ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2008. Том 15, № 5. С. 35–46

УДК 519.174

# О СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСКАХ ПОЛОВИННОГО 24-КУБА*)

*Д. С. Кротов*

**Аннотация.** Раскраска вершин графа называется *совершенной с параметрами* $(a_{ij})_{i,j=1}^{k}$, если для всех $i$ и $j$ от 1 до $k$ каждая вершина цвета $i$ смежна ровно с $a_{ij}$ вершинами цвета $j$. Рассматриваются совершенные раскраски в два цвета графа расстояний 2 гиперкуба $\{0,1\}^{24}$ с параметрами $((20+c, 256-c)(c, 276-c))$ (т. е. с собственным значением 20). Доказано, что такие раскраски существуют при всех $c$ от 1 до 128, кроме 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13, и не существуют при $c = 1, 2, 4, 5, 7$.

**Ключевые слова:** совершенная раскраска, половинчатый гиперкуб.

## Введение

Мы изучаем раскраски в два цвета вершин графа расстояний 2 24-мерного гиперкуба, являющиеся совершенными раскрасками с собственным числом 20. Интерес именно к этим параметрам обусловлен следующими причинами.

Во-первых, известен вопрос существования совершенных раскрасок гиперкуба (т. е. его графа расстояний 1) размерности 24 с параметрами $((1,23)(9,15))$, $((2,22)(10,14))$, $((3,21)(11,13))$, $((5,19)(13,11))$, $((7,17)(15,9))$ (согласно [1–3] вопрос существования совершенных раскрасок $n$-куба с фиксированными параметрами полностью исследован для $n < 24$). Раскраски с этими параметрами соответствовали бы раскраскам графа расстояний 2 с параметрами из исследуемого класса (подробнее о связи параметров раскрасок графов расстояний 1 и 2 см. разд. 1).

Во-вторых, интересен факт, что, комбинируя две совершенно разнородные конструкции, удаётся покрыть большой спектр из 121 набора параметров.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00673).

Пусть $G$ — простой граф, $I$ — конечное множество, элементы которого будем называть *цветами.* Отображение $T : V(G) \to I$ называется *совершенной раскраской* с матрицей параметров $(s_{ij})_{i,j \in I}$, если оно сюръективно и для каждых $i$, $j$ у каждой вершины цвета $i$ число соседей цвета $j$ равно $s_{ij}$.

Через $H_n$ обозначим гиперкуб размерности $n$ (вершины *гиперкуба*, или *$n$-куба*, — двоичные слова длины $n$; два слова *смежны*, если и только если они различаются ровно в одной позиции; *расстояние* между двумя словами есть число позиций, в которых слова различны). Граф расстояний 2 гиперкуба $H_n$ будем обозначать через $\overline{H}_n$ (два слова *смежны*, если и только если они различаются ровно в двух позициях), его степень равна $n(n-1)/2$. Поскольку этот граф состоит из двух компонент связности (обозначим их $\overline{H}_n^{\mathrm{even}}$ и $\overline{H}_n^{\mathrm{odd}}$), известных как *половинные* (halved) *$n$-кубы*, с точки зрения совершенных раскрасок достаточно рассматривать одну из компонент.

Как правило, мы будем рассматривать раскраски в два цвета, или 2-*раскраски*; матрицу параметров будем записывать в виде $((a, b)(c, d))$. Заметим, что, нужным образом упорядочив цвета, всегда можно добиться $b \geqslant c$. Если граф регулярный степени $s$, необходимым условием существования совершенной раскраски с параметрами $((a, b)(c, d))$ является $a + b = c + d = s$. Таким образом, степень графа является собственным числом матрицы параметров. Вторым собственным числом матрицы является $a-c = d-b$, это значение будем считать *собственным числом* совершенной раскраски и её параметров. Часто удобно считать 2-раскраску характеристической функцией некоторого множества, в этом случае первым цветом договоримся считать 1, вторым — 0.

В данной работе исследуются возможные параметры совершенных раскрасок в два цвета графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$ с собственным числом 20, т. е. параметры вида $((20+c, 256-c)(c, 276-c))$. Результатом являются следующие два утверждения.

