ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2008. Том 15, № 5. С. 6–19

УДК 519.8

О ЯДРЕ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ

В. А. Емеличев, Е. Е. Гуревский

Аннотация. Рассматривается многокритериальный вариант комбинаторной экстремальной задачи «на узкие места» (bottleneck problem) с четырьмя известными принципами оптимальности — по Парето, Слейтеру, Смейлу, а также лексикографическим. Исследовано строение ядра устойчивости таких задач, т. е. строение множества решений, сохраняющих соответствующую оптимальность при любых изменениях параметров минимаксных критериев в пределах «малой» окрестности.

Ключевые слова: многокритериальность, комбинаторная оптимизация, минимаксные частные критерии, устойчивость, множество Парето, множество Смейла, множество Слейтера, лексикографическое множество.

Введение

При исследовании поведения оптимальных решений многокритериальных дискретных задач как функции входных параметров возникают различные понятия устойчивости, являющиеся дискретными аналогами свойств непрерывности и полунепрерывности по Хаусдорфу точечно-множественного отображения, задающего функцию выбора [9, 10, 16]. В контексте этих постановок естественно возникает вопрос: как устроено ядро устойчивости задачи, т. е. множество всех решений, сохраняющих оптимальность при любых независимых изменениях параметров задачи в пределах «малой» окрестности. Ответ на этот вопрос для многокритериальных целочисленных задач линейного и квадратичного программирования содержится в работах [2, 4–6]. В частности, в работах [4, 5] доказано, что ядро устойчивости многокритериальных целочисленных задач, состоящих в поиске множеств Парето, Смейла и Слейтера с линейными и квадратичными критериями, всегда совпадает с множеством Смейла. В настоящей статье (разд. 3–5) показано, что ядро устойчивости

нелинейных (с критериями вида MINMAX) многокритериальных комбинаторных задач, состоящих в поиске тех же трёх вышеназванных множеств, «шире», т. е. множество Смейла всегда содержится в ядре устойчивости, а в ряде случаев является его собственным подмножеством, что иллюстрируется числовыми примерами. В разд. 6 описано строение ядра устойчивости многокритериальных минимаксных задач с лексикографическим принципом оптимальности.

1. Основные определения и свойства

Рассмотрим многокритериальный вариант известной комбинаторной (траекторной) задачи «на узкие места» (см., например, [1, 12, 13, 15]).

Пусть заданы множество $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, $m \geqslant 2$, и некоторая система его непустых подмножеств $T \subseteq 2^{N_m} \backslash \{\varnothing\}$, $|T| \geqslant 2$. Элементы множества T принято называть *траекториями*. Пусть компонентами вектор-функции $f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \ldots, f_n(t, A_n))$, $n \geqslant 1$, заданной на T, являются минимаксные критерии

$$f_i(t, A_i) = \max_{j \in t} a_{ij} \to \min_{t \in T}, \; i \in N_n,$$

где A_i — i-я строка матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$ с элементами из $\mathbb{R}$.

Отметим, что в схему скалярных (однокритериальных) траекторных задач (с линейными, минимаксными и др. критериями) вкладываются многие классические экстремальные задачи на графах (о коммивояжере, паросочетаниях, остовах и др.), задачи булева программирования и некоторые задачи теории расписаний.

Чтобы сформулировать полученные результаты, необходимо ввести несколько обозначений и дать некоторые определения.

Для любого индекса $i \in N_n$ положим

$$N_i(t, A_i) = \{j \in t \mid a_{ij} = f_i(t, A_i)\},$$

т. е. $N_i(t, A_i) = \operatorname{Arg}\max\{a_{ij} \mid j \in t\}$.

