

УДК 519.8

О СРАВНЕНИИ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ В ПОЛОСУ С ОДНОЙ ЗАДАЧЕЙ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ^{*)}

И. А. Рыков

Аннотация. Проводится сравнение частного случая задачи календарного планирования с задачей упаковки в полосу. Улучшена оценка сверху для отношения оптимумов рассматриваемых задач. Построен пример с оптимумами 5 и 4 и шириной полосы 8. Показано, что данный пример является минимальным, т. е. не существует примера с оптимумами 5 и 4 и с меньшей шириной полосы.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, календарное планирование, упаковка в полосу.

Введение

Задача календарного планирования в условиях ограниченных ресурсов — известная труднорешаемая задача исследования операций. Она имеет естественное прикладное значение и с течением времени не теряет своей актуальности. Классическая постановка включает в себя работы с заданной длительностью выполнения, нескладируемые ресурсы, а также ограничения предшествования. В таком виде задача оказывается чрезвычайно трудной (даже ее частный случай, задача упаковки в контейнеры — с одним типом ресурсов, единичной длительностью всех работ и в отсутствии ограничений предшествования — является NP-трудной задачей). Поэтому в большинстве работ, посвящённых её исследованию, предлагаются эффективные эвристические алгоритмы приближённого решения [9]. Такие алгоритмы часто не подразумевают априорных оценок точности и не гарантированы от сколь угодно больших погрешностей.

Мы рассмотрим частный случай данной задачи — в отсутствии ограничений предшествования и лишь с одним типом ресурсов. Приведём формальную постановку этой подзадачи (обозначаемой далее как ЗКП).

Дано множество работ J , для каждой из работ $j \in J$ определена длительность её выполнения l_j . В каждый единичный интервал времени

^{*)}Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00516 и 07-07-00222).

выделяется W единиц ресурса, необходимых для выполнения работ. Для каждой работы $j \in J$ задана величина w_j — интенсивность потребления ресурса в единицу времени выполнения. Для произвольного расписания, т. е. множества $S = \{s_j \mid j \in J\}$, где s_j — момент начала выполнения работы j , обозначим множество работ, исполняемых в единичном интервале $(t - 1, t]$, через $A(S, t) = \{j \mid s_j < t \leq s_j + l_j\}$. Расписание S называется *допустимым*, если в каждый момент времени суммарная интенсивность потребления ресурса работами из множества $A(S, t)$ не превышает количества W выделенного ресурса.

Все входные величины предполагаются неотрицательными целыми.

Требуется найти допустимое расписание, минимизирующее длительность выполнения проекта (момент окончания выполнения последней из работ):

$$\max_{j \in J} (s_j + l_j) \rightarrow \min_{s_j \in \mathbb{Z}^+}, \quad \sum_{j \in A(S, t)} w_j \leq W, \quad t = 1, 2, \dots$$

Построение расписания можно наглядно представить в виде расположения прямоугольников в полосе, протянутой вправо вдоль горизонтальной оси времени и имеющей ширину W . Каждую из работ можно представлять в виде набора из l_j прямоугольников, имеющих ширину w_j и единичную длину, которые нужно уложить в последовательные единичные интервалы времени так, чтобы они не пересекались с прямоугольниками других работ. Действительно, такое расположение будет означать, что в каждый момент времени суммарная ширина (т. е. интенсивность потребления ресурса) выполняемых работ не превышает ширины полосы (интенсивности выделения ресурса).

Эта аналогия приводит к естественному сравнению данной задачи с известной двумерной задачей упаковки в полосу (см., например, [2]), далее ЗУП. Опишем её формальную постановку.

Входом ЗУП является множество прямоугольников с фиксированными шириной w_j и длиной l_j , а также полубесконечная полоса ширины W . Требуется расположить прямоугольники внутри полосы без вращений (стороны прямоугольников, соответствующие длине, должны быть параллельны горизонтальным сторонам полосы) так, чтобы они попарно не пересекались и чтобы длина упаковки (максимальная длина, достигаемая сторонами прямоугольников) была минимальной. Задачи ЗУП и ЗКП являются обобщением одномерной задачи упаковки в контейнеры. Обе задачи являются NP-трудными.

Имеем взаимно однозначное соответствие входа ЗУП и входа ЗКП. Длина упаковки при этом будет соответствовать времени окончания по-

следней работы, т. е. целевые функции обеих задач имеют одинаковый вид.

Очевидно также, что любое допустимое решение ЗУП является допустимым и для ЗКП: любые два прямоугольника-работы, выполняемые в один и тот же момент времени, в силу непересечения используют в этот момент разные единицы ресурса, т. е. выполняются ресурсные ограничения. Обратное, однако, неверно: как уже было замечено выше, работу можно разбить на l_j прямоугольников единичной длины, так как ей не предписано использование одних и тех же единиц ресурса в каждом интервале её выполнения. Таким образом, множество допустимых решений ЗКП содержит решения, не являющиеся допустимыми для ЗУП.



