ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2008. Том 15, № 5. С. 76–99

УДК 519.865.3

РАВНОВЕСИЯ В МНОГОПЕРИОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С КРАТКОСРОЧНЫМ ПЛАНИРОВАНИЕМ*)

А. В. Сидоров

Аннотация. Исследуется многопериодная модель экономики с производством типа Эрроу — Дебре, в которой дополнительно допускается возможность потребительского инвестирования в производственный сектор, а также осуществления кредитных операций между потребителями на основе безарбитражной процентной ставки. Основным результатом является доказательство теоремы существования равновесия в многопериодной модели с близоруким планированием потребления, производственной и инвестиционной деятельности.

Ключевые слова: модель Эрроу — Дебре, конкурентное равновесие, процентная ставка, близорукое поведение.

Введение

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в [4], где рассмотрена некоторая модификация модели Эрроу — Дебре, позволяющая учесть инвестиционную деятельность участников потребительского сектора. Напомним, что классическая модель Эрроу — Дебре задаётся следующим набором параметров:

$$\mathcal{E} = \langle N,\ M,\ \{X_i,\ \succcurlyeq_i,\ \boldsymbol{\omega}^i\}_{i\in N},\ \{Y_j\}_{j\in M},\ \{\theta_{ij}\}_{i\in N, j\in M}\rangle, \tag{1}$$

где N — множество потребителей, X_i — потребительские множества с заданными на них отношениями предпочтения $\succcurlyeq_i$, $\boldsymbol{\omega}^i$ — индивидуальные начальные запасы потребителей, M — множество фирм, Y_j — технологические множества, θ_{ij} — доля участия потребителя $i \in N$ в доходе фирмы $j \in M$. При этом величины θ_{ij} заданы экзогенно, т. е. определены в некоторой предыстории и уже не могут быть изменены самим владельцем этих активов (см. [3, § 16.1]). В упомянутой выше работе [4] модель Эрроу — Дебре была модифицирована таким образом, что соответствующая прибавка к доходу от участия в прибыли производственного сектора

*)Работа выполнена при поддержке гранта № НШ–4113.2008.6.

получалась в результате инвестиционных усилий в предыдущем периоде. При этом решение о величине потребительского дохода, инвестируемого в производство, принималось самим потребителем, исходя из его собственных представлений об относительной ценности потребляемых благ в настоящем и будущем (дисконтирование полезности). В качестве основного результата была доказана теорема существования равновесия в однопериодном случае. Результат настоящей работы является обобщением указанной теоремы на многопериодный случай.

В силу несомненной тематической связанности этих двух работ часть результатов, относящихся к однопериодному случаю, без усилий переносится на многопериодную модель. Это касается, главным образом, ряда промежуточных результатов, которые носят «локальный» характер, т. е. относятся к отдельному временно́му интервалу. Использование этих результатов, не требующих никаких текстуальных изменений при обобщении на многопериодный случай, в настоящей работе сводится к ссылке на соответствующие «однопериодные» аналоги из [4]. Более детальное изложение касается основного качественного отличия многопериодной модели от её однопериодного «прародителя». В однопериодной модели планирование производственной деятельности и потребительской активности с необходимостью охватывало *весь* временно́й период функционирования экономики. При этом и потребительский, и производственный планы являлись по построению решениями соответствующих оптимизационных задач. В случае многопериодной модели допущение о том, что производитель и потребитель определяют оптимальные планы на весь многопериодный интервал функционирования, представляется чрезмерным. Более правдоподобным является представление о «близоруком» поведении, т. е. с опорой на текущую конъюнктуру и ближайшие перспективы.