**Теорема 1.** *Совершенные раскраски графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$ с параметрами вида $((20+c, 256-c)(c, 276-c))$ существуют при $c = 3$, 6, 8, 9, 11, 12 и всех $c$ от* 14 *до* 128.

**Теорема 2.** *Не существует совершенных раскрасок графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$ с параметрами вида $((20 + c, 256 - c)(c, 276 - c))$ при $c$ равном* 1, 2, 4, 5 *или* 7.

Значения 10 и 13 остаются под вопросом, однако доказанное уже позволяет отметить разрывы в спектре допустимых значений. Теоремы 1 и 2

доказаны в разд. 3 и 4. В разд. 1 показано, что совершенная раскраска графа $H_n$ является совершенной раскраской графа $\overline{H}_n$, и установлена связь параметров этих раскрасок. В разд. 2 указано на возможность комбинирования 2-раскрасок (произвольного графа) с одинаковым собственным числом при условии непересекаемости носителей одного из цветов.

## 1. Связь совершенных раскрасок графов $H_n$ и $\overline{H}_n$

**Лемма 1.** *Совершенная раскраска с матрицей $S$ графа $H_n$ является совершенной раскраской с матрицей $(S^2 - nE)/2$ графа $\overline{H}_n$ на том же множестве вершин ($E$ — единичная матрица).*

Доказательство. Рассмотрим совершенную раскраску $T$ графа $H_n$ с матрицей параметров $S$. *Цветовым составом* $T(M)$ множества вершин $M$ графа $H_n$ назовём набор из $|I|$ чисел, каждое из которых обозначает число вершин соответствующего цвета в множестве $M$. Для произвольной вершины $v$ графа $H_n$ цветовой состав множества $\{v\}$ состоит из нулей во всех позициях кроме $T(v)$, где стоит единица. Обозначим через $D_1(v)$ и $D_2(v)$ множество вершин на расстоянии 1 и 2 от $v$ соответственно. По определению совершенной раскраски имеем $T(D_1(v)) = ST(\{v\})$. Просуммировав эту формулу по окрестности $D_1(w)$ некоторой фиксированной вершины $w$, получим

$$\sum_{v\in D_1(w)} \sum_{u\in D_1(v)} T(u) = \sum_{v\in D_1(w)} T(D_1(v)) = \sum_{v\in D_1(w)} ST(\{v\})$$
$$= S \sum_{v\in D_1(w)} T(\{v\}) = S^2 T(\{w\}).$$

С другой стороны, в сумме слева индекс $u$ дважды пробегает вершины $D_2(w)$ и $n$ раз — саму вершину $w$. Таким образом, эта сумма равна также $nT(w) + 2T(D_2(w))$, откуда

$$T(D_2(w)) = (S^2 T(\{w\}) - nT(\{w\}))/2,$$

что и требовалось доказать. Лемма 1 доказана.

Отметим, что может оказаться так, что в каждой компоненте связности графа $\overline{H}_n$ будут встречаться не все цвета, т. е. граф $\overline{H}_n^{\mathrm{even}}$ (как и $\overline{H}_n^{\mathrm{odd}}$) будет раскрашен в меньшее число цветов (см., например, лемму 3).

В табл. 1 приведены все возможные параметры совершенных раскрасок в два цвета графа $H_{24}$, которые соответствуют совершенным раскраскам $\overline{H}_{24}$ с собственным числом $\lambda = 20$ ($20 = \frac{8^2-24}{2} = \frac{(-8)^2-24}{2}$). Про

существование раскрасок с параметрами, затенёнными чёрным жирным цветом, в настоящее время ничего не известно, раскраски с остальными параметрами существуют [1, 2].