Рис. 1. Оптимумы ЗКП и ЗУП для данного примера совпадают

Однако неочевиден ответ на вопрос, являются ли эти задачи действительно неэквивалентными, т. е. позволяет ли рассмотренная дополнительная степень свободы получать решения с лучшим значением целевой функции. Так, например, на рис. 1 одно из оптимальных расписаний для ЗКП (слева) не является допустимой упаковкой (работа c в начале выполнения использует первую и вторую единицы ресурса, а в конце — вторую и третью), однако оптимальная упаковка (справа) имеет ту же длину. Таким образом, для данного примера возможность использования разных единиц ресурса в разные моменты времени не приносит дополнительной выгоды.

Оказывается, тем не менее, что примеры с разными оптимальными значениями целевых функций (далее оптимумами) для ЗУП и ЗКП существуют. Так, в [1] приведён пример, в котором оптимумы для этих задач равны 6 и 5 соответственно. В [3] предложен пример, в котором оптимумы равны 5 и 4 соответственно, ширина полосы в этом примере равна 12. Там же показано, что для любого примера с оптимальным значением для ЗКП, равным 3, оптимум для ЗУП также равен 3.

В данной статье продолжено сравнение ЗКП и ЗУП. Цель данных исследований состоит в подробном изучении соотношения структур задач календарного планирования и упаковки. Эти знания позволяют использовать алгоритмические идеи, полученные для одного класса задач, при построении алгоритмов решения задач другого класса.

Сравнение задач упаковки и календарного планирования представлено в литературе. Так, в [6] задача календарного планирования в отсутствие ограничений предшествования и при единичных длительностях работ представляется в виде задачи упаковки d -мерных векторов, где d — число типов ресурсов. Показано, что обобщение алгоритма “First Fit” [8] для этой задачи обладает гарантированной оценкой $d + \frac{17}{10}$. В обзоре [7] задача упаковки в полосу представляется в виде частного случая мультимодальной задачи календарно-ресурсного планирования. Показано, как генетический алгоритм для задачи планирования может быть адаптирован для решения задачи упаковки.

В настоящей статье улучшена оценка сверху для отношения оптимумов рассматриваемых задач ЗУП и ЗКП. Построен пример с оптимумами 5 и 4 и шириной полосы 8. Показано, что данный пример является минимальным, т. е. не существует примера с оптимумами 5 и 4 и с меньшей шириной полосы.

1. Оценка сверху на отношение оптимальных значений

Введём в рассмотрение величину

$$\rho = \sup_L \frac{\text{ЗУП}(L)}{\text{ЗКП}(L)},$$

где L — произвольный вход для обеих задач, а $\text{ЗУП}(L)$ и $\text{ЗКП}(L)$ — соответствующие оптимумы. Эта величина является множителем, позволяющим получить гарантированную оценку точности для ЗКП из оценки точности некоторого алгоритма для ЗУП. Скажем, если мы знаем, что $\rho \leq 3$ и что некоторый алгоритм имеет гарантированную оценку точности 3 для ЗУП, то этот же алгоритм даёт оценку 9 для ЗКП. Соответственно представляет интерес нахождение точного значения ρ . Из примера, приведённого в [3], следует, что $\frac{5}{4} \leq \rho$.

Для алгоритмов решения задачи упаковки в полосу наряду с гарантированными оценками точности вида

$$\text{ALG}(L) \leq \alpha \text{ЗУП}(L) \quad \text{для всех } L,$$

где $\text{ALG}(L)$ — значение целевой функции на решении, найденном алгоритмом, $\alpha \geq 1$ — некоторая константа, часто рассматриваются гарантированные асимптотические оценки точности. Они имеют вид

$$\text{ALG}(L) \leq \alpha \text{ЗУП}(L) + \gamma l_{\max}(L) \quad \text{для всех } L,$$

где $l_{\max}(L)$ — наибольшая из длин прямоугольников, $\gamma \geq 0$. В этом случае на примерах, для которых отношение $\text{ЗУП}(L)/l_{\max}(L)$ велико, гарантированная оценка близка к α .

По аналогии обозначим

$$\rho_\lambda = \sup \left\{ \frac{\text{ЗУП}(L)}{\text{ЗКП}(L)} \mid L \text{ такие, что } \frac{\text{ЗКП}(L)}{l_{\max}(L)} \geq \lambda \right\},$$

$$\rho_\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho_\lambda.$$

Теорема 1. *Справедливы следующие неравенства:*

$$1,25 \leq \rho \leq 2,7, \quad 1 \leq \rho_\infty \leq 1,25.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства воспользуемся нижними оценками для $\text{ЗУП}(L)$, полученными в статьях [5] и [4], и покажем, что они являются также нижними оценками для $\text{ЗКП}(L)$.