1. Многопериодная модель экономики с инвестированием

1.1. Производственный сектор. В отличие от статической модели Эрроу — Дебре процессы производства и потребления предполагаются развертывающимися в дискретном времени $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Пусть $L = \{1, \dots, l\}$ — ассортимент всех имеющихся в экономике товаров. Номинально один и тот же товар $k \in L$ в каждом периоде t может иметь различную цену p_k^t и поэтому с экономической точки зрения должен рассматриваться как совокупность различных товаров, т. е. размерность пространства товаров будет равна $(T+1) \cdot l$. Здесь следует подчеркнуть, что каждый временно́й период t имеет некоторую *длительность,* которую мы будем считать равной единице. Это обстоятельство является существенным для моделирования производственного процесса, который совершается не мгновенно, а в течение всего периода t, причём производственные издержки относятся к началу периода, а получение и реализация конечной продукции — к его концу, т. е. прибыль инвесторов и произведённые товары становятся доступными только в следующем периоде $t+1$. В частности, реализация конечной продукции будет производиться уже по ценам $\mathbf{p}^{t+1}$. В связи с этим технологическое множество Y^t в каждом периоде t рассматривается как подмножество в $\left(-\mathbb{R}^L_+\right) \times \mathbb{R}^L_+$, где $\mathbb{R}^L_+ = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^L \mid \mathbf{y} \geqslant 0\right\}$, и каждый элемент множества Y^t может быть представлен в виде $\mathbf{y} = (-\mathbf{y}^-,\, \mathbf{y}^+)$, где $\mathbf{y}^\pm \geqslant 0$*. В этом случае $\mathbf{y}^-$ есть вектор *затрат*, указывающий на ассортимент и количество затрачиваемого сырья, а $\mathbf{y}^+$ — вектор *выпуска*, указывающий на ассортимент и количество выпускаемой конечной продукции. Элементы множества Y^t в дальнейшем будем называть *технологиями*.

Прежде чем сформулировать предположения, налагаемые на технологические множества, введём некоторые обозначения и понятия. По существу они идентичны соответствующим понятиям из [4], за исключением того, что теперь в обозначениях следует учитывать многопериодность.

Определение 1. *Границей эффективности* технологического множества Y^t называется множество

$$\operatorname{Eff}\left(Y^t\right) = \left\{\overline{\mathbf{y}} \in Y^t \mid (\forall \mathbf{y} > \overline{\mathbf{y}})\ \mathbf{y} \notin Y^t\right\}.$$

Определение 2. Пусть $\mathbf{y} \in Y^t$ — некоторая ненулевая допустимая технология такая, что луч $\Lambda(\mathbf{y}) = \mathbb{R}_+ \cdot \mathbf{y}$ содержится в Y^t. В этом случае будем говорить, что технология $\mathbf{y}$ *допускает постоянную отдачу от увеличения масштаба.*

С содержательной точки зрения это означает, что при любом $\lambda \geqslant 0$ пропорциональное увеличение затрат сырья в λ раз приведёт к увеличению выпуска конечной продукции как минимум в той же пропорции.

Пусть теперь $\left(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}\right) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^L_{++}$ — вектор, отображающий одновременно текущие цены $\mathbf{p}^t$ и цены следующего периода $\mathbf{p}^{t+1}$. Тогда для любой допустимой технологии $\mathbf{y} \in Y^t$ скалярное произведение $\Pi\left(\mathbf{p}, \mathbf{y}\right) :=$

---

*Здесь и далее для векторных неравенств будут использоваться следующие обозначения: $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{z}$ означает, что $y_k \geqslant z_k$ для всех k, $\mathbf{y} \gg \mathbf{z}$ означает, что $y_k > z_k$ для всех k, наконец $\mathbf{y} > \mathbf{z}$ означает, что $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{z}$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$. Кроме того, для множества всех строго положительных по всем компонентам векторов будет использоваться обозначение $\mathbb{R}^L_{++} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^L \mid \mathbf{y} \gg 0\}$.

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{p}^{t+1} \cdot \mathbf{y}^{+} - \mathbf{p}^{t} \cdot \mathbf{y}^{-}$ выражает чистую прибыль (разность выручки и издержек) при использовании технологии $\mathbf{y}$.

Определение 3. Технология $\mathbf{y} \in Y^t$ называется $\mathbf{p}$-*рентабельной*, если $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, и $\mathbf{p}$-*оптимальной*, если $\Pi(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \geqslant \Pi(\mathbf{p}, \mathbf{z})$ для любого $\mathbf{z} \in Y^t$.

Теперь сформулируем основные предположения, налагаемые на технологические множества.

Y1. Множество Y^t выпукло и замкнуто.

Y2. Множество Y^t удовлетворяет *условию свободного расходования* в $(-\mathbb{R}^L_+) \times \mathbb{R}^L_+$: если $\mathbf{y} \in Y^t$ и $\mathbf{y}' \in \left(-\mathbb{R}^L_+\right) \times \mathbb{R}^L_+$ таково, что $\mathbf{y}' \leqslant \mathbf{y}$, то $\mathbf{y}' \in Y^t$.

Y3. Множество Y^t удовлетворяет *условию отсутствия «рога изобилия»*: $0 \in \mathrm{Eff}(Y^t)$.

