ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2008. Том 15, № 5. С. 61–75

УДК 519.101

СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО СЛОВА, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ГРАФОВ РОЗИ КОТОРОГО СОДЕРЖИТ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ГОМЕОМОРФОВ ЗАДАННЫХ ОРГРАФОВ

П. В. Салимов

Аннотация. Объект изучения — бесконечные слова над конечным алфавитом. Доказано,что всякая последовательность конечных сильно связных орграфов с максимальными полустепенями исхода и захода, равными s, поэлементно гомеоморфна подпоследовательности графов Рози некоторого равномерно рекуррентного бесконечного слова над s-буквенным алфавитом.

Ключевые слова: бесконечные слова, равномерная рекуррентность, граф Рози, граф де Брейна.

Введение

Бесконечным словом ω над алфавитом A называют элемент множества функций $A^{\mathbb{N}}$.

Обозначим i-й символ слова v через v_i. Для обозначения слова $v_i v_{i+1} \dots v_{i+k}$ используется запись $v[i, i+k]$. Конечное слово u является подсловом слова v, если справедливо равенство $u = v[i, i+k]$ при некотором i. Количество символов слова u (его длину) обозначим через $|u|$.

Графом де Брейна порядка n над некоторым алфавитом называется орграф, множество вершин которого есть множество слов длины n над этим алфавитом, причём дуга из слова u в слово v принадлежит его множеству дуг тогда и только тогда, когда верно $u_2 u_3 \dots u_n = v_1 v_2 \dots v_{n-1}$.

Для бесконечного слова ω сходным образом определяется *граф перекрытия подслов длины* n, или *граф Рози порядка* n [5]. Это орграф, множество вершин которого есть множество подслов длины n слова ω, а из слова u в слово v дуга следует тогда и только тогда, когда выполнено равенство $u_2 u_3 \dots u_n = v_1 v_2 \dots v_{n-1}$ и при этом слово $u_1 u_2 \dots u_n v_n$ является подсловом слова ω.

Графы Рози активно используются для изучения бесконечных слов со сравнительно небольшим количеством подслов [1–4].

Понятие графа Рози бесконечного слова естественным образом расширяется до понятия графа Рози продолжаемого факторного языка.

Говоря о последовательности R_i, $i \in \mathbb{N}$, графов Рози слова или языка, мы подразумеваем, что граф Рози R_i имеет порядок i.

Результатом статьи является теорема, утверждающая существование бесконечного слова, последовательность графов Рози которого содержит подпоследовательность, поэлементно гомеоморфную произвольно заданной последовательности орграфов, удовлетворяющих некоторому свойству. Строгая формулировка этой теоремы приведена далее, после введения необходимых определений.

1. Определения и обозначения

Множества вершин и дуг графа G в дальнейшем обозначаются соответственно V_G и E_G. Полустепени исхода и захода вершин обсуждаемых далее орграфов полагаются отличными от нуля. *Путём* длины $n > 1$ в орграфе G будем называть такую последовательность $e_1 e_2 \dots e_n$ его дуг, что конец дуги e_k является началом дуги e_{k+1}. Дуга орграфа G является в нём путём длины 1.

Определим *k-растяжение орграфа G* как орграф $\tau_k G$, получаемый замещением в G всех дуг соответственно ориентированными путями длины k, внутренние вершины которых имеют полустепени исхода и захода, равные 1. Запись v_e^i, где e — дуга исходного графа и $1 \leqslant i < k$, означает i-ю в порядке прохождения вершину пути орграфа $\tau_k G$, замещающего дугу e.

Например, пусть G — орграф (возможно, с петлями и множественными дугами) и $G' = \tau_k G$, тогда

$$\begin{aligned}
V_{G'} =& V_G \cup \left\{ v_e^i \mid e \in E_G, 1 \leqslant i < k \right\}, \\
E_{G'} =& \left\{ \left\langle v, v_e^1 \right\rangle \mid e \in E_G, v \text{ начало } e \right\} \cup \left\{ \left\langle v_e^{k-1}, u \right\rangle \mid \ e \in E_G, u \text{ конец } e \right\} \cup \\
& \left\{ \left\langle v_e^i, v_e^{i+1} \right\rangle \mid e \in E_G, 1 \leqslant i < k-1 \right\}.
\end{aligned}$$

Помимо этого определим орграф $\pi^n G$ — *орграф перекрытия путей длины n орграфа G по путям длины $n-1$* (для краткости в дальнейшем называемый просто орграфом перекрытия путей длины n орграфа G) следующим образом: множество вершин графа $\pi^n G$ есть множество путей длины n орграфа G, и при $n > 1$ дуга в орграфе $\pi^n G$ из вершины $e_1 e_2 \dots e_n$ ведёт в вершину $f_1 f_2 \dots f_n$ тогда и только тогда, когда $e_2 e_3 \dots e_n = f_1 f_2 \dots f_{n-1}$, а при $n = 1$ дуга $\langle e, f \rangle$ принадлежит орграфу πG тогда и только тогда, когда последовательность ef является путём в G.