В [5] рассматривается алгоритм FFDH (“First fit decreasing height”). Входной список прямоугольников упорядочивается по убыванию длины. Затем упаковка производится по слоям — участкам полосы, имеющим ширину W , граница каждого из которых определяется правой стороной первого упакованного в него прямоугольника. Очередной прямоугольник помещается в самый левый слой, в который он входит по ширине; если такого слоя не найдётся, создаётся новый слой. В [5] приводится следующая

Теорема 2. $\text{FFDH}(L) \leq 1,7 \cdot \text{ЗУП}(L) + l_{\max}$ для всех L .

При доказательстве вводится в рассмотрение величина

$$A(L) = \sum_{r \in L} l_r \cdot \widetilde{W}(w_r),$$

где $\widetilde{W}(x)$ — весовая функция для алгоритма “First Fit” для задачи одномерной упаковки [8], которая обладает тем свойством, что для любого набора неотрицательных чисел $\{x_i\}$ если $\sum x_i \leq 1$, то $\sum \widetilde{W}(x_i) \leq 1,7$. В [5] показано, что

$$A(L) \leq 1,7 \cdot \text{ЗУП}(L), \tag{1}$$

$$A(L) \geq \text{FFDH}(L) - l_{\max}. \tag{2}$$

При доказательстве неравенства (1) рассматривается оптимальная упаковка, которая разбивается на слои, границы которых определяются

вертикальными сторонами всех прямоугольников. Применяя упомянутое свойство к сегментам каждого слоя (т. е. его пересечениям с прямоугольниками) и суммируя по слоям произведения

$$l(S) \cdot \sum_{s \in S} \widetilde{W}(w(s)) \leq 1,7 \cdot l(S),$$

где $l(S)$ — длина слоя, $w(s)$ — ширина сегмента (после нормировки ширины полосы можно считать равной 1), получаем требуемое неравенство. Нетрудно заметить, что подобным образом мы можем рассмотреть оптимальное расписание для задачи ЗКП и разбить его на слои единичной длины. Применив аналогичную процедуру к новым слоям, получим более сильную оценку

$$A(L) \leq 1,7 \cdot \text{ЗКП}(L).$$

Отсюда в силу (2) следует, что

$$\text{FFDH}(L) - l_{\max} \leq 1,7 \cdot \text{ЗКП}(L).$$

Поэтому для всех L

$$\text{ЗУП}(L) \leq \text{FFDH}(L) \leq l_{\max} + 1,7 \cdot \text{ЗКП}(L) \leq 2,7 \cdot \text{ЗКП}(L),$$

что даёт $\rho \leq 2,7$.

В [4] рассматривается более сложный алгоритм UD (“Up-Down”), состоящий из нескольких этапов, сочетающих упаковку “Bottom-Left” с упорядочением по убыванию ширины прямоугольников и обобщение алгоритма “Next Fit Decreasing Height” (подробное описание всех этапов см. в [4]). Доказана следующая

Теорема 3 [4]. $\text{UD}(L) \leq 1,25 \cdot \text{ЗУП}(L) + \frac{53}{8} l_{\max}$ для всех L .

Доказательство теоремы представляет собой разбор случаев, для каждого из которых строится вспомогательная функция, играющая роль, аналогичную представленной выше функции $A(L)$. Эти функции оценивают оптимум снизу и величину $\text{UD}(L)$ сверху.

В первом из трёх случаев оптимум оценивается так:

$$\text{ЗУП}(L) \geq H_1 + H_2/2,$$

где H_1 — суммарная длина прямоугольников, имеющих ширину меньше заданной величины, а H_2 — суммарная длина остальных прямоугольников. Заметим, что оптимум $\text{ЗКП}(L)$ не меньше оптимума $\text{ЗУП}(\tilde{L})$, где список \tilde{L} получен из L заменой каждой работы с параметрами (w_j, l_j) на

l_j работ ширины w_j и единичной длины (так как любое допустимое расписание для списка L представляет упаковку списка \tilde{L} с дополнительным ограничением — прямоугольники единичной длины, полученные из одного и того же исходного, должны быть размещены в последовательных единичных слоях). Ввиду того, что параметр «суммарная длина прямоугольников, имеющих ширину из заданного диапазона» для списков L и \tilde{L} одинаков, приведённая нижняя оценка остаётся верной и для ЗКП.