На множестве траекторий T зададим ряд бинарных отношений:

$$t \underset{A}{\succcurlyeq} t' \;\Leftrightarrow\; f(t, A) \geqslant f(t', A),$$

$$t \underset{A}{\equiv} t' \;\Leftrightarrow\; f(t, A) = f(t', A),$$

$$t \underset{A}{\succ} t' \;\Leftrightarrow\; t \underset{A}{\succcurlyeq} t' \;\&\; t \underset{A}{\not\equiv} t',$$

$$t \underset{A}{>} t' \ \Leftrightarrow \ \forall\, i \in N_n \ (f_i(t, A_i) > f_i(t', A_i)),$$

$$t \underset{A}{\vdash} t' \ \Leftrightarrow \ \forall\, i \in N_n \ \ (N_i(t, A_i) \subseteq N_i(t', A_i)),$$

$$t \underset{A}{\models} t' \ \Leftrightarrow \ f_k(t, A_k) > f_k(t', A_k),$$

где $k = \min\{i \in N_n \mid f_i(t, A_i) \neq f_i(t', A_i)\}$.

В этих обозначениях сформулируем известные множества многокритериальной оптимизации:

множество Парето (*множество эффективных траекторий*) [7, 11]

$$P^n(A) = \{t \in T \mid \forall\, t' \in T \ \ (t \,\overline{\underset{A}{\succ}}\, t')\},$$

множество Смейла (*множество строго эффективных траекторий*) [14]

$$Sm^n(A) = \{t \in T \mid \forall\, t' \in T \backslash \{t\} \ \ (t \,\overline{\underset{A}{\succsim}}\, t')\},$$

множество Слейтера (*множество слабо эффективных траекторий*) [7, 11]

$$Sl^n(A) = \{t \in T \mid \forall\, t' \in T \ \ (t \,\overline{\underset{A}{>}}\, t')\},$$

лексикографическое множество траекторий [8, 11]

$$L^n(A) = \{t \in T \mid \forall\, t' \in T \ \ (t \,\overline{\underset{A}{\models}}\, t')\}.$$

Здесь и далее черта над бинарным отношением, как обычно, означает отрицание этого отношения.

Для каждой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ очевидны включения

$$Sm^n(A) \subseteq P^n(A) \subseteq Sl^n(A), \ \ L^n(A) \subseteq P^n(A),$$

причём в нашем случае ($|T| < \infty$) множество $L^n(A)$ всегда непусто. Легко видеть, что множество $Sm^n(A)$ может быть и пустым.

Обозначим через $M^n(A)$ любое из введённых множеств $P^n(A)$, $Sm^n(A)$, $Sl^n(A)$, $L^n(A)$, а через $Z^n_M(A)$ — n-критериальную задачу поиска множества $M^n(A)$.

Процесс изменения параметров задачи будем моделировать посредством прибавления к исходной матрице $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *возмущающих матриц* из множества

$$\Xi(\varepsilon) = \{B \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid \|B\| < \varepsilon\},$$

где $\|B\| = \max\{|b_{ij}| \mid (i,j) \in N_n \times N_m\}$, $B = (b_{ij})$, $\varepsilon > 0$.

Определение 1. Траектория $t \in M^n(A)$ задачи $Z^n_M(A)$ называется *устойчивой*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \Xi(\varepsilon)$ справедливо включение $t \in M^n(A+B)$.

Определение 2. Множество всех устойчивых траекторий задачи $Z^n_M(A)$ называется *ядром устойчивости* этой задачи и обозначается через $\mathrm{Ker}^n_M(A)$.

Тем самым ядро устойчивости задачи $Z^n_M(A)$ задаётся формулой

$$\mathrm{Ker}^n_M(A) = \{t \in M^n(A) \mid \exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, B \in \Xi(\varepsilon) \ \ (t \in M^n(A+B))\}.$$

Для описания строения ядра устойчивости задач $Z^n_P(A)$, $Z^n_{Sm}(A)$, $Z^n_{Sl}(A)$ и $Z^n_L(A)$ нам понадобится ряд очевидных свойств и лемм.

Свойство 1. *Если* $t' \underset{A}{\succcurlyeq} t$, *то* $t \underset{A}{\overline{\succ}} t'$.

Свойство 2. $t \underset{A}{\overline{\succcurlyeq}} t' \ \Rightarrow \ t \underset{A}{\overline{\succ}} t' \ \Rightarrow \ t \underset{A}{\overline{>}} t'$.