Например, обозначая здесь и в дальнейшем через $\mathbb{B}_s(n)$ граф де Брейна порядка n над s-буквенным алфавитом, имеем $\mathbb{B}_s(n+k) \simeq \pi^k \mathbb{B}_s(n)$. *Каноническим изоморфизмом* этих графов назовём изоморфизм, сопоставляющий слову $a_1 a_2 \dots a_{n+k}$ путь

$$a_1 a_2 \dots a_n \to a_2 a_3 \dots a_{n+1} \to \dots \to a_{1+k} a_{2+k} \dots a_{n+k}.$$

Далее, для удобства изложения, орграфы $\mathbb{B}_s(n+k)$ и $\pi^k \mathbb{B}_s(n)$ отождествляются каноническим изоморфизмом. Это наделяет запись вида $G_2 \subseteq \pi^m G_1$ для орграфов $G_1 \subseteq \mathbb{B}_s(n)$, $G_2 \subseteq \mathbb{B}_s(n+m)$ следующим смыслом: множество подслов длины n вершин орграфа G_2 является подмножеством множества вершин орграфа G_1, а множество подслов длины $n+1$ его вершин является подмножеством множества дуг орграфа G_1.

Орграф назовём *P_s-орграфом*, если максимальная полустепень исхода по всем его вершинам совпадает с максимальной полустепенью захода по всем его вершинам и равна s.

Слово ω называется *равномерно рекуррентным*, если для всякого натурального n существует натуральное r_n такое, что любое подслово длины r_n слова ω содержит все подслова длины n слова ω.

Далее мы докажем, что у всякой последовательности сильно связных P_s-орграфов элементы могут быть растянуты таким образом, что полученная последовательность становится изоморфной подпоследовательности последовательности графов Рози некоторого бесконечного слова над s-буквенным афавитом (см. разд. 5). Но сначала сформулируем некоторые свойства k-растяжений P_s-орграфов и опишем их отношения с графами де Брейна.

2. Отношения графов перекрытия путей и k-растяжений

Покажем, что для всякого орграфа графы перекрытия его путей и графы перекрытия путей его k-растяжения схожи.

Лемма 1. *Для произвольного орграфа G и натуральных k, m верно*

$$\pi^{mk} \tau_k G \simeq \tau_k \pi^m G.$$

Для этого сначала докажем

Утверждение 1. *Для произвольного орграфа G графы $\pi^{k+m} G$ и $\pi^m \pi^k G$ изоморфны.*

Доказательство. Докажем, что $\pi^{k+1} G \simeq \pi \pi^k G$ при $k > 0$. Пусть отображение ψ вершин графа $\pi^{k+1} G$ в вершины графа $\pi \pi^k G$ действует следующим образом: $e_1 e_2 \dots e_k e_{k+1} \mapsto \langle e_1 \dots e_k, e_2 \dots e_{k+1} \rangle$.

Отображение ψ определено корректно. В самом деле, последовательность дуг $e_1 \dots e_{k+1}$ является путём в орграфе G. Следовательно, путями являются и последовательности $e_1 \dots e_k$ и $e_2 \dots e_{k+1}$. Более того, по определению орграфа перекрытия путей орграф $\pi^k G$ содержит дугу $\langle e_1 \dots e_k, e_2 \dots e_{k+1}\rangle$, которая является вершиной орграфа $\pi\pi^k G$. Очевидно, что ψ биективно.

Докажем, что ψ является изоморфизмом орграфов. Пусть дуга

$$\langle\langle e_1 \dots e_k, e_2 \dots e_{k+1}\rangle, \langle f_1 \dots f_k, f_2 \dots f_{k+1}\rangle\rangle$$

принадлежит орграфу $\pi\pi^k G$, значит, $e_2 \dots e_{k+1} = f_1 \dots f_k$ и из определения орграфа перекрытия путей последовательность дуг $e_1 \dots e_k e_{k+1} f_{k+1}$ является путём длины $k+2$ в орграфе G. Следовательно, дуга $\langle e_1 \dots e_{k+1}$, $f_1 \dots f_{k+1}\rangle$ принадлежит орграфу $\pi^{k+1} G$. Аналогично в обратную сторону.

Таким образом, верно

$$\pi^{k+m} G \simeq \pi\pi^{k+m-1} G \simeq \ldots \simeq \pi \dots \pi\pi^k G \simeq \pi \dots \pi\pi^2\pi^k G \simeq \ldots \simeq \pi^m \pi^k G.$$

Утверждение 1 доказано.

Теперь можно перейти к доказательству леммы.

Доказательство леммы 1. Докажем, что $\pi^k \tau_k G \simeq \tau_k \pi G$.

Напомним, что запись $v^i_{\langle e_1, e_2\rangle}$, где последовательность дуг $e_1 e_2$ является путём орграфа G, означает i-ю вершину цепи орграфа $\tau_k \pi G$, замещающей дугу $\langle e_1, e_2\rangle$ орграфа πG.

Будем считать, что цепь в k-растяжении орграфа G, замещающая дугу e, состоит из дуг $e^1, \dots, e^k$ в порядке прохождения.

Пусть отображение ψ вершин орграфа $\tau_k \pi G$ в вершины орграфа $\pi^k \tau_k G$ действует следующим образом:

$$e \mapsto e^1 e^2 \dots e^k, \quad v^i_{\langle e_1, e_2\rangle} \mapsto e_1^{i+1} \dots e_1^k e_2^1 \dots e_2^i.$$

Тривиальной проверкой устанавливается, что отображение ψ определено корректно и биективно.