Во втором случае для оценки оптимума, представимого в виде суммы

$$\text{ЗУП}(L) = H(G_1) + H(G_2),$$

где G_1 — множество слоёв в оптимальной упаковке, содержащих сегмент с шириной, большей либо равной $1/2$, а G_2 — множество всех остальных слоёв, $H(G_i)$ — суммарная длина слоёв, входящих в G_i , необходимо показать, что выполнены два неравенства:

$$\sum_{S \in G_1} A(S) \leq 1,25H(G_1) + A(T) + l_{\max}/2, \quad (3)$$

$$\sum_{S \in G_2} A(S) \leq 1,25H(G_2). \quad (4)$$

Здесь функция $A(L)$ имеет тот же вид, что и в доказательстве предыдущей теоремы, но для другой весовой функции $\tilde{W}(x)$, а T — группа прямоугольников, упакованных алгоритмом UD определённым образом (как дополнения к прямоугольникам, имеющим ширину более $1/2$).

Снова рассмотрим вместо оптимальной упаковки оптимальное расписание, которое разобьём на слои единичной длины. Разделим слои на два аналогичных класса и используем те же обозначения для суммарной длины слоёв. Оба неравенства останутся верными. Действительно, для доказательства неравенства (3) в оптимальной упаковке оценивается суммарная длина прямоугольников, не меньших определённой величины и не лежащих в T . Данная оценка переносится на оптимальное расписание. Для неравенства (4) производится разбор случаев, какие сегменты могут встретиться в каждом слое. Аналогично тому, как это делается в доказательстве теоремы об алгоритме FFDH, доказывается, что $\tilde{W}(S) < 5/4$ при любом сочетании для любого слоя. Эти рассуждения могут быть в точности перенесены на слои единичной длины оптимального расписания.

Наконец, в третьем случае используется нижняя оценка, выраженная через суммарную площадь прямоугольников, которая также может быть использована для ЗКП.

Следовательно, оценка

$$\text{UD}(L) - \frac{53}{8}l_{\max} \leq 1,25 \cdot \text{ЗУП}(L)$$

может быть сведена к оценке

$$\text{ЗУП}(L) \leq \text{UD}(L) \leq \frac{53}{8}l_{\max} + 1,25 \cdot \text{ЗКП}(L),$$

что даёт $\rho_{\infty} \leq 1,25$. Теорема 3 доказана.

Автору представляется, что значения обеих величин равны указанным в теореме нижним оценкам.

2. Пример с отношением 5/4

Рассмотрим пример, состоящий из девяти работ с параметрами (l_i, w_i) : $a = (3, 1)$, $b = (3, 1)$, $c = (2, 3)$, $d = (2, 1)$, $e = (2, 1)$, $f = (1, 6)$, $g = (1, 4)$, $h = (1, 4)$, $i = (1, 2)$. Этот пример демонстрирует неэквивалентность задач ЗУП и ЗКП: оптимальное расписание для этого примера имеет длину 4, а оптимальная упаковка — длину 5. П. И. Шарыгин [3] показал, что минимально возможная длина для подобных примеров 3: для любого примера с оптимальным расписанием длины 3 может быть построена также оптимальная упаковка длины 3.

Как будет показано в следующем разделе, данный пример является также минимальным по ширине среди примеров, имеющих оптимальное расписание длины 4 и оптимальную упаковку большей длины.

Таким образом, это минимальный пример в классе примеров, имеющих разные оптимальные значения в ЗУП и ЗКП относительно лексикографического упорядочения по длине и ширине.

На рис. 2 представлено оптимальное расписание длины 4. Легко построить упаковку длины 5 (например, сдвинуть прямоугольник d на единицу вправо, тогда e поместится слева от него). Эта упаковка и будет оптимальной.

Теорема 4. *Для приведенного выше примера не существует допустимой упаковки в прямоугольник размера 4×8 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разберём возможные варианты.

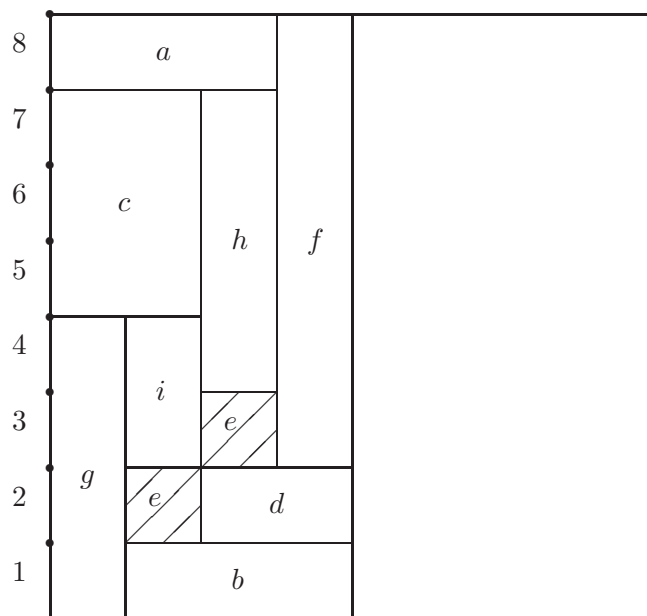


Рис. 2. Пример с отношением $5/4$

СЛУЧАЙ 1. Прямоугольники a и b касаются одного (левого или правого) края контейнера.