Т а б л и ц а 1

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $H_{24}$<br>$\lambda=-8$ | | | | 0 24<br>8 16 | **1 23**<br>**9 15** | **2 22**<br>**10 14** | **3 21**<br>**11 13** | 4 20<br>12 12 | **5 19**<br>**13 11** | 6 18<br>14 10 | **7 17**<br>**15 9** | 8 16<br>16 8 |
| $H_{24}$<br>$\lambda=8$ | 9 15<br>1 23 | 10 14<br>2 22 | 11 13<br>3 21 | 12 12<br>4 20 | | 13 11<br>5 19 | | 14 10<br>6 18 | | 15 9<br>7 17 | | 16 8<br>8 16 |
| $\overline{H}_{24}$<br>$\lambda=20$ | 36 240<br>16 260 | 52 224<br>32 244 | 68 208<br>48 228 | 84 192<br>64 212 | 92 184<br>72 204 | 100 176<br>80 196 | 108 168<br>88 188 | 116 160<br>96 180 | 124 152<br>104 172 | 132 144<br>112 164 | 140 136<br>120 156 | 148 128<br>128 148 |

## 2. Объединение цветов двух раскрасок с общим собственным числом

Следующая лемма, вытекающая непосредственно из определений, позволяет объединять непересекающиеся носители цветов различных раскрасок с одинаковым собственным числом.

**Лемма 2.** *Пусть $C_1$ и $C_2$ — два непересекающихся подмножества множества вершин $V(G)$ простого регулярного графа $G$, причём*

$$C_1 \cup C_2 \neq V(G).$$

*Предположим, что характеристические функции $\chi_{C_1}$ и $\chi_{C_2}$ множеств $C_1$ и $C_2$ являются совершенными раскрасками $G$ с одинаковым собственным числом $\lambda$, т. е. с параметрами вида $(\lambda+i, s-\lambda-i; i, s-i)$ и $(\lambda+j, s-\lambda-j; j, s-j)$, где $s$ — степень графа. Тогда характеристическая функция $\chi_{C_1\cup C_2}$ объединения является совершенной раскраской $G$ с параметрами $(\lambda+i+j, s-\lambda-i-j; i+j, s-i-j)$.*

## 3. Коды и раскраски. Доказательство теоремы 1

В этом разделе мы построим класс совершенных раскрасок графа $\overline{H}_{24}^{\rm odd}$ с параметрами, анонсированными в теореме 1. Носитель первого цвета будет строиться как объединение смежных классов одного линейного кода и окрестностей смежных классов кода Голея.

Множество двоичных слов длины $n$ (т. е. $V(H_n)$) будем обозначать через $E^n$ и рассматривать как $n$-мерное векторное пространство над полем из двух элементов, с вычислениями по модулю 2. Под *расстоянием* $\rho(\cdot,\cdot)$ между двумя словами будем, как обычно, подразумевать число позиций, в которых эти два слова различны (что совпадает с естественной

метрикой в графе $H_n$). Напомним, что $(n, M, d)$-*кодом* называется множество из $M$ вершин $H_n$ такое, что расстояние между любыми двумя различными вершинами не меньше $d$. *Окрестностью* $\Omega(C)$ некоторого множества $C$ будем считать множество слов на расстоянии 1 от $C$.

Пусть $C_8$ и $C_8'$ — два $(8, 16, 4)$-кода таких, что

$$C_8 \cap C_8' = \{00000000, 11111111\}$$

(для определённости $C_8$ и $C_8'$ можно определить как содержащие 00101110 и 01001110 соответственно и замкнутые относительно сложения и циклической перестановки первых семи координат). Определим код

$$F = \{(x + y, x + z, x + y + z) \mid x \in C_8,\ y, z \in C_8'\}. \tag{1}$$

*Дистанционной раскраской* кода $C$ назовём функцию, сопоставляющую каждой вершине из $H_n$ расстояние от неё до $C$.

**Лемма 3.** *Дистанционная раскраска кода $F$ является совершенной раскраской графов $H_{24}$ и $\overline{H}_{24}$ с матрицами соответственно*

$$\begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 276 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 & 253 & 0 \\ 1 & 0 & 44 & 0 & 231 \\ 0 & 3 & 0 & 273 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 & 240 \end{pmatrix}.$$

*В частности, порождённая раскраска графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{odd}}$ есть 2-раскраска с параметрами* $((23, 253)(3, 273))$.