Докажем, что ψ — изоморфизм орграфов. Пусть дуга $\langle e_1, v^1_{e_1 e_2}\rangle$ принадлежит орграфу $\tau_k \pi G$. Тогда последовательность дуг $e_1 e_2$ — путь в орграфе G, а последовательность дуг $e_1^1 \dots e_1^k e_2^1 \dots e_2^k$ — путь в орграфе $\tau_k G$. Следовательно, дуга

$$\langle e_1^1 \dots e_1^k, e_1^2 \dots e_1^k e_2^1\rangle$$

принадлежит графу $\pi^k \tau_k G$. Аналогично в обратную сторону и для других вариантов выбора вершин.

Таким образом, используя утверждение 1, получаем

$$\tau_k\pi^m G \simeq \tau_k\pi\pi^{m-1}G \simeq \pi^k\tau_k\pi^{m-1}G \simeq \ldots \simeq \pi^k\ldots\pi^k\tau_k G \simeq \pi^{mk}\tau_k G.$$

Лемма 1 доказана.

3. Вложение графов в граф де Брейна

Определим *вложение графа H в граф G* как пару $\langle H', \psi\rangle$, в которой граф H' является суграфом графа G и ψ — некоторый его изоморфизм с графом H. Под *вложимостью* графа в заданный граф понимается существование вложения этого графа в заданный граф.

Далее в виде леммы сформулирована следующая идея: s-буквенного алфавита достаточно для вложимости произвольного орграфа с полустепенями исхода и захода, не превосходящими s, в граф де Брейна некоторого порядка над ним.

Лемма 2. *k-Растяжение всякого конечного орграфа G (возможно с петлями и кратными дугами) с ограничением s на полустепени исхода и захода его вершин вложимо в граф $\mathbb{B}_s(n)$, где $n = 4\lceil\log_s|V_G|\rceil + 10$ и $k = n + 2$.*

Доказательство. Считаем, что наш s-буквенный алфавит Σ состоит из букв $0, 1, \ldots, s-1$. Пусть натуральное m таково, что $m - 2 \geqslant \lceil\log_s|V_G|\rceil$. Выберем произвольное вложение φ вершин орграфа G в множество слов длины m, начинающихся и заканчивающихся символом 0. Обозначим образ множества V_G при этом вложении через A, а слова — его элементы — через $a_i = \varphi(v_i)$:

$$\varphi:\ V_G = \{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant |V_G|\} \Longleftrightarrow A = \{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant |V_G|\} \subseteq 0\cdot\Sigma^{m-2}\cdot 0,$$
$$v_i \mapsto a_i.$$

На основе вложения φ построим вложение ϕ множества V_G в множество вершин графа $\mathbb{B}_s(4m+2)$ следующим образом:

$$\phi:\ V_G \leftrightarrow A' \subset \Sigma^{4m+2}, \quad v_i \mapsto a_i 1^m 001^m a_i.$$

Осталось нужным образом соединить попарно не пересекающимися путями длины k образы вершин V_G при вложении ϕ. Для этого зададим на множестве дуг орграфа G функции L, R в множество букв алфавита Σ так, что для любых различных дуг $e_1 \neq e_2$, таких, что вершины v_i, v_j — начало и конец дуги e_1, а вершины v_p, v_q — начало и конец дуги e_2, выполнено

$$v_j = v_q \Rightarrow R(e_1) \neq R(e_2), \quad v_i = v_p \Rightarrow L(e_1) \neq L(e_2). \tag{1}$$

Это возможно в силу ограничения s на полустепени исхода и захода исходного графа.

Для каждой дуги $e \in E_G$, начало и конец которой суть вершины v_i и v_j, определим путь P_e как путь, соответствующий слову

$$a_i 1^m 001^m a_i L(e) R(e) a_j 1^m 001^m a_j.$$

Таким образом, P_e является путём длины $4m+4$, его l-ю (в порядке прохождения) вершину обозначим через $P_e[l]$. В этих обозначениях

$$P_e[1] = a_i 1^m 001^m a_i, \;\; P_e[4m+5] = a_j 1^m 001^m a_j.$$

Далее обозначение P_e используется как для самого пути, так и для соответствующего ему слова.

Пусть орграф G' — суграф графа $\mathbb{B}_s(n)$, полученный объединением всех определённых нами путей P_e. Докажем изоморфность орграфа G' k-растяжению графа G с параметром $k = 4m+4$; для этого рассмотрим отображение ψ, действующее следующим образом:

$$\psi : \; V_{\tau_{4m+4}G} \to V_{G'}, \;\; v_i \mapsto a_i 1^m 001^m a_i, \;\; v_e^j \mapsto P_e[j+1].$$

Очевидно, что ψ сюръективно; докажем, что ψ иньективно.