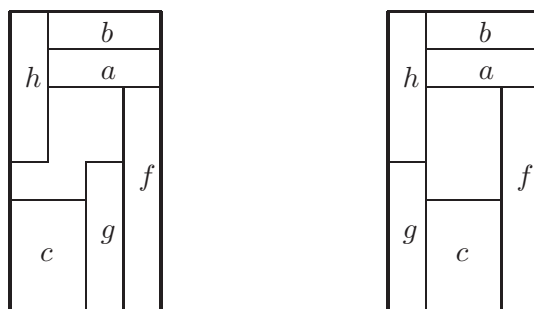


Рис. 3. Случай 1.1

Тогда в трёх столбцах под ними остаётся 6 свободных единиц, а значит, каждый из них пересекается не более чем с одним из четырёх прямоугольников c, f, g, h (так как сумма длин любых двух из этих четырёх прямоугольников больше шести). Прямоугольник c займёт два столбца по ширине, и на прямоугольники f, g, h остаётся лишь 2 столбца, а значит, один из этих прямоугольников должен быть в одном столбце с каким-то другим из четырёх, причём столбец этот — не занятый прямоугольниками a и b . Таким образом, f обязательно располагается в

столбце под a и b , и возможны два случая, когда a и b находятся рядом (рис. 3), и два, когда они разделены прямоугольником f (рис. 4), а также четыре получаемых из них варианта, когда f меняется местами с соседом по горизонтали.

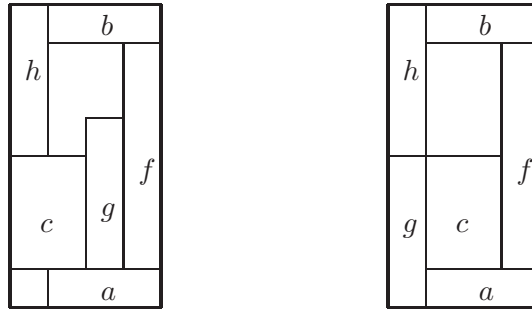


Рис. 4. Случай 1.2

Во всех восьми случаях невозможно целно разместить оставшиеся три прямоугольника d, e, i .

СЛУЧАЙ 2. a и b касаются разных краёв контейнера.

СЛУЧАЙ 2.1. Прямоугольник f находится в одном из средних столбцов, пересекаясь по вертикали как с a , так и с b , при этом возможны два варианта:

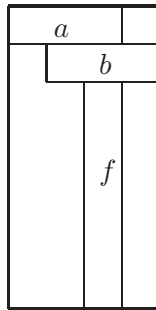
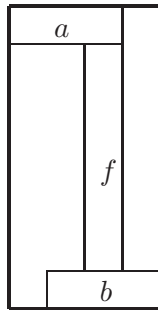


Рис. 5. Случай 2.1

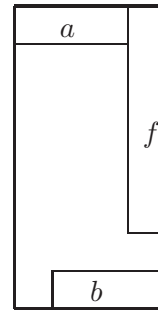


Рис. 6. Случай 2.2

Оба варианта (рис. 5) неприемлемы, так как в первом (на рисунке слева) нельзя подобрать комбинацию прямоугольников ширины 1 с общей длиной 7, а во втором — во входе нет прямоугольника со сторонами по 1.

СЛУЧАЙ 2.2. f находится в крайнем столбце (для определённости в правом), не пересекаясь по вертикали с прямоугольником a .

На прямоугольники c, g, h суммарной ширины 4 в этом случае остаётся лишь 3 столбца для размещения, поэтому два из них должны пересекать один и тот же столбец. Это возможно лишь для крайнего левого столбца, в котором осталось 7 свободных единиц, а в центральных — по 6 единиц, что недостаточно ни для каких двух из трёх. Таким образом, можно однозначно сказать, что левый столбец будет занят прямоугольниками a, c и одним из пары (g, h) (для определённости g). Крайний правый столбец будет занят прямоугольниками b, f и одним из пары (d, e) (для определённости d). С точностью до вертикального отражения возможно 5 комбинаций расположения этих шести прямоугольников (рис. 7).

