big\}$

$\Big\}$

Из описания алгоритма A следует, что вычисления производятся в согласованном порядке, т. е. в момент вычисления выражений в условных операторах и операторах присваивания все величины уже проинициализированы. Так, например, при вычислении значения $f_{\mu,j}(\vec{\beta})$ для $0 < \mu < j$ используется значение $f_{\mu-1,j-1}(\vec{\beta} - \vec{v_j})$, которое уже вычислено на предыдущей итерации цикла по μ.

2.4. Описание алгоритма $\widetilde{A}$. Опишем теперь алгоритм $\widetilde{A}$ решения задачи ПВ в форме (1) с целочисленными координатами. Он состоит в нахождении решения задачи (2) при каждом $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ (с помощью решения задач (5) и (6) посредством алгоритма A), после чего находим решение задачи (3) полным перебором по всем $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$.

Для каждого $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ $\Big\{$

С помощью алгоритма А найти решение $\widetilde{V}^{(1)}_{m,n}(\vec{\beta})$ и оптимум $f^{(1)}_{m,n}(\vec{\beta})$ задачи (5).

С помощью алгоритма А найти решение $\widetilde{V}^{(2)}_{m,n}(\vec{\beta})$ и оптимум $f^{(2)}_{m,n}(\vec{\beta})$ задачи (6).

Если $f^{(1)}_{m,n}(\vec{\beta}) > f^{(2)}_{m,n}(\vec{\beta})$, то $\Big\{ \hat{f}_{m,n}(\vec{\beta}) := f^{(1)}_{m,n};\ \widetilde{V}_{m,n}(\vec{\beta}) := \widetilde{V}^{(1)}_{m,n}(\vec{\beta}) \Big\}$,
иначе $\Big\{ \hat{f}_{m,n}(\vec{\beta}) := f^{(2)}_{m,n};\ \widetilde{V}_{m,n}(\vec{\beta}) =: \widetilde{V}^{(2)}_{m,n}(\vec{\beta}) \Big\}$

$\Big\}$

$\hat{f}_{m,n}(\vec{\beta})$ и $\widetilde{V}_{m,n}(\vec{\beta})$ — оптимальные значение и решение задачи (2).

$f^* := -\infty;\ \widetilde{V} := \varnothing.$
Для каждого $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ $\Big\{$

Если $\hat{f}_{mn}(\vec{\beta}) > -\infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \beta_i^2 + \hat{f}^2_{mn}(\vec{\beta}) > f^*$, то $\Big\{ f^* := \sum\limits_{i=1}^{k-1} \beta_i^2 + \hat{f}^2_{mn}(\vec{\beta});\ \widetilde{V} :=$

$\widetilde{V}_{m,n}(\vec{\beta})\Big\}$

$\Big\}$

$\widetilde{V}$ — оптимальное решение задачи ПВ.

Теорема 6. *Задача* ПВ *с целочисленными координатами векторов решается точно за время*

$$O\left(kmn\prod_{i=1}^{k-1}(B_i - L_i)\right),$$

где скрытая в обозначениях константа не зависит от k.

Доказательство. Из теоремы 5 и леммы 1 следует, что алгоритм $\widetilde{A}$ даёт точное решение задачи ПВ. Несложно оценить трудоёмкость этого алгоритма, которая определяется трудоёмкостью алгоритма A и трудоёмкостью заключительного этапа.

Оценим трудоёмкость алгоритма A. Поскольку

$$|\mathcal{B}| = \prod_{i=1}^{k-1}(B_i - L_i),$$

трудоёмкость начального шага равна

$$O\left((knk + km^2)\prod_{i=1}^{k-1}(B_i - L_i)\right),$$

так как внутри первого двойного цикла выполняется операция сравнения векторов размерности $k-1$, а внутри второго двойного цикла выполняется операция суммирования μ векторов размерности $k-1$.

Для выполнения операций внутри тройного цикла общего шага требуется время, равное $O(k)$, поскольку вычисляется разность двух $(k-1)$-мерных векторов. Таким образом, трудоёмкость общего шага равна

$$O\left(kmn\prod_{i=1}^{k-1}(B_i - L_i)\right),$$

причём константа, скрытая в записи $O(\cdot)$, не зависит от k.