По построению пути P_e, соответствующего дуге e, с началом v_i и концом v_j, любая его вершина — слово x длины $4m+2$ — имеет вхождение подслова 1^m. Заметим, что, так как любое слово из множества A имеет вид $0u0$, то слово $a_i L(e) R(e) a_j$ не имеет ни вхождения подслова 1^m, ни перекрытия с ним. Таким образом, для любой дуги e графа G верно, что в слово P_e входит подслово 1^m лишь на позициях $m+1, 2m+3, 5m+5, 6m+7$. Эти вхождения будем называть 1-м, 2-м, 3-м и 4-м вхождениями. Иллюстрирует описанное следующая схема:

a_{i_1}			1^m			0	0	1^m		
1	$\dots$	m	$m+1$	$\dots$	$2m$	$2m+1$	$2m+2$	$2m+3$	$\dots$	$3m+2$

a_{i_1}			$L(e)$	$R(e)$	a_{i_2}		
$3m+3$	$\dots$	$4m+2$	$4m+3$	$4m+4$	$4m+5$	$\dots$	$5m+4$

1^m			0	0	1^m		
$5m+5$	$\dots$	$6m+4$	$6m+5$	$6m+6$	$6m+7$	$\dots$	$7m+6$

a_{i_2}		
$7m+7$	$\dots$	$8m+6$

.

Любая вершина x орграфа G' есть вершина $P_e[l]$ для некоторых дуги e с началом v_{i_1} и концом v_{i_2} и натурального l. Вершина x такова, что $x = P_e[1] = \psi(v_{i_1})$ или $x = P_e[4m+5] = \psi(v_{i_2})$, тогда и только тогда, когда $x_{m+1}x_{m+2}\dots x_{3m+2} = 1^m001^m$. В этом случае $x_1x_2\dots x_m = a_{i_1}$ или $x_1x_2\dots x_m = a_{i_2}$, а значит, для любого i невозможно равенство $\psi(v_i) = \psi(y)$ ни для какой вершины $y \neq v_i$ орграфа $\tau_{4m+4}G$.

Пусть теперь $P_{e_1}[l] = P_{e_2}[l] = x$ при $1 < l < 4m+5$ и $e_1 \neq e_2$. Но если $1 < l \leqslant 3m+3$, то верно равенство

$$a_{i_1}L(e_1) = x_{3m+3-l}x_{3m+4-l}\dots x_{4m+3-l} = a_{i_2}L(e_2),$$

а при $3m+3 < l < 4m+5$ верно

$$R(e_1)a_{j_1} = x_{4m+4-l}x_{4m+5-l}\dots\dots x_{5m+4-l} = R(e_2)a_{j_2},$$

что противоречило бы выбору функций φ, L и R.

Таким образом, осталось доказать только невозможность пересечения путей $P_{e_1}[l_1] = P_{e_2}[l_2] = x$ при соотношении $1 < l_1 < l_2 < 4m+5$. Для этого рассмотрим различные варианты позиции первого вхождения слова 1^m в слово x.

Пусть позиция первого вхождения слова 1^m в слово x равна j.

Случай 1. Если $j > m+2$, то это вхождение слова 1^m в слово x может являться только 3-м его вхождением в слова P_{e_1}, P_{e_2}, поэтому $l_1 = l_2 = 5m+6-j$.

Случай 2. Если $j \leqslant m+2$, то рассмотрим два подслучая:

Случай 2a. Если $x[j, j+2m+1] \neq 1^m001^m$, то вхождение слова 1^m в слово x может являться только 2-м его вхождением в слова P_{e_1}, P_{e_2}, поэтому $l_1 = l_2 = 2m+4-j$.

Случай 2b. Если $x[j, j+2m+1] = 1^m001^m$, то возможны два варианта:

Случай 2b1. Если $j < m+1$, то вхождение слова 1^m в слово x может являться только 1-м его вхождением в слова P_{e_1}, P_{e_2}; поэтому $l_1 = l_2 = m+2-j$.

Случай 2b2. Если $m+1 \leqslant j \leqslant m+2$, то из условия $1 < l < 4m+5$ следует $j \neq m+1$. А значит, $j = m+2$ и, учитывая $x[j, j+2m+1] = 1^m001^m$, получаем, что вхождение слова 1^m в слово x может являться только 3-м его вхождением в слова P_{e_1}, P_{e_2}, и тогда $l_1 = l_2 = 5m+6-j$.

Таким образом, отображение ψ биективно и, как легко проверить, является изоморфизмом орграфов

$$\tau_{4m+4}G \quad \text{и} \quad G' = \bigcup_{e \in E_G} P_e.$$

При соответствующем выборе функции φ действием перестановок алфавита на вершины графа G' можно получить вложения, отличные от построенного.

4. Вложение графа де Брейна в рёберные графы

Далее в виде леммы сформулирована следующая идея: свойства P_s сильно связного орграфа G достаточно для вложимости графа $\mathbb{B}_s(1)$ в орграф перекрытия путей некоторой длины орграфа G.

Лемма 3. *Для всякого сильно связного P_s орграфа G существуют такие натуральные n и k, что k-растяжение графа $\mathbb{B}_s(1)$ вложимо в орграф перекрытия путей длины n орграфа G, и при этом вложении всякий путь, являющийся его вершиной, проходит по всем дугам G.*

Доказательство. Нужный граф, как и в лемме 2, будет получен объединением путей одинаковой длины в орграфе $\pi^n G$.

Без ограничения общности можно считать G орграфом без кратных дуг. Этого можно добиться, перейдя от орграфа G к орграфу πG, свойство P_s при этом сохранится.