Доказательство. Известно [4, 18.7.4], что (1) задаёт расширенный совершенный $(24, 2^{12}, 8)$-код, известный как код Голея. Это означает, что расстояние от любой вершины до кода не больше четырёх. Кроме того, вершины с чётным числом единиц (из $V\big(\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}\big)$) имеют цвета 0, 2, 4, а с нечётным (из $V\big(\overline{H}_{24}^{\mathrm{odd}}\big)$) — цвета 1, 3. Таким образом, вершина цвета 4 смежна в $H_{24}$ с 24 вершинами цвета 3; вершина цвета 3 смежна только с вершинами цветов 2 и 4, причём смежных вершин цвета 2 ровно 3, поскольку на расстоянии 3 от данной находится только одна кодовая вершина; аналогично проверяются другие цвета. Параметры раскраски графа $\overline{H}_{24}$ следуют из леммы 1. Лемма 3 доказана.

Таким образом, $\chi_{\Omega(F)}$ — первая совершенная 2-раскраска из серии, описанной теоремой 1. Взяв непересекающиеся сдвиги $\Omega(F)$ и воспользо-

вавшись леммой 2, мы можем строить раскраски с другими параметрами. Для этого нам нужно набрать как можно больше смежных классов по $F$ на расстоянии не менее 4 друг от друга. Рассмотрим множество

$$D = \{(x+y, x+z, x+y+z) \mid x \in C_8, y, z \in B_8\},$$

где $B$ — $(8, 128, 2)$-код, содержащий 00000000 и, следовательно, включающий $C_8'$ ($C_8$ и $C_8'$ вводились перед определением кода $F$ (1)).

**Лемма 4.** *Множество $D$ является $(24, 2^{18}, 4)$-кодом.*

Доказательство. Для начала отметим три простых неравенства

$$\rho((u,v,w),(u',v',w')) \geqslant \rho(u+v+w, u'+v'+w'), \qquad (2)$$
$$\rho((u,v,w),(u',v',w')) \geqslant \rho(u,u') + \rho(v+w, v'+w'), \qquad (3)$$
$$\rho((u,v,w),(u',v',w')) \geqslant \rho(v,v') + \rho(u+w, u'+w'). \qquad (4)$$

Рассмотрим слова

$$r = (x+y, x+z, x+y+z) \text{ и } r' = (x'+y', x'+z', x'+y'+z'),$$

где $x, x' \in C_8$, $y, y', z, z' \in B_8$. Если $x \neq x'$, то, воспользовавшись (2) и расстоянием 4 кода $C_8$, получаем

$$\rho(r, r') \geqslant \rho(x, x') \geqslant 4.$$

Если $x = x'$ и $y \neq y'$, то из (3) имеем

$$\rho(r, r') \geqslant \rho(x+y, x'+y') + \rho(y, y') = 2\rho(y, y') \geqslant 4.$$

Случай $x = x'$, $z \neq z'$ аналогичен. Таким образом, при разных выборах $x$, $y$ и $z$ мы будем получать разные слова с попарным расстоянием не менее 4 друг от друга. Число всех таких слов равно $|C_8| \cdot |B_8|^2 = 2^{18}$. Лемма 4 доказана.

Поскольку $F$ и $D$ — линейные подпространства и, очевидно, $F \subset D$, можно разбить $D$ на 64 смежных класса по $F$. Обозначим их $F_1, F_2, \ldots, F_{64}$. Из леммы 4 следует, что окрестности этих смежных классов не пересекаются, и, воспользовавшись леммой 2, можно строить совершенные раскраски графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{odd}}$ с параметрами вида $((20+3i, 256-3i)(3i, 276-3i))$, $i = 1, \ldots, 64$. Чтобы накрыть больший спектр параметров, нам понадобится ещё один код:

$$L = \{(x, y, y+z) \mid x, y \in B, z \in C_1\}.$$

**Лемма 5.** *Характеристическая функция $\chi_L$ является совершенной раскраской графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$ с параметрами* $((28,248)(8,268))$.

Доказательство. Представим $L$ в виде

$$L = \{(x,w) \mid x \in B, w \in C_{16}\},$$

где $C_{16} = \{(y, y+z) | y \in B, z \in C_1\}$ есть $(16, 2^{11}, 4)$-код.