Свойство 3. *При любых траекториях* t, t' *и всяком индексе* $i \in N_n$ *верна цепочка импликаций*

$$N_i(t, A_i) \subseteq N_i(t', A_i) \ \Rightarrow \ f_i(t \backslash t', A_i) < f_i(t', A_i) \ \Rightarrow \ f_i(t, A_i) \leqslant f_i(t', A_i).$$

Здесь и далее полагаем $f_i(\varnothing, A_i) = -\infty$.

Свойство 4. *Если* $t \underset{A}{\succcurlyeq} t'$ *и* $t \in Sl^n(A)$, *то существует хотя бы один такой индекс* $k \in N_n$, *что* $f_k(t, A_k) = f_k(t', A_k)$.

2. Леммы

Лемма 1. *Пусть* $t \in T$ *и множество* $G \subset T$ *таковы, что для любой траектории* $t' \in G$ *существует индекс* $k = k(t') \in N_n$ *с условием*

$$f_k(t, A_k) < f_k(t', A_k). \tag{1}$$

Тогда

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, B \in \Xi(\varepsilon) \ \ \forall\, t' \in G \ \ (t \underset{A+B}{\overline{\succcurlyeq}} t'). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $t \in T$, $t' \in G$ и $k = k(t')$ — индекс с указанным леммой условием (1). Тогда ввиду непрерывности функции $f_k(t, A_k)$

на множестве параметров из $\mathbb{R}^m$ легко убедиться в справедливости формулы

$$\exists\ \varepsilon(t') > 0\ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon(t'))\ \ (f_k(t, A_k + B_k) < f_k(t', A_k + B_k)),$$

которая, очевидно, истинна для любой траектории $t' \in G$. Поэтому формула (2) верна при $\varepsilon = \min\{\varepsilon(t') \mid t' \in G\}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть индекс $i \in N_n$ и траектории t и t' таковы, что $N_i(t, A_i) \subseteq N_i(t', A_i)$. Тогда верна формула*

$$\exists\ \varepsilon > 0\ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon)\ \ (f_i(t, A_i + B_i) \leqslant f_i(t', A_i + B_i)).$$

Доказательство. Из условий леммы 2 и свойства 3 вытекает неравенство $f_i(t\backslash t', A_i) < f_i(t', A_i)$. Отсюда ввиду непрерывности функции $f_i(t', A_i)$ на множестве параметров из $\mathbb{R}^m$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что при любой возмущающей матрице $B \in \Xi(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$f_i(t\backslash t', A_i + B_i) < f_i(t', A_i + B_i),$$

из которого согласно свойству 3 следует неравенство

$$f_i(t, A_i + B_i) \leqslant f_i(t', A_i + B_i).$$

Лемма 2 доказана.

3. Ядро устойчивости задачи $Z^n_P(A)$ поиска множества Парето $P^n(A)$

Положим

$$U^n(A) = \{t \in P^n(A) \mid \forall\ t' \in P^n(A)\ \ (t \underset{A}{\equiv} t' \ \Rightarrow\ t \underset{A}{\vdash} t')\}.$$

Теорема 1. $\mathrm{Ker}^n_P(A) = U^n(A)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $U^n(A) \subseteq \mathrm{Ker}^n_P(A)$. Пусть $t \in U^n(A)$, $t' \in T$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $t \underset{A}{\equiv} t'$. Тогда t' является эффективной траекторией задачи $Z^n_P(A)$ и справедливо соотношение $t \underset{A}{\vdash} t'$. Отсюда согласно свойству 3

$$f_i(t\backslash t', A_i) < f_i(t', A_i), \quad i \in N_n.$$

Поэтому существует такое число $\varepsilon_1(t') > 0$, что при любой возмущающей матрице $B \in \Xi(\varepsilon_1(t'))$ верны неравенства

$$f_i(t\backslash t', A_i + B_i) < f_i(t', A_i + B_i), \quad i \in N_n,$$

т. е. $t' \underset{A+B}{\succ} t$ в силу свойства 3, откуда на основании свойства 1 следует отношение $t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t'$, справедливое при $B \in \Xi(\varepsilon_1)$, где

$$\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_1(t') \mid t' \in T \ \&\ t' \underset{A}{\equiv} t\}.$$

Случай 2. Отношение $t \underset{A}{\equiv} t'$ не выполняется. Тогда согласно включению $t \in P^n(A)$ существует такой индекс $k = k(t') \in N_n$, что

$$f_k(t, A_k) < f_k(t', A_k),$$

и потому, учитывая лемму 1 и свойство 2, существует такое число $\varepsilon_2 > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \Xi(\varepsilon_2)$ и любой траектории t', рассматриваемой в этом случае, выполнено отношение $t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t'$.