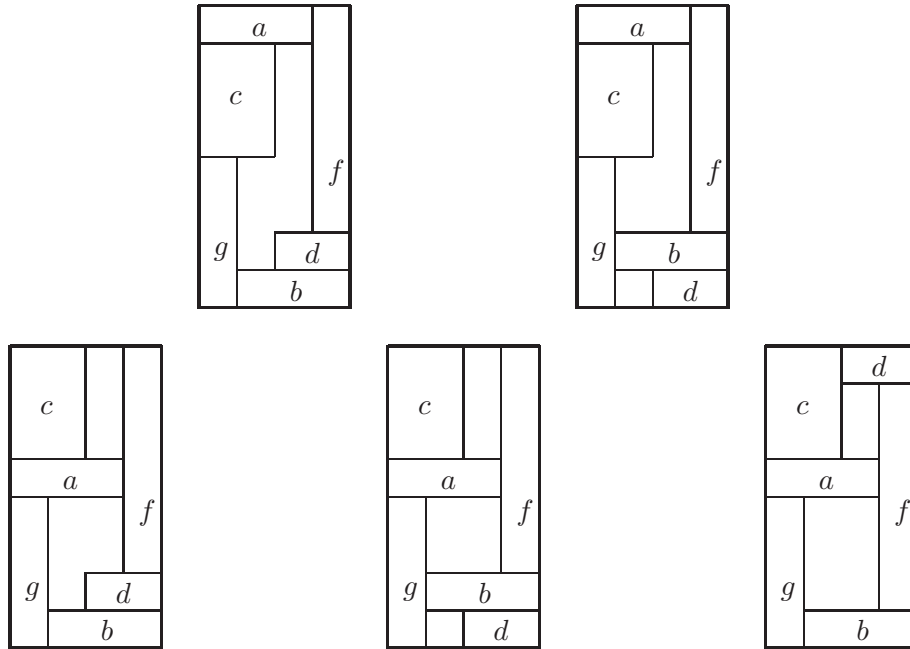


Рис. 7. Случай 2.2, 5 вариантов

Только в первых двух вариантах возможно размещение прямоугольника h . При этом остаётся единственная пустая строка, в которую можно разместить прямоугольник e . В обеих ситуациях при этом невозможно поместить прямоугольник i .

Таким образом, показано, что оптимум ЗУП для этой задачи равен 5, т. е. это пример с отношением оптимумов $5/4$. Теорема 4 доказана.

3. Минимальность примера

Покажем, что ширина полосы 8 для примера с отношением $5/4$ минимальна, или, иначе, что справедлива следующая

Теорема 5. *Любое расписание для ЗКП с $W \leq 7$ длины 4 допускает перестроение в допустимую упаковку длины 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть полоса имеет ширину W и существует расписание работ длины 4. Работы длительности 4 занимают полосу по всей длине, поэтому можно считать, что таких работ нет во входе задачи (если они есть, мы перемещаем их наверх или вниз, образуя цельные прямоугольники).

Разобьём все работы на 9 классов. Работы, выполняющиеся в первый момент времени и имеющие длину 1, 2, 3, будут относиться к классам A_1, A_2, A_3 соответственно. Работы, оканчивающие выполнение в момент 4 и имеющие длину 1, 2, 3, отнесём к классам B_1, B_2, B_3 . Работы длины 1 и 2, начинающиеся в момент времени 2, отнесём к классам C_1, C_2 , и, наконец, работы длины 1, исполняющиеся в момент времени 3, отнесём к классу D_1 . Если в рассматриваемом отрезке полосы имеются пустоты, заполним их работами ширины и длины 1 и отнесём к соответствующим классам (это только усложнит пример, т. е. если дополненное таким образом расписание будет допускать перестроение в допустимую упаковку, очевидно, и исходное расписание тем же перестроением будет приводиться к допустимой упаковке). Можно «склеить» все работы из одного класса, т. е. считать, что в каждом классе содержится лишь одна работа с соответствующей интенсивностью потребления. Эта процедура также лишь усложнит перестроение в допустимую упаковку. Поэтому в дальнейшем будем говорить о работах A_1, A_2 и т. д. Интенсивности потребления работ из класса будем обозначать соответствующими строчной буквой и цифрой (например, интенсивность потребления работы A_1 обозначается через a_1).

Без ограничения общности будем считать, что $a_2 \geq b_2$ (в противном случае можно развернуть временную шкалу).

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая

Лемма 1. *Если для примера из девяти работ $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, D_1$ с определёнными выше длительностями выполнения не существует упаковки длины 4, то выполняются следующие необходимые условия на их интенсивности потребления:*

- 1) $a_3 \geq 1, b_3 \geq 1,$
- 2) $a_2 \geq 1, b_2 \geq 1,$

- 3) $a_2 > b_2$ ($\Rightarrow a_2 \geq 2$),
- 4) $c_2 \geq 1$,
- 5) $c_1 \geq 1$, $c_1 \neq b_2$ ($\Rightarrow a_2 + c_1 \geq 4$).

Покажем, что из леммы непосредственно следует справедливость теоремы 5. Ввиду допустимости расписания в интервале $[1, 2]$ имеем

$$W \geq a_3 + a_2 + c_1 + c_2 + b_3,$$

отсюда по лемме следует оценка

$$W \geq 7.$$

Ситуация $W = 7$ возможна только в случае выполнения равенств $a_3 = b_3 = b_2 = c_2 = 1$, $a_2 = c_2 = 2$ либо $a_3 = b_3 = c_1 = c_2 = 1$, $b_2 = 2$, $a_2 = 3$, которые определяют два примера (рис. 8), допускающие, однако, нужные перестроения.