Трудоёмкость последнего этапа равна

$$O\left(km\prod_{i=1}^{k-1}(B_i - L_i)\right).$$

Таким образом, общая трудоёмкость $\widetilde{A}$ определяется трудоёмкостью общего шага и равна

$$O\left(kmn\prod_{i=1}^{k-1}(B_i - L_i)\right).$$

Теорема 6 доказана.

Отметим, что ввиду $B_i \leqslant mb$, $L_i \geqslant -mb$, где, как и прежде, $b = \max\limits_{i\leqslant k, j\leqslant n} |v_{ij}|$, имеем

$$\prod_{i=1}^{k-1}(B_i - L_i) \leqslant (2mb)^{k-1}.$$

Для случая неотрицательных координат можем оценить $L_i \geqslant 0$ и

$$\prod_{i=1}^{k-1}(B_i - L_i) \leqslant (mb)^{k-1}.$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Задача* ПВ *с целочисленными координатами векторов решается точно за время* $O(kmn(mb)^{k-1})$ *в случае неотрицательных координат и* $O(kmn(2mb)^{k-1})$ *в случае координат произвольного знака, где скрытые в обозначениях константы не зависят от* k.

Следствие 2. *Если размерность* k *пространства* $\mathbb{R}^k$ *фиксирована, то задача* ПВ *с целочисленными координатами векторов решается точно за псевдополиномиальное время* $O(nm^k b^{k-1})$.

3. Алгоритм решения задачи ПВО

3.1. Задача ПВО в терминах целочисленного программирования. Запишем задачу ПВО с использованием булевых переменных $x_j \in \{0,1\}$, $j = \overline{1,n}$:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_j\right)^2 \to \max; \ \sum_{j=1}^{n} x_j = m; \\ x_i + x_j \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ |i-j| < l;\ \ x_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{10}$$

Дополнительное ограничение определяет запрет на включение в решение векторов с близкими индексами. Задача в таком виде может быть декомпозирована аналогично задаче ПВ.

Как и ранее, определим $B_i(L_i)$, $1 \leqslant i < k$, как сумму m максимальных (минимальных) элементов i-й строки матрицы (v_{ij}); $\mathcal{B} = \bigl\{\vec{\beta} \in Z_+^{k-1} \mid L_i \leqslant \beta_i \leqslant B_i,\ 1 \leqslant i < k\bigr\}$; $c_j = v_{kj}$.

Теорема 8. *Пусть $x^*(\vec{\beta})$ и $\hat{f}_{mn}(\vec{\beta})$ — оптимальное решение и значение оптимума задачи*

$$\begin{gathered}\left|\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right| \to \max;\ \ \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j = \beta_i,\ 1 \leqslant i < k;\\ \sum_{j=1}^{n} x_j = m;\ \ x_i + x_j \leqslant 1,\\ 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ |i-j| < l;\ \ x_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $\vec{\beta}^*$ — оптимальное решение задачи

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^2 + \hat{f}_{mn}^2(\vec{\beta}) \to \max_{\vec{\beta} \in\, \mathcal{B}}. \tag{12}$$

Тогда $x^*(\vec{\beta}^*)$ — оптимальное решение задачи ПВО *с целочисленными координатами векторов.*

3.2. Алгоритм решения задачи ПВО. Аналогичным описанному в предыдущем подразделе способом алгоритм решения задачи (11) опирается на алгоритм решения следующей задачи с линейной целевой функцией:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;\ \ \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j = \beta_i,\ 1 \leqslant i < k;\ \ \sum_{j=1}^{n} x_j = m;\\ x_i + x_j \leqslant 1,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ |i-j| < l;\ x_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,n}.\end{gathered} \tag{13}$$

Покажем, что данную задачу также можно решать методом ДП.

Далее через $\vec{v}_j$ обозначим $(k-1)$-мерный вектор $(v_{1j}, \ldots, v_{k-1,j})$.