Резюмируя эти случаи, заключаем, что $t \in P^n(A + B)$ при любой матрице $B \in \Xi(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Поэтому $t \in \mathrm{Ker}^n_P(A)$. Тем самым справедливо включение $U^n(A) \subseteq \mathrm{Ker}^n_P(A)$.

Далее докажем, что $\mathrm{Ker}^n_P(A) \subseteq U^n(A)$. Для этого достаточно показать, что никакая траектория $t \in P^n(A)\backslash U^n(A)$ не является устойчивой. Ввиду определения множества $U^n(A)$ для всякой такой траектории t существуют траектория $t^0 \underset{A}{\equiv} t$ и индексы $k \in N_n$, $p \in N_m$ с условием $p \in N_k(t, A_k)\backslash N_k(t^0, A_k)$. Поэтому, положив $\varepsilon > 0$ и построив элементы возмущающей матрицы $B^0 = \big(b^0_{ij}\big) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ по правилу

$$b^0_{ij} = \begin{cases} \delta & \text{при } i = k,\ j = p, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \delta < \varepsilon$, убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} f_k\big(t, A_k + B^0_k\big) &= \max_{j\in t}\big\{a_{kj} + b^0_{kj}\big\} = a_{kp} + \delta \\ &> a_{kp} = f_k(t, A_k) = f_k(t^0, A_k) = f_k\big(t^0, A_k + B^0_k\big), \end{aligned}$$

$$f_i\big(t, A_i + B^0_i\big) = f_i(t, A_i) = f_i(t^0, A_i) = f_i\big(t^0, A_i + B^0_i\big),\ i \neq k.$$

Следовательно, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая возмущающая матрица $B^0 \in \Xi(\varepsilon)$, что t не является эффективной траекторией задачи $Z^n_P(A+B^0)$, т. е. $t \notin \mathrm{Ker}^n_P(A)$. Тем самым доказано включение $\mathrm{Ker}^n_P(A) \subseteq U^n(A)$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Ядро устойчивости задачи $Z_P^n(A)$ совпадает с множеством Парето $P^n(A)$ тогда и только тогда, когда для любых траекторий $t,\ t' \in P^n(A)$ из отношения $t \underset{A}{\equiv} t'$ следуют равенства $N_i(t, A_i) = N_i(t', A_i)$, $i \in N_n$.*

Из теоремы 1 вытекает также следующий известный результат [3].

Следствие 2. $Sm^n(A) \subseteq \mathrm{Ker}_P^n(A)$.

Следующий пример показывает, что ядро устойчивости и множество Смейла задачи могут не совпадать.

Пример 1. Пусть $n = 1$, $m = 3$, $T = \{t_1, t_2\}$, $t_1 = \{1, 2\}$, $t_2 = \{1, 2, 3\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $f(t_1, A) = 2$, $f(t_2, A) = 2$, $P^1(A) = T$, $Sm^1(A) = \varnothing$, $U^1(A) = \{t_1\}$. Поэтому $\mathrm{Ker}_P^1(A) = \{t_1\}$ согласно теореме 1.

4. Ядро устойчивости задачи $Z_{Sm}^n(A)$ поиска множества Смейла $Sm^n(A)$

Теорема 2. $\mathrm{Ker}_{Sm}^n(A) = Sm^n(A)$.

Доказательство. Покажем, что любая строго эффективная траектория t принадлежит ядру устойчивости $\mathrm{Ker}_{Sm}^n(A)$. Пусть $t' \in T \backslash \{t\}$. Тогда найдётся такой индекс $k = k(t') \in N_n$, что $f_k(t, A_k) < f_k(t', A_k)$. Поэтому ввиду леммы 1 получаем формулу

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \ \forall\, B \in \Xi(\varepsilon) \ \ \forall\, t' \in T \backslash \{t\} \ \ (t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t'),$$

из которой следует включение $t \in \mathrm{Ker}_{Sm}^n(A)$, откуда и убеждаемся в справедливости теоремы 2.