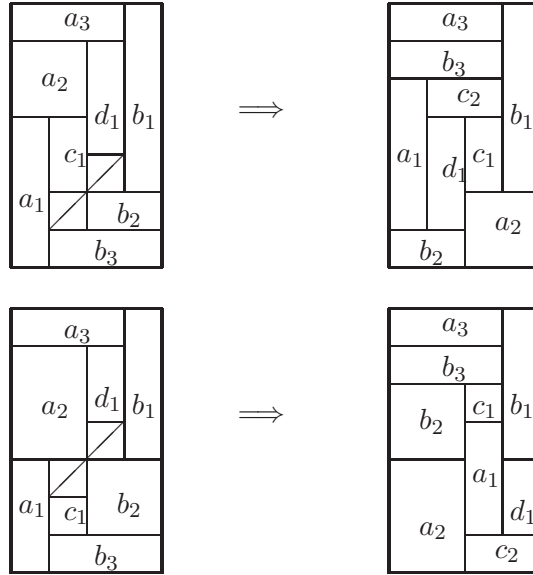


Рис. 8. $W = 7$

Таким образом, остаётся показать, что выполнена лемма.

Доказательство леммы 1. Определим процедуру перестроения расписания, которая в большинстве случаев будет приводить к допустимой упаковке: не меняя моментов начал выполнения работ, будем перемещать соответствующие работам отрезки единичной длины по вертикали таким образом, чтобы работы образовывали цельные прямоугольники.

Расположим работу A_3 сверху полосы, работу A_2 — под ней, работу A_1 — внизу полосы, а работы B_3, B_2, B_1 , наоборот, снизу вверх (легко понять, что при таком перестроении допустимость расписания сохраняется; назовём это перестроение *каноническим*).

Из допустимости расписания следует, что $a_3 + a_2 + b_3 \leq W$ (так как все три соответствующие работы выполняются во второй момент времени). С другой стороны, $W = a_1 + a_2 + a_3$. Подставляя это выражение в неравенство, получаем $b_3 \leq a_1$. Аналогично доказывается, что $a_3 \leq b_1$. Это означает, что в каноническом перестроении все работы групп А и В представлены цельными (не разделёнными на ломтики) прямоугольниками. В каждом из средних столбцов при этом всё свободное пространство оказывается сосредоточенным единым блоком (между работами A_3, B_2 и A_2, B_3 соответственно). Значит, каждая из работ C_1, D_1 также может быть представлена одним прямоугольником (рис. 9).

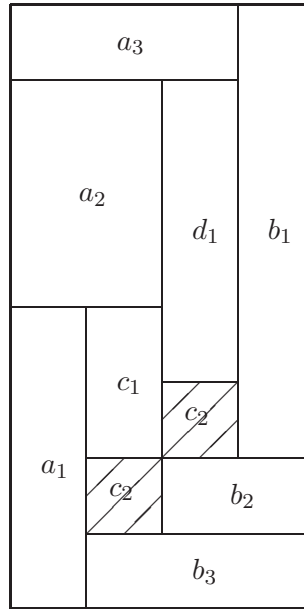


Рис. 9. Каноническое перестроение

Докажем теперь, что при нарушении хотя бы одного из пяти перечисленных в лемме условий существует перестроение расписания в допустимую упаковку (во всех случаях перестроение будет осуществляться лишь по вертикали, т. е. моменты начала всех работ останутся прежними).

Условие 1: пусть $a_3 = 0$ или $b_3 = 0$. Осуществим следующие перестроения прямоугольников групп А и В: A_2 и B_2 расположим внизу,

над ними — A_1 и B_1 и сверху — A_3 или B_3 (по предположению присутствует только один из них). В этом случае центральное пустое место для прямоугольников из групп C и D имеет верхнее основание ширины 2. Именно туда, вплотную к прямоугольнику A_3 (B_3) помещается C_2 , а C_1 и D_1 располагаются под ним. Данное перестроение приводит нас к допустимой упаковке.

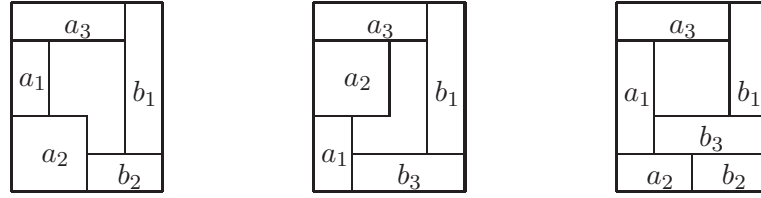


Рис. 10. Иллюстрации к условиям 1, 2 и 3

Условие 2: если $a_2 = 0$ или $b_2 = 0$, то уже в каноническом перестроении получаем, что центральное пустое место получило структуру, как в предыдущем случае (т. е. с верхним или нижним основаниями ширины 2), и допускает цельное расположение прямоугольников групп C и D .