1. Рассмотрим кодовую вершину $(x,w)$ из $C_{16}$. Слова кода $C_{16}$, смежные вершине $(x,w)$ в $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$, имеют вид $(x+e, w)$, где $e$ — произвольное слово с двумя единицами. Поскольку таких слов $e$ ровно 28, каждая кодовая вершина смежна с 28 кодовыми и, следовательно, с 248 некодовыми.

2. Рассмотрим некодовую вершину $(x,w)$ графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$. Если $x \notin B$, то кодовые вершины графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$, смежные вершине $(x,w)$, имеют вид $(x+e, w+e')$, где слова $e$ и $e'$ содержат по одной единице ровно. Слово $e$ можно выбрать восемью способами, а $e'$ — не более чем одним (иначе в $C_{16}$ найдутся два слова на расстоянии 2 друг от друга). Таким образом, число кодовых вершин, смежных $(x,w)$, не превосходит 8. Если $x \in B$, то $w \notin C_{16}$, и кодовые вершины, смежные вершине $(x,w)$, имеют вид $(x, w+e'')$, где $e''$ содержит ровно две единицы. Число способов выбора $e''$ — не более 8 (иначе в $C_{16}$ найдутся два слова на расстоянии 2 друг от друга). Таким образом, каждая некодовая вершина смежна не более чем с 8 кодовыми. С другой стороны, как следует из п. 1, число рёбер, соединяющих кодовые и некодовые вершины, равно $2^{18} \cdot 248$ (где $2^{18}$ — число всех кодовых вершин), что совпадает с $(2^{23} - 2^{18}) \cdot 8$, где $2^{23} - 2^{18}$ — число всех некодовых вершин графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$. Получается, что каждая некодовая вершина смежна ровно с 8 кодовыми и, следовательно, с 268 некодовыми. Лемма 5 доказана.

Рассмотрим множество

$$N = \{(x + 00000001, y + 00000001, z + 00000001) \mid x, y, z \in B\} \subset \overline{H}_{24}^{\mathrm{odd}}$$

и разобьём его на 8 смежных классов $L_1, \ldots, L_8$ по $L$. Поскольку расстояние от $D$ до $N$ равно 3, все множества

$$\Omega(F_1),\ \Omega(F_2),\ \ldots,\ \Omega(F_{64}),\ L_1,\ \ldots,\ L_8$$

попарно не пересекаются и, применяя лемму 2, получаем следующую лемму.

**Лемма 6.** *Для любых $i \in \{0,1,\ldots,64\}$, $j \in \{0,1,\ldots,8\}$, $0 < i + j < 72$, характеристическая функция объединения $i$ множеств из $\Omega(F_1)$, $\Omega(F_2), \ldots, \Omega(F_{64})$ и $j$ множеств из $L_1, \ldots, L_8$ есть совершенная раскраска с параметрами* $((20+3i+8j, 256-3i-8j)(3i+8j, 276-3i-8j))$.

Поскольку в виде $3i+8j$ могут быть представлены все числа от 3 до 128, кроме 4, 5, 7, 10, 13, теорема 1 доказана.

## 4. Доказательство теоремы 2. Несуществование

В этом разделе мы докажем несуществование совершенных раскрасок с параметрами $((20+c, 256-c)(c, 276-c))$ при $c = 1, 2, 4, 5, 7$. Множество $S \subset V\bigl(\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}\bigr)$ назовём *сферой*, если оно состоит из всех 24 вершин на расстоянии один от некоторой вершины (*центра* сферы) из $V\bigl(\overline{H}_{24}^{\mathrm{odd}}\bigr)$.

В доказательстве следующей леммы будем обозначать двоичные слова длины 24 в виде $U_{24}$, где $U$ — множество ненулевых позиций слова.

**Лемма 7.** *Предположим, что характеристическая функция $\chi_C$ множества $C \subset V\bigl(\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}\bigr)$ является совершенной раскраской графа $\overline{H}_{24}^{\mathrm{even}}$ с параметрами $((20+c, 256-c)(c, 276-c))$. Если $c \leqslant 7$, то $C$ — объединение сфер.*

Доказательство. Мы рассмотрим только два случая $((25, 251)(5, 271))$ и $((27, 249)(7, 269))$, поскольку остальные доказываются аналогично.