Отсутствие кратных дуг в орграфе G позволяет отождествлять его пути со словами над алфавитом его вершин. Для обозначения вершин далее используются буквы $v, o, i \ldots$. Пути или части путей, чьё внутреннее строение нас не интересует, далее обозначаются большими буквами (L,P, $v_1v_2Lv_3Pv_4$ и т. п.).

Без ограничения общности можно считать, что в орграфе G существует вершина v с полустепенями исхода и захода, равными s. В самом деле, пусть полустепень захода вершины v_1 равна полустепени исхода вершины v_2 и равна s. Тогда в силу сильной связности графа G существует путь v_1Lv_2 длины m. В орграфе $\pi^m G$ вершина v_1Lv_2 удовлетворяет нужному свойству.

Обозначим остальные вершины орграфа G так, чтобы ему принадлежали дуги $\langle v, o_j \rangle$ и $\langle i_j, v \rangle$, где $1 \leqslant j \leqslant s$, и выполнялось $o_{j_1} \neq o_{j_2}$ и $i_{j_1} \neq i_{j_2}$ при $1 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant s$. Далее в доказательстве для записи путей используются слова вида $vo_kU_ki_kv$, формально правильные лишь в случае, когда множества $\{o_j\}_{j=1}^s$, $\{i_j\}_{j=1}^s$, $\{v\}$ попарно не пересекаются. Иначе следует мысленно заменять $vo_kU_ki_kv$ на vo_kv или на vv.

Пусть путь vU_1v — один из кратчайших циклов, содержащих v. Считаем, что $U_1 = o_1U_1'i_1$.

Выберем пути $U_j = o_jU_j'i_j$ при $1 < j \leqslant s$ как любые кратчайшие, начинающиеся в вершине o_j и заканчивающиеся в вершине i_j. Иллюстрирует выбор обозначений рис. 1.

Построим семейство путей одинаковой длины следующего вида:

$$A_i = U_ivU_1vU_2v\ldots vU_{i-1}vU_{i+1}v\ldots vU_svU_sv\ldots vU_{i+1}vU_{i-1}v\ldots vU_2vU_1vU_i.$$

Пусть длина слова vA_iv равна m_1.

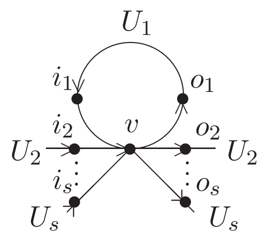

Рис. 1

Далее возможны 2 случая.

Случай 1. В орграфе G существует дуга $\langle a, b\rangle$, не принадлежащая пути vA_1v.

Рассмотрим множество путей вида vPv, каждый из которых включает в себя все дуги орграфа G, не принадлежащие пути vA_1v. Среди них выберем какой-нибудь кратчайший путь vLv. Пусть длина слова L равна m_2. Тогда $k = 2m_1 + 2m_2 + 1$ есть длина слова $vA_ivLvLvA_iv$.

Докажем, что суграф B орграфа $\pi^{k-1}G$, являющийся объединением путей $P_{ij} = vA_ivLvLvA_ivA_jvLvLvA_jv$, где $1 \leqslant i, j \leqslant s$, изоморфен k-растяжению графа $\mathbb{B}_s(1)$. Для этого используем следующее

Утверждение 2. *Слово vLv не является подсловом слов LvL и LvA_jvA_ivL, где $1 \leqslant i, j \leqslant s$.*

Доказательство. Действительно, предположив противное, получим противоречие с минимальностью длины пути vLv. Утверждение 2 доказано.

Таким образом, слово P_{ij} содержит лишь 4 вхождения подслова vLv, а именно, на позициях $m_1, m_1 + m_2 + 1, 3m_1 + 2m_2, 3m_1 + 3m_2 + 1$; эти вхождения назовём 1-м, 2-м, 3-м и 4-м вхождениями. Иллюстрирует описанное следующая схема:

v	A_i			v	L			v
1	2	$\ldots$	m_1-1	m_1	m_1+1	$\ldots$	m_1+m_2	m_1+m_2+1

L			v	A_i	
m_1+m_2+2	$\ldots$	m_1+2m_2+1	m_1+2m_2+2	m_1+2m_2+3	$\ldots$

A_i		v	A_j		
$\ldots$	$2m_1+2m_2$	$2m_1+2m_2+1$	$2m_1+2m_2+2$	$\ldots$	$3m_1+2m_2-1$

v	L			v
$3m_1+2m_2$	$3m_1+2m_2+1$	$\ldots$	$3m_1+3m_2$	$3m_1+3m_2+1$

L			v	A_j	
$3m_1+3m_2+2$	$\ldots$	$3m_1+4m_2+1$	$3m_1+4m_2+2$	$3m_1+4m_2+3$	$\ldots$

A_j		v
$\ldots$	$4m_1+4m_2$	$4m_1+4m_2+1$

.

Пусть алфавит Σ состоит из чисел $1, 2, \ldots, s$.

Для доказательства изоморфности орграфа B и k-растяжения графа $\mathbb{B}_s(1)$ рассмотрим отображение ψ, действующее так:

$$\psi:\ V_{\tau_k \mathbb{B}_s(1)} \to V_B,\ \ i \mapsto vA_ivLvLvA_iv,\ \ v^l_{\langle i,j\rangle} \mapsto P_{ij}[l+1].$$

Здесь и далее $P_{ij}[l]$ — l-я в порядке прохождения вершина пути P_{ij}. В этих обозначениях

$$P_{ij}[1] = vA_ivLvLvA_iv,\ \ P_{ij}[2m_1+2m_2+1] = vA_jvLvLvA_jv.$$

Очевидно, что ψ сюръективно.