Y4. Множество Y^t удовлетворяет *условию убывания отдачи от увеличения масштаба*: для любой технологии $\mathbf{y} \in Y^t$, допускающей постоянную отдачу от увеличения масштаба, выполнено $\mathbf{y}^{+} = 0$.

Y5. Множество Y^t удовлетворяет *условию строгой выпуклости*: для любых $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathrm{Eff}(Y^t)$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}'$, и $\lambda \in (0,1)$ выполнено условие $\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{y}' \notin \mathrm{Eff}(Y^t)$.

Предположения Y1–Y3 являются стандартными для моделей типа Эрроу — Дебре. Условие Y4 означает, что не существует продуктивных технологий, допускающих постоянную отдачу от увеличения масштаба. Условие строгой выпуклости, вообще говоря, заранее предполагает выпуклость множества Y^t и дополнительно гарантирует отсутствие линейных участков на границе эффективности, что является условием однозначной разрешимости задачи производителя. Более подробный анализ этих предположений можно найти в [4].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* Y1–Y4 *и* $K \subset \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^L_{++}$ — *произвольный компакт. Тогда объединение множеств* $\mathbf{p}$-рентабельных *технологий в* Y^t *по всем* $(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) \in K$ *является ограниченным множеством. В частности, если* $K = \{(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})\}$ *одноэлементно, то множество всех* $\mathbf{p}$-*рентабельных технологий является непустым выпуклым компактным множеством.*

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* Y1–Y4. *Тогда для любого* $(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *множество* $\mathbf{p}$-*оптимальных технологий* $S^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$ *является непустым выпуклым компактным подмножеством границы эф-*

фективности $\mathrm{Eff}(Y^t)$, *точечно-множественное отображение*

$$S^t : (\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) \mapsto S^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$$

имеет замкнутый график во всей области определения и образ $S^t(K)$ *для любого компактного подмножества* $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$ *является ограниченным множеством. Если дополнительно выполнено условие* Y5, *то*

$$S^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = \{\mathbf{y}^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})\}$$

— одноэлементное множество и функция $\mathbf{y}^t : \mathbb{R}^{2L}_{++} \to Y^t$ *является непрерывной.*

Доказательства этих утверждений в силу их локального характера полностью идентичны доказательствам лемм 1 и 2 из [4].

Предположим теперь, что фирмы образуют конечное множество $M = \{1, \ldots, m\}$ и производственные возможности каждой фирмы $j \in M$ в периоде $t \in \{0, \ldots, T-1\}$ характеризуются технологическим множеством Y^t_j, удовлетворяющим условиям Y1–Y5. Тогда в силу предыдущей леммы определены непрерывные функции $\mathbf{y}^t_j(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$, характеризующие оптимальные производственные планы фирмы $j \in M$ в периоде t при ценах $(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$. Определим функцию совокупного производственного предложения в том же периоде

$$\mathbf{y}^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = \sum_{j \in M} \mathbf{y}^t_j(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}).$$

Тогда функции

$$\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = \sum_{j \in M} \mathbf{y}^{t-}_j(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}), \;\; \mathbf{y}^{t+}(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = \sum_{j \in M} \mathbf{y}^{t+}_j(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$$

характеризуют совокупную потребность в сырье и совокупный выпуск соответственно.

Заметим, что в силу условия Y3 равенство $\mathbf{y}^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = 0$, что, в свою очередь, эквивалентно выполнению равенства $\mathbf{y}^{t-}_j(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = 0$ для всех $j \in M$. Используя это обстоятельство, для каждого $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ определим следующую функцию

$$r^{t+1}(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = \begin{cases} \frac{(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) \cdot \mathbf{y}^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})}{\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})}, & \text{если } \mathbf{y}^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) = 0, \end{cases}$$

значение которой можно интерпретировать как среднюю доходность всего производственного сектора при ценах $(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$, т. е. величину совокупной чистой прибыли, отнесенной к совокупным затратам.

Лемма 3. *Функция* $r^{t+1}(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$ *непрерывна всюду в* $\mathbb{R}^{2L}_{++}$.

Доказательство этого утверждения для случая $T = 1$ содержится в [4, лемма 3]. В силу своего локального характера доказательство общего утверждения идентично вышеупомянутому с точностью до замены в обозначениях $(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1)$ на $(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$.