В первом случае $c = 5$. Возьмём произвольную вершину $v$ из $C$ и покажем, что она принадлежит некоторой сфере, полностью содержащейся в $C$. Без потери общности будем считать, что

$$v = 000000000000000000000000.$$

Пару координат $\{i, j\}$ от 1 до 24 назовём *кодовой*, если $\{i, j\}_{24} \in C$. Из параметров совершенной раскраски следует, что кодовых пар ровно 25. Кроме того, поскольку $c = 5$,

(*) некодовая пара может пересекаться не более чем с четырьмя кодовыми (пятым соседом является вершина $v$).

Рассмотрим случаи.

1. Если в некоторой $i$-й координате пересекаются 23 кодовые пары, то соответствующие слова вместе с $v$ образуют сферу, что доказывает утверждение.

2. Если в некоторой $i$-й координате пересекаются от 5 до 23 кодовых пар, то $i$ содержится в некоторой некодовой паре, что противоречит (*).

3. Если в некоторой $i$-й координате пересекаются ровно 4 кодовые пары, то найдётся кодовая пара $\{j, k\}$, не пересекающаяся ни с одной из них. Тогда некодовая пара $\{i, j\}$ противоречит (*).

4. Пусть ни в одной координате не пересекаются 4 или более кодовых пар. Поскольку кодовых пар больше чем 24, найдётся координата $i$, в

которой пересекаются 3 кодовые пары $\{i, j_1\}$, $\{i, j_2\}$, $\{i, j_3\}$. Легко посчитать, что среди оставшихся 20 координат найдётся такая $j$, в которой пересекаются минимум две кодовые пары. Тогда пара $\{i, j\}$ противоречит (*).

Для случая $c = 5$ утверждение леммы доказано.

Рассмотрим случай $((27, 249)(7, 269))$, т. е. $c = 7$. В целом смысл доказательства похож на предыдущий рассмотренный случай, только теперь мы рассматриваем не одну, а две соседних вершины первого цвета и показываем, что при любом способе раскраски окрестности этих двух вершин выполнение условия $a = 27$ влечёт противоречие с условием $c = 7$ (предположив от противного, что $C$ не является объединением сфер).

Через $C'$ обозначим объединение сфер, полностью содержащихся в $C$, а через $C''$ — его дополнение до $C$. Нам нужно доказать, что $C''$ — пустое множество. Предположим противное. Обозначим через $k$ максимальную мощность пересечения кода $C$ и сферы, содержащей хотя бы одну вершину из $C''$. Поскольку такая сфера обязана содержать вершину не из $C$, имеем

$$k \leqslant c = 7. \tag{5}$$

Без потери общности можем считать, что

$$\bar{0} = 000000000000000000000000 \in C''$$

и $\{1, 2\}_{24}, \{1, 3\}_{24}, \ldots, \{1, k\}_{24} \in C$.

Из слов кода $C$, принадлежащих окрестности $\bar{0}$ или $\{1, 2\}_{24}$, как из строк составим три матрицы. Строки матрицы $A_1$ суть векторы веса 2, отличные от $\{1, 2\}_{24}$ и не лежащие в окрестности $\{1, 2\}_{24}$. Векторы веса 2 (4), принадлежащие окрестности $\{1, 2\}_{24}$, составляют матрицу $A_2$ (соответственно $A_3$). Сами векторы $\bar{0}$ и $\{1, 2\}_{24}$ не включены ни в одну матрицу. Матрицы $A_1$ и $A_2$ (как и $A_2$, $A_3$) состоят в совокупности из $a-1 = 26$ строк, которые вместе с $\{1, 2\}_{24}$ (соответственно с $\bar{0}$) составляют пересечение $C$ и окрестности $\bar{0}$ (соответственно $\{1, 2\}_{24}$). Обозначив высоту матрицы $A_i$ через $h_i$, имеем $h_1+h_2 = h_2+h_3 = 26$. Кроме того, из определения $k$ имеем $h_2 \leqslant 2k-4$, поскольку строки $A_2$ имеют вид $\{1, j\}_{24}$ (не более $k-2$, поскольку вместе с $\bar{0}$ и $\{1, 2\}_{24}$ принадлежат одной сфере) или $\{2, j\}_{24}$ (аналогично).