Утверждение 3. *Соответствие ψ инъективно.*

Доказательство. Любая вершина x орграфа B есть вершина $P_{ab}[l]$ для некоторых дуги $\langle a, b\rangle$ и натурального l. Вершина x такова, что $x = P_{ab}[1]$ или $x = P_{ab}[2m_1+2m_2+1]$, тогда и только тогда, когда

$$x_{m_1}x_{m_1+1}\ldots x_{m_1+2m_2+2} = vLvLv.$$

В этом случае $x_2 = o_a$ или $x_2 = o_b$, а значит, для любого $i \in \Sigma$ выполнено $\psi(i) \neq \psi(y)$ для всякой вершины $y \neq i$ орграфа B.

Пусть теперь $P_{ab}[l] = P_{cd}[l] = x$ при $1 < l < 2m_1+2m_2+1$ и $\langle a, b\rangle \neq \langle c, d\rangle$. Но тогда верно равенство

$$i_avo_b = x_{2m_1+2m_2-l}x_{2m_1+2m_2+1-l}x_{2m_1+2m_2+2-l} = i_cvo_d,$$

что противоречило бы выбору вершин i_a, o_b, i_c, o_d.

Таким образом, осталось доказать только невозможность пересечения путей $P_{ab}[l_1] = P_{cd}[l_2] = x$ при соотношении $1 < l_1 < l_2 < 2m_1 + 2m_2 + 1$. Для этого рассмотрим варианты позиции первого вхождения слова vLv в слово x относительно слов P_{ab} и P_{cd}.

Пусть позиция первого вхождения слова vLv в слово x равна k.

Случай 1.1. Пусть первое вхождение слова vLv в слово x является 1-м его вхождением в слово P_{ab} и 2-м — в слово P_{cd}. Из построения пути P_{ab} следует, что $k \leqslant m_1$, поэтому можно рассмотреть слово

$$x[k, 2m_2 + 2 + k] = vLvLe = vLvA'_c,$$

где слово A'_c является префиксом слова A_cvLv. Получили противоречие с утверждением 2.

Случай 1.2. Пусть первое вхождение слова vLv в слово x является 1-м его вхождением в слово P_{ab} и 3-м — в слово P_{cd}. Но тогда из построения путей P_{ab} и P_{cd} получаем противоречие $m_1 < k < m_1$.

Случай 1.3. Пусть первое вхождение слова vLv в слово x является 2-м его вхождением в слово P_{ab} и 3-м — в слово P_{cd}. Из построения пути P_{ab} следует, что $k \leqslant m_2 + 1$, поэтому можно рассмотреть слово

$$x[k, k + m_2 + m_1 - 1] = vLvA_av = vLvL',$$

где слово L' — префикс слова LvA_dv. Если $|A_i| \geqslant |L|$, то имеем противоречие с утверждением 2, иначе — противоречие с минимальностью пути vLv.

Следовательно, первое вхождение слова vLv в слово x относительно слов P_{ab} и P_{cd} имеет один и тот же номер, и мы получаем противоречие с предположением $l_1 \neq l_2$.

Значит, ψ инъективно. Утверждение 3 доказано.

Итак, отображение ψ биективно и, как нетрудно проверить, является изоморфизмом орграфа B и k-растяжения графа $\mathbb{B}_s(1)$.

Далее, любая вершина графа B содержит подпуть $vLvA_iv$ или vA_jvLv, проходящий по всем дугам орграфа G.

Таким образом, в случае существования дуги $\langle a, b\rangle$ в орграфе G, не принадлежащей пути vA_1v, теорема 1 доказана.

Случай 2. В орграфе G путь vA_1v проходит по всем дугам.

Положим путь vLv равным пути $vU_1vU_1vU_1v$ и определим орграф B и соответствия ψ тем же образом, что и ранее. Очевидно, что ψ сюръективно. Необходимо показать, что оно инъективно. Трудность здесь в

том, что при некоторых i и j слово P_{ij} содержит «лишние» вхождения подслова vLv. Далее мы докажем, что по виду слова $x = P_{ij}[l]$ однозначно устанавливается, какие вхождения подслова vLv соответствуют «лишним», и применим доказательство утверждения 3 для оставшихся вхождений.

Итак, вхождения слова vLv в слово P_{ij} на позициях $m_1, m_1 + m_2 + 1, 3m_1 + 2m_2 - 1, 3m_1 + 3m_2$ назовём соответственно 1-м, 2-м, 3-м и 4-м *опорными* вхождениями.

Вхождение слова vLv в слово $P_{ab}[l]$ назовём *опорным*, если оно соответствует опорному его вхождению в слово P_{ab}. Другими словами, опорными вхождениями слова vLv в слово $P_{ab}[l]$ являются вхождения на каждой из позиций $m_1 - l + 1,\ m_1 + m_2 + 2 - l,\ 3m_1 + 2m_2 - l,\ 3m_1 + 3m_2 - l + 1$, если только подслово длины $|vLv|$ слова $P_{ab}[l]$, начиная с этой позиции, может быть определено. Остальные вхождения слова vLv назовём *лишними*.