5. Ядро устойчивости задачи $Z_{Sl}^n(A)$ поиска множества Слейтера $Sl^n(A)$

Введём множество

$$V^n(A) = \{t \in Sl^n(A) \mid \forall\, t' \in T \quad (t \underset{A}{\succ} t' \ \Rightarrow\ \exists\, k \in N_n \ (N_k(t, A_k) \subseteq N_k(t', A_k)))\}.$$

Теорема 3. $\mathrm{Ker}_{Sl}^n(A) = V^n(A)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $V^n(A) \subseteq \mathrm{Ker}_{Sl}^n(A)$. Пусть $t \in V^n(A)$ и $t' \in T$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $t \underset{A}{\succcurlyeq} t'$. Тогда в силу определения множества $V^n(A)$ существует такой индекс $k = k(t') \in N_n$, что $N_k(t, A_k) \subseteq N_k(t', A_k)$. Отсюда на основании свойства 3 имеем $f_k(t\backslash t', A_k) < f_k(t', A_k)$. Поэтому

$$\exists\ \varepsilon_1(t') > 0 \ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon_1(t')) \ \ (f_k(t\backslash t', A_k + B_k) < f_k(t', A_k + B_k)).$$

Вновь воспользовавшись свойством 3, получаем

$$f_k(t, A_k + B_k) \leqslant f_k(t', A_k + B_k),$$

т. е. $t \underset{A+B}{\overline{>}} t'$ при $B \in \Xi(\varepsilon_1(t'))$. Поэтому $t \underset{A+B}{\overline{>}} t'$ при $B \in \Xi(\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_1(t') \mid t' \in T \ \&\ t \underset{A}{\succcurlyeq} t'\}$.

Случай 2. Отношение $t \underset{A}{\succcurlyeq} t'$ не выполняется. Тогда существует такой индекс $k = k(t') \in N_n$, что $f_k(t, A_k) < f_k(t', A_k)$. Отсюда в силу леммы 1 и свойства 2 существует такое число $\varepsilon_2 > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \Xi(\varepsilon_2)$ и любой траектории t', рассматриваемой в этом случае, выполнено отношение $t \underset{A+B}{\overline{>}} t'$.

Резюмируя оба случая, заключаем

$$\exists\ \varepsilon > 0 \ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon) \ \ \forall\ t' \in T \ \ (t \underset{A+B}{\overline{>}} t'),$$

где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Эта формула свидетельствует о том, что t является слабо эффективной траекторией задачи $Z^n_{Sl}(A+B)$ при каждой матрице $B \in \Xi(\varepsilon)$, т. е. $t \in \mathrm{Ker}^n_{Sl}(A)$. Следовательно, $V^n(A) \subseteq \mathrm{Ker}^n_{Sl}(A)$.

Далее докажем включение $\mathrm{Ker}^n_{Sl}(A) \subseteq V^n(A)$. Для этого достаточно показать, что множество $Sl^n(A)\backslash V^n(A)$ не содержит устойчивых траекторий. Пусть $t \in Sl^n(A)\backslash V^n(A)$. Тогда согласно определению множества $V^n(A)$ существует такая траектория t^0, что

$$t \underset{A}{\succcurlyeq} t^0, \tag{3}$$

$$J_i(t, t^0) := N_i(t, A_i)\backslash N_i(t^0, A_i) \neq \varnothing \text{ при } i \in N_n.$$