Так как строки $A_1$ и $A_2$ содержат по две единицы, число единиц в этих двух матрицах равно 52. Значит, в каком-то из столбцов содержится (суммарно в двух матрицах) не менее трёх единиц, что по определению $k$ означает

$$k \geqslant 4. \tag{6}$$

Строки $A_3$ содержат по четыре единицы, значит, в совокупности в трёх матрицах имеем

$$2h_1 + 2h_2 + 4h_3 = 2 \cdot 26 + 2(26 - h_2) + 2h_3 \geqslant 104 - 2(2k-4) + 2h_3 \\ = 112 - 4k + 2h_3 \quad (7)$$

единиц ($2h_3$ единиц в первых двух столбцах $A_3$ выделяем отдельно, чтобы потом сократить).

Оценим это число с другой стороны. Назовём столбцы с номерами не больше (больше) $k$ левой (соответственно правой) частью матрицы.

(a) *Левая часть матрицы $A_1$ содержит не более $(k-2)(k-1)$ единиц.* Действительно, первые два столбца этой матрицы нулевые, а каждый из оставшихся содержит не более $k-1$ единиц по определению $k$.

(b) *Левая часть матрицы $A_2$ содержит не более $4(k-2)$ единиц.* Это следует из уже рассмотренного состава матрицы.

(c) *Правые части всех трёх матриц содержат в совокупности не более $(24-k)(7-k)$ единиц.* Действительно, если в $j$-м столбце, $j > k$, матрицы $A_1$, $A_2$, $A_3$ содержат больше чем $(7-k)$ единиц, то слово $\{1,j\}_{24} \notin C$ имеет более 7 соседей из $C$ (соответствующие строки плюс $\bar{0}$, $\{1,2\}_{24}$, $\{1,3\}_{24}$, ..., $\{1,k\}_{24}$), что противоречит параметру $c = 7$.

Далее рассмотрим отдельно два случая:

I. $\{1,2\}_{24} \in C''$. В этом случае имеем также следующее.

(d) *Левая часть матрицы $A_3$ содержит не более $2h_3 + (k-2)(k-1)$ единиц.* (Аналогично (a), только первые два столбца состоят из единиц.)

Итого, оценив суммарное число единиц в $A_1$, $A_2$, $A_3$ согласно (a)–(d) и учитывая (7), имеем

$$112-4k+2h_3 \leqslant (k-2)(k-1)+4(k-2)+2h_3+(k-2)(k-1)+(24-k)(7-k),$$

т. е. $3k^2 - 29k + 52 \geqslant 0$, что неверно при значениях $k = 4,5,6,7$, удовлетворяющих (5) и (6). Получили противоречие.

II. $\{1,2\}_{24} \in C'$. Тогда $C$ включает в себя сферу с центром $\{1,2,j\}_{24}$ для некоторого $j$. Следовательно, матрица $A_3$ содержит все строки вида $\{1,2,j,i\}_{24}$, $i \in \{3,\ldots,24\} \setminus \{j\}$, и как следствие каждый столбец $A_3$ содержит не менее одной единицы. Учитывая (c), получаем

(e) *Правые части $A_1$ и $A_2$ содержат в совокупности не более $(24-k)(6-k)$ единиц.*

Как мы уже отмечали, число единиц в матрицах $A_1$ и $A_2$ равно 52. С другой стороны, как следует из (a), (b) и (e), оно не превосходит

$$(k-2)(k-1) + 4(k-2) + (24-k)(6-k) = 2k^2 - 29k + 138,$$

т. е. получаем $2k^2 - 29k + 86 \geqslant 0$, что не верно для $5 \leqslant k \leqslant 7$, но справедливо при $k = 4$.

Этот последний оставшийся подслучай рассмотрим отдельно. Имеем $\{1,2\}_{24}$, $\{1,3\}_{24}$, $\{1,4\}_{24} \in C$, причём $\{1,2\}_{24}$ принадлежит некоторой сфере, полностью лежащей в $C$. Центр этой сферы имеет вид $\{1,2,j\}_{24}$ (он не может содержать одну единицу, поскольку $\bar{0} \in C''$). Поскольку тогда $\{1,j\}_{24} \in C$, $j$ равно 3 или 4. Рассмотрим случай $j = 3$ (второй аналогичен). Покажем, что

(**) $\{1,4\}_{24} \in C''$.