Утверждение 4. *Слово vU_1v не является подсловом никакого слова вида $vU_{x_1}v \dots vU_{x_m}v$ при $1 < x_y \leqslant s$.*

Доказательство. Предположим противное. Если слово vU_1v является подсловом слова $vU_{x_y}v$, то

$$vU_{x_y}v = vo_{x_y}U'_{x_y}i_{x_y}v = vo_{x_y}PvU_1vRi_{x_y}v.$$

Путь $o_{x_y}PvRi_{x_y}$ короче U_{x_y}, что противоречит выбору пути U_{x_y}.

Если же слово vU_1v не является подсловом слова вида $vU_{x_y}v$, но является подсловом слова $U_{x_{y-1}}vU_{x_y}$, то оно имеет вхождение подслова $i_{x_{y-1}}vo_{x_y}$, что противоречит определению цикла vU_1v. Утверждение 4 доказано.

Следовательно, слово vLv не является подсловом слова vA_ivA_jv ни при каких i и j. Иначе говоря, все лишние вхождения слова vLv в слово P_{ij} имеют перекрытия с опорными вхождениями.

Утверждение 5. *По строению слова $P_{ij}[l]$ можно установить, какие вхождения подслова vLv в него являются опорными.*

Доказательство. По построению путей P_{ij} в слово $P_{ij}[l]$ обязательно войдёт хотя бы одно из следующих слов:

1) $vU_1vU_1vU_1vU_ivU_1v$ (префикс слова $vLvA_i$ при $i > 1$);
2) $vU_1vU_1vU_1vU_1vU_2vU_3v$ (префикс слова $vLvA_1$ в случае $s > 2$);
3) $vU_1vU_1vU_1vU_1vU_2vU_2v$ (префикс слова $vLvA_1$ в случае $s = 2$);
4) $vU_1vU_ivU_1vU_1vU_1v$ (суффикс слова A_ivLv при $i > 1$);
5) $vU_3vU_2vU_1vU_1vU_1vU_1v$ (суффикс слова A_1vLv в случае $s > 2$);

6) $vU_2vU_2vU_1vU_1vU_1vU_1v$ (суффикс слова A_1vLv в случае $s=2$).

Позиция вхождения любого из этих слов однозначно определяет позицию опорных вхождений слов vLv в слово $P_{ij}[l]$. Утверждение 5 доказано.

Доказательство того, что ψ инъективно, аналогично доказательству утверждения 3, проведённому для опорных вхождений подслов vLv (как если бы оно проводилось для слов над алфавитом $V_G \times \{0,1\}$, где буквы из $V_G \times \{1\}$ стояли бы на местах, покрываемых опорными вхождениями подслова vLv).

Таким образом, ψ биективно.

Более того, ψ является изоморфизмом орграфов B и k-растяжения графа $\mathbb{B}_s(1)$.

Далее, любая вершина графа B содержит подпуть vA_iv, проходящий по всем дугам орграфа G.

На этом доказательство случая 2 завершено.

5. Построение слова по последовательности графов

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Для всякой последовательности $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ сильно связных P_s-орграфов существуют последовательность $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел и равномерно рекуррентное бесконечное слово ω над s-буквенным алфавитом такие, что последовательность графов Рози слова ω содержит подпоследовательность, i-й элемент которой изоморфен k_i-растяжению орграфа G_i.*

Для её доказательства потребуется

Утверждение 6. *Пусть орграф G — произвольный конечный сильно связный P_s орграф. Тогда существуют такие натуральные k и n, что k-растяжение всякого орграфа на v вершинах, полустепени исхода и захода вершин которого не превосходят s, вложимо в орграф перекрытия путей длины n орграфа G, и при этом вложении всякий путь, являющийся его вершиной, проходит по всем дугам G.*

Доказательство. По лемме 3 среди суграфов орграфа $\pi^{n_1}G$ найдётся орграф B, изоморфный орграфу $\tau_{k_1}\mathbb{B}_s(1)$. Положим

$$n_2 = 4\lceil \log_s v \rceil + 10.$$

Лемма 2 утверждает, что (n_2+2)-растяжение всякого орграфа H на v вершинах, полустепени исхода и захода вершин которого не превосходят s, изоморфно некоторому суграфу графа $\mathbb{B}_s(n_2) \simeq \pi^{n_2-1}\mathbb{B}_s(1)$. По

лемме 1 имеем

$$\pi^{(n_2-1)k_1}\tau_{k_1}\mathbb{B}_s(1) \simeq \tau_{k_1}\pi^{n_2-1}\mathbb{B}_s(1).$$

Следовательно, $(k_1n_2 + k_1)$-растяжение орграфа H вложимо в орграф $\pi^{(n_2-1)k_1}B \subseteq \pi^{n_1+(n_2-1)k_1}G$. Осталось заметить, что любая вершина орграфа B, а значит, и любая вершина орграфа $\pi^{(n_2-1)k_1}B$, как путь в G, проходит по всем дугам орграфа G. Утверждение 6 доказано.

Доказательство теоремы 1. Построим некоторую последовательность орграфов $\{G'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, где $G'_i \subseteq \mathbb{B}_s(n_i)$ и $G'_i \simeq \tau_{k_i}G_i$, и докажем, что эта последовательность орграфов есть подпоследовательность последовательности графов Рози некоторого равномерно рекуррентного бесконечного слова.