Условие 3: если $a_2 = b_2$, то можно переместить вниз работы A_2 и B_2 , при этом центральное пустое место окажется прямоугольником, что позволит осуществить цельное расположение групп C и D .

Условие 4 очевидно, так как в случае канонического перестроения все остальные работы представлены цельными прямоугольниками.

Условие 5: очевидны соотношения

$$\begin{aligned} d_1 &= b_1 - a_3 - c_2 = b_1 + a_1 + a_2 - W - c_2, \\ c_1 &= a_1 - b_3 - c_2 = a_1 + b_1 + b_2 - W - c_2. \end{aligned}$$

Взяв их разность, получим

$$d_1 - c_1 = a_2 - b_2.$$

Если $c_1 = 0$, то $d_1 = a_2 - b_2$. Переформируем каноническое перестроение, разместив по левому краю (снизу вверх) A_2, A_3, A_1 , по правому — B_2, B_1, B_3 . Пустое пространство в средних столбцах разобьётся на две части: прямоугольник ширины 1 и длины $a_2 - b_2$, которую займёт D_1 , и прямоугольник ширины 2, куда целиком поместится C_2 (рис. 11, слева).

Пусть теперь $c_1 > 0$. Если $c_1 = b_2$, то в каноническом перестроении работа C_1 заполнит левую нижнюю часть пустого пространства ширины 1, а оставшееся свободное пространство будет иметь регулярную

структуру, как в случае условий 1 или 2 (рис. 11, справа), где целиком разместятся C_2 и D_1 . Если же $c_1 \neq b_2$, то при $c_1 = 1$ имеем $b_2 \geq 2$, $a_2 \geq 3$ и $c_1 + a_2 \geq 4$. При $c_1 > 1$ ввиду $a_2 \geq 2$ вновь получаем $c_1 + a_2 \geq 4$.

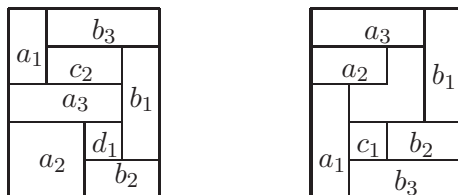


Рис. 11. Иллюстрации к условию 5

Лемма 1 и теорема 5 доказаны.

4. Заключение

В статье продолжено начатое в [1–3] сравнение частного случая задачи календарного планирования с задачей упаковки в полосу. Для величины, характеризующей максимальное различие оптимумов этих задач, улучшена верхняя оценка, а для нижней границы построен минимальный пример. Также рассмотрена величина, характеризующая различие оптимумов на множестве «больших» примеров, т. е. примеров, в которых оптимум задачи значительно превышает максимальную из длительностей работ, и получена её верхняя оценка.

Интересной открытой проблемой остаётся нахождение точных значений указанных величин.

Автор выражает благодарность Э. Х. Гимади и В. В. Залюбовскому за помощь при работе над статьёй.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации. Тр. / АН СССР. Сиб. Отд-ние. Ин-т математики, Т. 10. — Новосибирск: Наука, 1988. — С. 89–115.
2. Гимади Э. Х., Залюбовский В. В., Шарыгин П. И. Задача упаковки в полосу: асимптотически точный подход // Изв. вузов. — 1997. — № 12. — С. 37–49.
3. Шарыгин П. И. Оценки приближённого решения одной задачи календарного планирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 2, № 1. — С. 57–67.
4. Baker B. S., Brown D. J., Kartseff H. P. A $5/4$ algorithm for two-dimensional packing // J. Algorithms. — 1981. — N 2. — P. 348–368.

5. **Coffman E. G., Garey M. K., Johnson D. S., Tarjan K. E.** Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms // SIAM J. Computing. — 1980. — Vol. 9, N 4. — P. 808–826.
6. **Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S., Yao A. C.-C.** Resource constrained scheduling as generalized bin packing // J. Combinatorial Theory. — 1976. — Vol. A, N 21. — P. 251–298.
7. **Hartmann S.** Packing problems and project scheduling models: an integrating perspective. // J. Operational Research Society. — 2000. — N 51. — P. 1083–1092.
8. **Johnson D. S., Demers A., Ullman J. D., Garey M. R., Graham R. L.** Worst-case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms. // SIAM J. Computing. — 1974. — Vol. 3, N 4. — P. 299–325.
9. **Kolish R., Hartmann S.** Experimental investigation of heuristics for resource-constrained project scheduling: an update. // European J. Operational Research. — 2005. — N 9. — P. 320–333.

Рыков Иван Александрович,
e-mail: rykov@ngs.ru

Статья поступила
12 сентября 2007 г.
Переработанный вариант —
7 мая 2008 г.