Поэтому в силу свойства 4 и отношения (3) имеем

$$I(t, t^0) := \{i \in N_n \mid f_i(t, A_i) = f_i(t^0, A_i)\} \neq \varnothing, \tag{4}$$

$$f_i(t, A_i) > f_i(t^0, A_i),\ i \in N_n \setminus I(t, t^0). \tag{5}$$

Для каждого индекса $i \in I(t, t^0)$ зафиксируем число $p(i) \in J_i(t, t^0)$ и построим элементы возмущающей матрицы $B^0 = \left(b^0_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ по правилу

$$b^0_{ij} = \begin{cases} \delta & \text{при } i \in I(t, t^0),\ j = p(i), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \delta < \varepsilon$. Используя (4) и (5), убеждаемся в справедливости следующих соотношений:

$$f_i\big(t, A_i + B^0_i\big) = \max_{j \in t} \big\{a_{ij} + b^0_{ij}\big\} = a_{ip(i)} + \delta > a_{ip(i)}$$
$$= f_i(t, A_i) = f_i(t^0, A_i) = f_i\big(t^0, A_i + B^0_i\big),\ \ i \in I(t, t^0),$$

$$f_i\big(t, A_i + B^0_i\big) = f_i(t, A_i) > f_i(t^0, A_i) = f_i\big(t^0, A_i + B^0_i\big),\ \ i \in N_n \backslash I(t, t^0).$$

Итак, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая возмущающая матрица $B^0 \in \Xi(\varepsilon)$, что $t \notin Sl^n(A + B^0)$. Следовательно, $t \notin \mathrm{Ker}^n_{Sl}(A)$. Тем самым доказано включение $\mathrm{Ker}^n_{Sl}(A) \subseteq V^n(A)$. Теорема 3 доказана.

Непосредственно из теоремы 3 и определений множеств $Sm^n(A)$ и $V^n(A)$ вытекает

Следствие 3. $Sm^n(A) \subseteq \mathrm{Ker}^n_{Sl}(A)$.

Следующий пример свидетельствует о том, что указанное следствием 3 включение может быть строгим.

Пример 2. Пусть $n = 2$, $m = 3$, $T = \{t_1, t_2, t_3\}$, $t_1 = \{1\}$, $t_2 = \{1, 3\}$, $t_3 = \{2\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(t_1, A) = (3, 2),\ \ f(t_2, A) = (3, 2),\ \ f(t_3, A) = (1, 3),$$

$$Sl^2(A) = V^2(A) = T, \quad Sm^2(A) = \{t_3\}.$$

Поэтому $\mathrm{Ker}^2_{Sl}(A) = T$ в силу теоремы 3.

6. Ядро устойчивости задачи $Z^n_L(A)$ поиска лексикографического множества $L^n(A)$

Известно (см., например, [8, 11]), что лексикографическое множество $L^n(A)$, являясь подмножеством множества Парето $P^n(A)$, может быть

определено как результат решения последовательности n скалярных задач

$$L_i^n(A) = \operatorname{Arg\,min}\{f_i(t, A_i) \mid t \in L_{i-1}^n(A)\},\ i \in N_n,$$

где $L_0^n(A) = T$, $\operatorname{Arg\,min}\{\cdot\}$ — множество всех оптимальных траекторий соответствующей задачи минимизации. Таким образом, имеем последовательность множеств

$$T \supseteq L_1^n(A) \supseteq L_2^n(A) \supseteq \ldots \supseteq L_n^n(A) = L^n(A). \tag{6}$$

Введём множество

$$W^n(A) = \{t \in L^n(A) \mid \forall\ i \in N_n\ \ \forall\ t' \in L_i^n(A)\ \ (N_i(t, A_i) \subseteq N_i(t', A_i))\}.$$

Теорема 4. $\operatorname{Ker}_L^n(A) = W^n(A)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $W^n(A) \subseteq \operatorname{Ker}_L^n(A)$. Пусть $t \in W^n(A)$ и $t' \in T$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $t' \in T \setminus L_1^n(A)$. Тогда имеет место неравенство

$$f_1(t, A_1) < f_1(t', A_1).$$

Поэтому ввиду непрерывности функции $f_1(t, A_1)$ на множестве параметров из $\mathbb{R}^m$ существует такое число $\varepsilon(t') > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \Xi(\varepsilon(t'))$ выполняется неравенство

$$f_1(t, A_1 + B_1) < f_1(t', A_1 + B_1).$$

Отсюда получаем формулу

$$\exists\ \varepsilon_1 > 0\ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon_1)\ \ \forall\ t' \in T \setminus L_1^n(A)\ \ (t \underset{A+B}{\models} t'), \tag{7}$$

где $\varepsilon_1 = \min\bigl\{\varepsilon(t') \mid t' \in T \setminus L_1^n(A)\bigr\}$.