Пусть теперь $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \ldots, \mathbf{p}^T) \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$ — произвольная траектория цен на временно́м интервале $[0, 1, \ldots, T]$. Заметим, что определённые выше функции $\mathbf{y}^t$, $\mathbf{r}^{t+1}$ зависели только от текущих цен $\mathbf{p}^t$ и следующих цен $\mathbf{p}^{t+1}$, подобная ситуация будет воспроизводиться и в других локальных конструкциях, поэтому с целью уменьшения объёма дальнейших выкладок в качестве аргумента этих функций будем использовать всю траекторию цен $\mathbf{p}$, подразумевая, что фактически они зависят только от «своих» цен.

В силу сформулированных выше утверждений для всех $t \in \{1, \ldots, T\}$ определены величины $R_t(\mathbf{p}) = 1 + r^t(\mathbf{p})$, $R_{[t]}(\mathbf{p}) = \prod_{s=1}^{t} R_s(\mathbf{p})$ и вектор

$$PV(\mathbf{p}) = \left(\mathbf{p}^0, \frac{\mathbf{p}^1}{R_1(\mathbf{p})}, \ldots, \frac{\mathbf{p}^t}{R_{[t]}(\mathbf{p})}, \ldots, \frac{\mathbf{p}^T}{R_{[T]}(\mathbf{p})}\right).$$

Кроме того, вектор *совокупного производственного предложения* на временно́м интервале $[0, \ldots, T]$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = (-\mathbf{y}^{0-}(\mathbf{p}), \ldots, \mathbf{y}^{(t-1)+}(\mathbf{p}) - \mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p}), \ldots, \mathbf{y}^{(T-1)+}(\mathbf{p})) \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}.$$

Содержательный смысл этих величин будет обсуждаться ниже при описании потребительского сектора, а пока отметим некоторые их свойства.

Замечание 1. Функции

$$R_t : \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++} \to [1, +\infty), \quad R_{[t]} : \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++} \to [1, +\infty)$$

определены и непрерывны всюду в $\mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$. Вектор-функции

$$\mathbf{y} : \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++} \to \mathbb{R}^{(T+1)L}, \quad PV : \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++} \to \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$$

определены и непрерывны всюду в $\mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$ и удовлетворяют тождеству $PV(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{y}(\mathbf{p}) \equiv 0$ для всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$.

В доказательстве нуждается только последнее тождество, остальные утверждения тривиально следуют из леммы 3 и определений соответствующих объектов. Действительно, после приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{aligned} PV(\mathbf{p})\cdot\mathbf{y}(\mathbf{p}) &= \sum_{t=0}^{T-1}\left(\frac{\mathbf{p}^{t+1}}{R_{[t+1]}(\mathbf{p})}\cdot\mathbf{y}^{t+}(\mathbf{p}) - \frac{\mathbf{p}^{t}}{R_{[t]}(\mathbf{p})}\cdot\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p})\right) \\ &= \sum_{t=0}^{T-1}\frac{1}{R_{[t]}(\mathbf{p})}\left(\frac{\mathbf{p}^{t+1}\cdot\mathbf{y}^{t+}(\mathbf{p})}{R_{t+1}(\mathbf{p})} - \mathbf{p}^{t}\cdot\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p})\right). \end{aligned}$$

Покажем, что для всех $t\in\{0,\ldots,T-1\}$ имеют место равенства

$$\left(\frac{\mathbf{p}^{t+1}\cdot\mathbf{y}^{t+}(\mathbf{p})}{R_{t+1}(\mathbf{p})} - \mathbf{p}^{t}\cdot\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p})\right) = 0.$$

Если $\mathbf{y}^t(\mathbf{p}) = 0$, то это очевидно так. Пусть $\mathbf{y}^t(\mathbf{p}) \neq 0$, тогда из определения имеем

$$\begin{aligned} R_{t+1}(\mathbf{p}) = 1 + \frac{(\mathbf{p}^t,\mathbf{p}^{t+1})\cdot\mathbf{y}^t(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^t\cdot\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p})} &= \frac{(\mathbf{p}^t,\mathbf{p}^{t+1})\cdot\mathbf{y}^t(\mathbf{p}) + \mathbf{p}^t\cdot\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^t\cdot\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p})} \\ &= \frac{\mathbf{p}^{t+1}\cdot\mathbf{y}^{t+}(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^t\cdot\mathbf{y}^{t-}(\mathbf{p})}, \end{aligned}$$

отсюда легко следует требуемое равенство.