Лемма 2. *Пусть $\langle \mu, j;\ \vec{\beta} \rangle$ — задача вида (13) с параметрами μ и j вместо m и n. Пусть $f_{\mu,j}(\vec{\beta})$ — оптимум этой задачи.*

а) *Для всяких $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ и $j = \overline{1,n}$ верно*

$$f_{0,j}(\vec{\beta}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{\beta} = \vec{0},\\ -\infty & \text{иначе.} \end{cases} \tag{14}$$

Для всяких $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ *и* $\mu = \overline{1, m}$ *справедливо*

$$f_{\mu,\,(\mu-1)\,l+1}(\vec{\beta}) = \begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{\mu} v_{k,\,(r-1)\,l+1}, & \textit{если } \vec{\beta} = \sum\limits_{r=1}^{\mu} \vec{v}_{(r-1)\,l+1}, \\ -\infty & \textit{иначе.} \end{cases} \tag{15}$$

б) *Для всяких* $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$, $\mu = \overline{1, m}$ *и* $j = \overline{(\mu-1)\,l+2, n}$ *имеет место равенство*

$$f_{\mu,j}(\vec{\beta}) = \max\{c_j + f_{\mu-1,j-l}(\vec{\beta} - \vec{v}_j); f_{\mu,j-1}(\vec{\beta})\}. \tag{16}$$

Действительно, если необходимо выбрать μ векторов, то минимальное число векторов, из которых можно сделать этот выбор, удовлетворив ограничение на расстояние индексов, равно $(\mu-1)\,l+1$, причём выбор в этом случае определён однозначно. Переходя к формуле (16), заметим, что выбор последнего вектора запрещает возможность выбора $l-1$ предыдущих векторов, а значит, оставшиеся $\mu-1$ векторов должны быть оптимальным образом выбраны из первых $j-l$ векторов. Лемма 2 доказана.

Нетрудно убедиться, что алгоритм A с соответствующими изменениями начального и основного шагов корректно решает задачу (13). Трудоёмкость этого алгоритма, а значит, и общего алгоритма $\widetilde{A}$ для задачи ПВО, не увеличивается (ср. с теоремами 2 и $2'$ из разд. 1).

Теорема 9. *Задача* ПВО *с целочисленными координатами векторов решается точно за время* $O(kmn(mb)^{k-1})$ *в случае неотрицательных координат и* $O(kmn(2mb)^{k-1})$ *в случае координат произвольного знака, где скрытые в обозначениях константы не зависят от* k.

Следствие 3. *Если размерность* k *пространства* $\mathbb{R}^k$ *фиксирована, то задача* ПВО *с целочисленными координатами векторов решается точно за псевдополиномиальное время* $O(nm^k b^{k-1})$.

4. Заключение

При фиксированном k оба алгоритма имеют псевдополиномиальную сложность. При этом алгоритм, предложенный для решения задачи ПВО, имеет меньшую в k^{k-1} раз трудоёмкость независимо от m.

По сравнению с соответствующими алгоритмами, построенными в [1], трудоёмкость новых алгоритмов решения задач ПВ и ПВО оказывается меньше при $m < (k/2)^k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В.** Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 1. — С. 22–32.
2. **Бабурин А. Е., Пяткин А. В.** О полиномиальных алгоритмах решения одной задачи суммирования векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 3–10.
3. **Гимади Э. Х.** Задача выбора подмножества векторов с максимальной суммой // Материалы Российской конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Владивосток, 7–14 сентября 2007). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007. — С. 27–30.
4. **Гимади Э. Х., Кельманов А. В., Кельманова М. А., Хамидуллин С. А.** Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. — 2006. — Т. 9, № 1. — С. 55–74.
5. **Кельманов А. В., Хамидуллин С. А., Окольнишникова Л. В.** Апостериорное обнаружение одинаковых подпоследовательностей-фрагментов в квазипериодической последовательности // Сиб. журн. индустр. математики. — 2002. — Т. 5, № 2. — С. 94–108.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Глазков Юрий Владимирович,
e-mail: yg@ngs.rue@math.nsc.ru

Рыков Иван Александрович,
e-mail: rykov@ledas.com

Статья поступила
16 марта 2008 г.

Переработанный вариант —
20 июня 2008 г.