Случай 2. $t' \in L_1^n(A)$. Возможны два варианта.

2.1. $t' \in L^n(A)$. Тогда $t' \in L_i^n(A)$ при любом $i \in N_n$. Поэтому ввиду $t \in W^n(A)$ имеем

$$N_i(t, A_i) \subseteq N_i(t', A_i),\ i \in N_n.$$

Отсюда в силу леммы 2 выводим

$$\forall\ i \in N_n\ \ \exists\ \varepsilon_2(t', i) > 0\ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon_2(t', i))\ \ (f_i(t, A_i + B_i) \leqslant f_i(t', A_i + B_i)).$$

Это значит, что для всякой траектории $t' \in L^n(A)$ существует число $\varepsilon_2(t') > 0$ с условием

$$f(t, A+B) \leqslant f(t', A+B) \text{ при } B \in \Xi(\varepsilon_2(t')).$$

Следовательно, справедлива формула

$$\exists\ \varepsilon_2 > 0 \ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon_2) \ \ \forall\ t' \in L^n(A) \ \ (t \underset{A+B}{\overline{\vDash}} t'), \tag{8}$$

где $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_2(t') \mid t' \in L^n(A)\}$.

2.2. $t' \in L_1^n(A) \setminus L^n(A)$. Тогда существует индекс $k = k(t') \in N_n \setminus \{1\}$ такой, что $t' \notin L_k^n(A)$ и $t' \in L_i^n(A)$ для любого индекса $i \in N_{k-1}$. Поэтому, учитывая включение $t \in W^n(A)$, имеем

$$N_i(t, A_i) \subseteq N_i(t', A_i), \ i \in N_{k-1},$$

$$f_k(t, A_k) < f_k(t', A_k).$$

Пользуясь этими фактами, леммой 2 и непрерывностью функции $f_k(t,\, A_k)$ на $\mathbb{R}^m$, получаем формулы

$$\exists\ \varepsilon'(t') > 0 \ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon'(t')) \ \ \forall\ i \in N_{k-1} \ \ (f_i(t, A_i + B_i) \leqslant f_i(t', A_i + B_i)),$$

$$\exists\ \varepsilon''(t') > 0 \ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon''(t')) \ \ (f_k(t, A_k + B_k) < f_k(t', A_k + B_k)).$$

Следовательно,

$$\exists\ \varepsilon_3 > 0 \ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon_3) \ \ \forall\ t' \in L_1^n(A) \setminus L^n(A) \ \ (t \underset{A+B}{\overline{\vDash}} t'), \tag{9}$$

где

$$\varepsilon_3 = \min\left\{\varepsilon_3(t') \mid t' \in L_1^n(A) \setminus L^n(A)\right\},$$

$$\varepsilon_3(t') = \min\{\varepsilon'(t'), \varepsilon''(t')\}.$$

Резюмируя всё сказанное выше, т. е. формулы (7)–(9), получаем

$$\exists\ \varepsilon > 0 \ \ \forall\ B \in \Xi(\varepsilon) \ \ \forall\ t' \in T \ \ (t \underset{A+B}{\overline{\vDash}} t'),$$

где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Отсюда следует, что $t \in L^n(A+B)$ при $B \in \Xi(\varepsilon)$. Поэтому $t \in \mathrm{Ker}_L^n(A)$, т. е. доказано включение $W^n(A) \subseteq \mathrm{Ker}_L^n(A)$.

Для завершения доказательства теоремы 4 достаточно показать, что никакая траектория множества $L^n(A) \backslash W^n(A)$ не является устойчивой.