По лемме 2 для некоторых натуральных n_1 и k_1 среди суграфов графа $\mathbb{B}_s(n_1)$ существует орграф $G'_1 \simeq \tau_{k_1}G_1$.

Пусть уже построена последовательность орграфов $\{G'_j \simeq \tau_{k_j}G_j\}_{j\leqslant i}$, в которой $G'_j \subseteq \pi^{m_j}G'_{j-1} \subseteq \mathbb{B}_s(n_j)$, $G'_1 \subseteq \mathbb{B}_s(n_1)$ и всякий путь, являющийся вершиной орграфа G'_{j+1}, проходит по всем дугам орграфа G'_j. Тогда, применяя утверждение 6 к орграфу G'_i, можно получить орграф $G'_{i+1} \subseteq \pi^{m_{i+1}}G'_i \subseteq \mathbb{B}_s(n_i + m_{i+1})$, изоморфный k_{i+1}-растяжению орграфа G_{i+1}, чья любая вершина проходит по всем дугам орграфа G'_i.

Таким образом, имеем последовательность орграфов $\{G'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такую, что $G'_i \simeq \tau_{k_i}G_i$, $G_1 \subset \mathbb{B}_s(n_1)$, $G'_{i+1} \subseteq \pi^{m_{i+1}}G'_i \subseteq \mathbb{B}_s(n_i)$ и любая вершина орграфа G'_{i+1} проходит по всем дугам орграфа G'_i.

Рассмотрим последовательность слов $\{x_i \in V_{G'_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, в которой слово x_i является префиксом слова x_{i+1}. Это можно сделать, так как по построению последовательности $\{G'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ любое слово $y \in V_{G'_{i+1}}$ содержит подсловами все слова из множества $V_{G'_i}$ и орграф G'_{i+1} сильно связен.

Итак, слово x_{i+1} содержит подслово, соответствующее каждой дуге орграфа $G'_i \subseteq \mathbb{B}_s(n_i)$, в частности, x_i является префиксом слова x_{i+1}.

Заметим, что предельное слово ω последовательности $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ слов равномерно рекуррентно. В самом деле, пусть $n < |x_i|$, тогда всякое подслово длины n слова ω встретится в любом его подслове длины $|x_{i+1}|$.

Докажем, что слово ω и есть искомое.

Пусть последовательность орграфов $\{R_m \subseteq \mathbb{B}_s(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ есть последовательность графов Рози слова ω. Докажем, что $R_{n_i} = G'_i$ для всех $i > 0$.

Пусть дуга $\langle u_1u_2\ldots u_{n_i}, u_2u_3\ldots u_{n_i+1}\rangle$ принадлежит орграфу R_{n_i}. Следовательно, слово $u_1u_2\ldots u_{n_i+1}$ является подсловом слова x_j при некотором $j > i$. Слово x_j как вершина орграфа $G'_j \subseteq \pi^{\sum_{k=i+1}^{j} m_k}G'_i$ является

путём в орграфе G'_i, а значит, дуга $\langle u_1u_2\dots u_{n_i}, u_2u_3\dots u_{n_i+1}\rangle$ принадлежит орграфу G'_i.

Пусть орграф R_{n_i} содержит вершину u. Тогда, как граф Рози продолжаемого факторного языка, он содержит некоторую дугу $\langle u, v\rangle$. Из предыдущего случая следует, что орграф G'_i также содержит вершину u.

Пусть дуга $\langle u_1u_2\dots u_{n_i}, u_2u_3\dots u_{n_i+1}\rangle$ принадлежит орграфу G'_i. Тогда по построению последовательности $\{G'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ слово x_{i+1} содержит подслово $u_1u_2\dots u_{n_i+1}$. Значит, и орграф R_{n_i} содержит дугу $\langle u_1u_2\dots u_{n_i}, u_2u_3\dots u_{n_i+1}\rangle$.

Пусть орграф G_i содержит вершину u. Тогда, как сильно связный орграф, он содержит некоторую дугу $\langle u, v\rangle$. Из предыдущего случая следует, что орграф R_{n_i} также содержит вершину u. Теорема 1 доказана.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белов А. Я., Чернятьев А. Л.** Слова медленного роста и перекладывания отрезков // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 159–160.
2. **Фрид А. Э.** О графах подслов DOL-последовательностей // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1999. — Т. 6, № 4. — С. 92–103.
3. **Aberkane A.** Words whose complexity satisfies $\lim p(n)/n = 1$ // Theor. Comput. Sci. — 2003. — T. 307, N 1. — P. 31–46.
4. **Cassaigne J.** Sequences with grouped factors // Developments in language theory III (DLT'97). — Thessaloniki: Aristote Univ. Thessaloniki, 1998. — P. 211–222.
5. **Rauzy G.** Suites à termes dans un alphabet fini // Seminar on Number Theory, 1982–1983. Exp. N 25. — Talence: Univ. Bordeaux I, 1983. — P. 16.

Салимов Павел Вадимович,
e-mail: ch.cat.s.smile@gmail.com

Статья поступила
14 апреля 2008 г.
Переработанный вариант —
18 августа 2008 г.