Пусть, от противного, вершина $\{1,4\}_{24}$ принадлежит некоторой сфере, полностью лежащей в $C$. Аналогично уже рассмотренному случаю с вершиной $\{1,2\}_{24}$, центр этой сферы обязан иметь вид $\{1,j,4\}_{24}$, где $j$ равно 2 или 3. Но тогда сферы с центрами $\{1,2,3\}_{24}$ и $\{1,j,4\}_{24}$ пересекаются. Точка пересечения принадлежит $C$ и имеет не менее 45 соседей из $C$ ($1+45$ есть мощность объединения двух сфер), что противоречит параметру $a = 27$. Утверждение (**) доказано.

Теперь, поменяв местами вторую и четвёртую координаты, мы приходим к уже рассмотренному случаю I. Лемма 7 доказана.

**Лемма 8.** *Пусть* $C \subset V\left(\overline{H}_{24}^{\text{even}}\right)$ *— объединение сфер и характеристическая функция* $\chi_C$ *— совершенная раскраска графа* $\overline{H}_{24}^{\text{even}}$ *с параметрами* $((20+c, 256-c)(c, 276-c))$. *Тогда либо* $c$ *кратно* 3, *либо* $c \geqslant 25$.

Доказательство. Если $C$ включает в себя две пересекающиеся сферы, то их объединение содержит 46 вершин, а любой (из двух) общий элемент смежен с остальными 45 вершинами объединения. Отсюда $20 + c \geqslant 45$, т.е. $c \geqslant 25$. Если, в противном случае, $C$ состоит из непересекающихся сфер, то каждая вершина графа $\overline{H}_{24}^{\text{even}}$ не из $C$ смежна с тремя вершинами из каждой соседней сферы, откуда $c \equiv 0 \bmod 3$. Лемма 8 доказана.

Поскольку значения $c = 1, 2, 4, 5, 7$ противоречат леммам 7 и 8, теорема 2 доказана. Кроме того, можно сделать вывод, что совершенная раскраска с параметрами $((23, 253)(3, 273))$ единственна с точностью до автоморфизма графа.

## 5. Заключение

В заключение приведём в табл. 2 всевозможные значения параметра $c$ от 1 до 128. Знак "$-$" означает несуществование совершенной раскраски с параметрами $(20+c, 256-c; c, 276-c)$ в $\overline{H}_{24}$, "+" – существование, "?" — вопрос существования открыт. Если плюс обведён в кружок, то раскраску с данными параметрами можно построить объединением смежных

классов окрестности кода Голея, если в прямоугольник — объединением смежных классов линейного кода $L$.

Таблица 2

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| $-$ | $-$ | $\oplus$ | $-$ | $-$ | $\oplus$ | $-$ | $\boxed{+}$ | $\oplus$ | ? | $+$ | $\oplus$ | ? | $+$ | $\oplus$ | $\boxed{+}$ |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| $+$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\boxed{\oplus}$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $\boxed{+}$ |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $\boxed{+}$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\boxed{\oplus}$ |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| $+$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $\boxed{+}$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $+$ | $+$ | $\oplus$ | $\boxed{\oplus}$ |
| 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\boxed{\oplus}$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\boxed{+}$ |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 |
| $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\boxed{\oplus}$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\boxed{\oplus}$ |
| 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 |
| $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\boxed{+}$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\boxed{\oplus}$ |
| 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 |
| $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\boxed{\oplus}$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $+$ | $\oplus$ | $\oplus$ | $\boxed{+}$ |

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 923–930.
2. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 292–295. (http://semr.math.nsc.ru/v4/p292-295.pdf)
3. **Fon-Der-Flaass D.** A bound on correlation immunity // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 133–135. (http://semr.math.nsc.ru/v4/p133-135.pdf)
4. **Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.** Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979. — 744 с.

*Кротов Денис Станиславович*,
e-mail: krotov@math.nsc.ru

Статья поступила
18 марта 2008 г.