Пусть $t \in L^n(A) \backslash W^n(A)$. Тогда существуют индекс $k \in N_n$ и траектория $t^0 \in L^n_k(A)$ с условиями

$$J_k(t, t^0) := N_k(t, A_k) \setminus N_k(t^0, A_k) \neq \varnothing,$$

$$f_k(t, A_k) = f_k(t^0, A_k).$$

Отсюда, положив $\varepsilon > 0$, выбрав произвольный индекс $p \in J_k(t, t^0)$ и построив элементы возмущающей матрицы $B^0 = \big(b^0_{ij}\big) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ по правилу:

$$b^0_{ij} = \begin{cases} \delta & \text{при } i = k,\ j = p, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \delta < \varepsilon$, убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} f_k\big(t, A_k + B^0_k\big) &= \max_{j \in t} \big\{a_{kj} + b^0_{kj}\big\} = a_{kp} + \delta \\ &> a_{kp} = f_k(t, A_k) = f_k(t^0, A_k) = f_k\big(t^0, A_k + B^0_k\big). \end{aligned}$$

Поэтому ввиду очевидного включения $t^0 \in L^n_k(A + B^0)$ имеем

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ B^0 \in \Xi(\varepsilon) \ \ \big(t \notin L^n_k(A + B^0)\big),$$

а потому согласно (6) $t \notin L^n(A+B^0)$, т. е. $t \notin \mathrm{Ker}^n_L(A)$. Этим завершается доказательство теоремы 4.

Следствие 4. *Если* $|L^n_1(A)| = 1$, *то* $\mathrm{Ker}^n_L(A) = L^n(A)$.

Покажем на примере, что ядро устойчивости задачи может совпадать с лексикографическим множеством не только в случае, указанном следствием 4.

Пример 3. Пусть $n = 2$, $m = 3$, $T = \{t_1, t_2\}$, $t_1 = \{1, 2\}$, $t_2 = \{1, 3\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(t_1, A) = (2, 1), \ \ f(t_2, A) = (2, 3), \ \ L^2_1(A) = T,$$

$$L^2(A) = W^2(A) = \{t_1\}.$$

Поэтому, учитывая теорему 4, имеем $\mathrm{Ker}^2_L(A) = L^2(A)$, но $|L^2_1(A)| > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гордеев Э. Н.** Об устойчивости задач на узкие места // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1993. — Т. 33, № 9. — С. 1391–1402.
2. **Емеличев В. А., Никулин Ю. В.** О ядре устойчивости векторной квадратичной задачи булева программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 2. — С. 83–90.
3. **Ефимчик Н. Е., Подкопаев Д. П.** О ядре и радиусе устойчивости в траекторной задаче векторной дискретной оптимизации // Вестник Белорусск. гос. ун-та. Сер. 1. — 1996. — № 1. — С. 48–52.
4. **Козерацкая Л. Н.** Множество строго эффективных точек задачи частично целочисленной векторной оптимизации как характеристика ее устойчивости // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 6. — С. 181–184.
5. **Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И.** Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.
6. **Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.** Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 1. — С. 63–70.
7. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
8. **Сергиенко И. В.** Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев: Наукова думка, 1988. — 472 с.
9. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. — Киев: Наукова думка, 1995. — 170 с.
10. **Сергиенко И. В., Шило В. П.** Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. — Киев: Наукова думка, 2003. — 261 с.
11. **Ehrgott M.** Multicriteria optimization. Second edition. — Berlin-Heidelberg: Springer, 2005. — 323 p.
12. **Emelichev V. A., Kuzmin K. G., Leonovich A. M.** On quasistability of a vector combinatorial problem with $\sum$–MINMAX and $\sum$–MINMIN partial criteria // Comput. Sci. J. Moldova. — 2004. — V. 12, N 1. — P. 3–24.
13. **Libura M., Nikulin Y.** Stability and accuracy functions in multicriteria combinatorial optimization problem with $\sum$–MINMAX and $\sum$–MINMIN partial criteria // Control and Cybernetics. — 2004. — V. 33, N 3. — P. 511–524.

14. **Smale S.** Global analysis and economics. V: Pareto theory with constraints // J. Math. Economics. — 1974. — V. 1, N 3. — P. 213–221.
15. **Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N.** Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. — 1995. — V. 58, N 2. — P. 169–190.
16. **Tanino T., Sawaragi Y.** Stability of nondominated solutions in multicriteria decision-making // J. Optimization Theory Appl. — 1980. — V. 30, N 2. — P. 229–253.

Емеличев Владимир Алексеевич,
e-mail: emelichev@bsu.by

Гуревский Евгений Евгеньевич

Статья поступила
1 февраля 2008 г.