ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2008. Том 15, № 5. С. 3–5

УДК 621.391.15

МНОГОМЕРНЫЕ ПЕРМАНЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ*)

С. В. Августинович

Аннотация. Перманент является эффективным средством при решении ряда комбинаторных задач перечислительного характера. Соответствующая теория хорошо развита и имеет многочисленные приложения. В статье задача подсчёта числа различных 1-совершенных бинарных кодов сведена к вычислению обобщённого перманента специально построенной многомерной матрицы.

Ключевые слова: перманент, совершенный код, многомерная матрица.

Введение

Рассмотрим множество E_q^p векторов длины p, компонентами которых являются элементы множества $E_q = \{1, 2, \ldots, q\}$. Произвольную функцию $M : E_q^p \to \{0, 1\}$ мы будем называть *p-мерной q-значной* $(0, 1)$*-матрицей*. Векторы I из E_q^p будем именовать *индексами*, а значение $M(I)$ назовём *элементом матрицы M с индексом I*. В дальнейшем через T будем обозначать матрицу, все элементы которой равны 1. Будем говорить, что два элемента матрицы M с индексами $I_1 = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ и $I_2 = (j_1, j_2, \ldots, j_p)$ *не лежат в одной гиперграни* матрицы, если $i_k \neq j_k$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Совокупность индексов $D = \{I_1, I_2, \ldots, I_q\}$ назовём *диагональю* матрицы M, если все I_t попарно не лежат в одной гиперграни. Диагональ D матрицы M считается единичной, если $M(I_1) = M(I_2) = \ldots = M(I_q) = 1$. Определим *перманент* $\operatorname{Per}(M)$ матрицы M как число её единичных диагоналей. Нетрудно убедиться в том, что $\operatorname{Per}(T) = (q!)^{p-1}$, и это вполне согласуется с поведением обычного двумерного перманента.

1. Основной результат

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный конечный регулярный степени d граф с транзитивной группой автоморфизмов $\operatorname{Aut}(G)$. Зафиксируем подмножество $B \subset V$ мощности $d + 1$ и назовём его *плиткой*. Пусть A

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–01–00248).

© 2008 Августинович С. В.

— какой-либо автоморфизм графа G. Множество $A(B)$ назовём *укладкой* плитки B в граф G посредством автоморфизма A. Совокупность $(B, A_1, A_2, \ldots, A_s)$ назовём *замощением* графа G копиями плитки B, если для всех $i \neq j$ выполняется $A_i(B) \cap A_j(B) = \varnothing$ и для всякой вершины $v \in V$ найдётся такое t, что $v \in A_t(B)$. Другими словами, множества $A_1(B), A_2(B), \ldots, A_s(B)$ образуют разбиение множества V. Наша главная цель — при весьма специфических дополнительных условиях получить явную формулу для числа различных замощений графа в терминах многомерного перманента.

Раскраску $C : V \to \{0, 1, \ldots, d\}$ будем называть *B-совершенной*, если для всех $A \in \mathrm{Aut}(G)$ выполняется

$$\bigcup_{v \in A(B)} C(v) = \{0, 1, \ldots, d\}.$$

Другими словами, при любой укладке плитки B в граф G все попавшие в неё вершины будут иметь различные цвета. Зафиксируем какую-либо B-совершенную (если таковая существует) раскраску C графа G и построим специальную матрицу M_c следующим образом. Порядок p матрицы M_c положим равным $p = |V|/(d+1)$, а размерность q равной $d+1$. В силу транзитивности графа G вершин каждого цвета $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ в нём будет поровну, а именно — p штук. Занумеруем произвольно множества вершин каждого цвета графа G числами от 1 до p. Тогда каждой вершине графа G будет сопоставлена пара (i, j), где i — номер цвета этой вершины, а j — некоторое число от 1 до p. Сопоставим каждой укладке $A(B)$ плитки B в графе G индекс $I_A(B)$ — вектор длины $d+1$, в котором на i-м месте стоит номер вершины цвета i, попавшей в $A(B)$. Положим $M_c(I) = 1$, если найдётся такое A, что $I = I_A(B)$, в противном случае $M_c(I) = 0$.

Теорема 1. *Число $N(G, B)$ различных замощений графа G плитками B выражается формулой $N(G, B) = \mathrm{Per}(M_c)$.*

Доказательство практически немедленно следует из определений. Действительно, условие непересекаемости пары укладок $A_1(B)$ и $A_2(B)$ плитки B в точности совпадает с условием непринадлежности одной гиперграни единичных элементов матрицы M_c с индексами $I_{A_1(B)}$ и $I_{A_1(B)}$. Таким образом, каждому замощению графа однозначно соответствует некоторая единичная диагональ матрицы и обратно. Теорема 1 доказана.

Нетрудно понять, что поскольку при $n = 2^k - 1$ гиперкуб соответствующей размерности допускает разбиение на 1-совершенные коды [1]

(в этом случае плиткой будет шар радиуса 1), то подходящая матрица размерности $n+1$ может быть построена, а её перманент по теореме 1 будет равен числу 1-совершенных кодов. Аналогично [2] можно выразить через многомерный перманент число латинских квадратов порядка n. В этом случае плиткой B является произвольная диагональ квадрата, а поиск соответствующей B-совершенной раскраски автор оставляет читателю в качестве легкого упражнения.

Заметим, что выведенная формула имеет вполне абстрактный характер и на сегодняшний день не может быть использована ни для вычисления $N(G,B)$, ни для оценки этого числа. Вся ценность проведённого исследования исчерпывается установлением связи между многомерными перманентами и замощениями графов.

Автор благодарен В. Н. Потапову за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Соловьева Ф. И., Хеден У.** О разбиениях n-куба на неэквивалентные совершенные коды // Пробл. передачи информации. — 2007. — Т. 43, № 4. — С. 45–50.
2. **Гаспарян А. С.** Перечисление гамма-латинских конфигураций: решение расширенной задачи о числе латинских прямоугольников // Материалы конференции «Дискретный анализ и исследование операций» (Новосибирск, 28 июня–2 июля 2004). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2004. — С. 83.
3. **Минк Х.** Перманенты. — М.: Мир, 1982. — 213 с.

Августинович Сергей Владимирович,
e-mail: avgust@math.nsc.ru

Статья поступила
20 марта 2008 г.