1.2. Потребительский сектор. В потребительском секторе экономики действуют экономические агенты, образующие конечное множество $N = \{1,\ldots,n\}$, и каждый участник $i\in N$ в период t располагает вектором начальных запасов $\boldsymbol{\omega}^{i,t}\in\mathbb{R}^L_+$. Потребительские предпочтения в периоде t учитывают не только текущее потребление $\mathbf{x}^t$, но и потребительский план для следующего периода, который мы будем обозначать через $\mathbf{z}^t$, поскольку, во-первых, формирование этого плана относится к периоду t, а во-вторых, этот план может отличаться от реального потребления $\mathbf{x}^{t+1}$ в периоде $t+1$, поскольку потребитель вправе скорректировать свои планы с учетом реалий нового периода.

Перейдём к описанию бюджетных ограничений при заданных ценах $(\mathbf{p}^t,\mathbf{p}^{t+1})\in\mathbb{R}^{2L}_{++}$. В отличие от классической модели Эрроу — Дебре (1) каждый потребитель в период t может капитализировать некоторую часть d_i^t своего дохода. При этом отрицательные значения d_i^t интерпретируются как заём в размере $\left|d_i^t\right|$. В следующем временно́м периоде

$t+1$ на инвестированные суммы (суммы займа) происходит начисление процентов в соответствии с процентной ставкой r^{t+1}, единой для всех типов финансовых операций. Вопрос о том, как именно определяется процентная ставка r^{t+1}, будет рассмотрен ниже. В данный момент как ставка r^{t+1}, так и цены $(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1})$ рассматриваются потребителем как экзогенные параметры. Тем самым величины дохода, направляемые на потребление в периоды t и $t+1$, составляют $\mathbf{p}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t} + R_t d_i^{t-1} - d_i^t$ и $\mathbf{p}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1} \cdot d_i^t$ соответственно, где $R_t = (1 + r^t)$ — множитель приращения процентов в периоде t. Поэтому бюджетное множество потребителя i в периоде t при ценах $(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}) \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$, текущей процентной ставке r^{t+1} и «инвестиционной предыстории» в виде предыдущей инвестиции d_i^{t-1} под проценты r^t определяется следующим образом:

$$B_i^t\big(\mathbf{p}, R, d_i\big) = \big\{(\mathbf{x}^{i,t}, \mathbf{z}^{i,t}) \in \mathbb{R}^{2L}_{+} \mid \exists d_i^t \in \mathbb{R} :$$
$$\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^{i,t} \leqslant \mathbf{p}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,r} + R_t d_i^{t-1} - d_i^t,\;\; \mathbf{p}^{t+1} \cdot \mathbf{z}^{i,t} \leqslant \mathbf{p}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1} \cdot d_i^t\big\}.$$

Здесь мы использовали сокращённую запись аргумента для B_i^t, поскольку параметры, от которых имеется фактическая зависимость бюджетного множества, однозначно восстанавливаются по номеру временнóго интервала t.

Заметим, что первое неравенство в данном определении можно заменить равенством, при этом бюджетное множество останется неизменным. Действительно, предположим, что $(\mathbf{x}^{i,t}, \mathbf{z}^{i,t}) \in B_i^t(\mathbf{p}, R, d_i)$, т. е. выполнены неравенства

$$\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^{i,t} \leqslant \mathbf{p}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,r} + R_t d_i^{t-1} - d_i^t,\;\; \mathbf{p}^{t+1} \cdot \mathbf{z}^{i,t} \leqslant \mathbf{p}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1} \cdot d_i^t.$$

Пусть $\widetilde{d}_i^t = R_t d_i^{t-1} + \mathbf{p}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,r} - \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^{i,t}$. Тогда имеет место равенство

$$\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^{i,t} = \mathbf{p}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,r} + R_t d_i^{t-1} - \widetilde{d}_i^t.$$

При этом в силу неравенства $d_i^t \leqslant \widetilde{d}_i^t$ и положительности R_{t+1} выполнено $\mathbf{p}^{t+1} \cdot \mathbf{z}^{i,t} \leqslant \mathbf{p}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1} \cdot d_i^t \leqslant \mathbf{p}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1} \cdot \widetilde{d}_i^t$, что и требовалось показать.

Таким образом,

$$B_i^t(\mathbf{p}, R, d_i) = \big\{(\mathbf{x}^{i,t}, \mathbf{z}^{i,t}) \in \mathbb{R}^{2L}_{+} \mid \exists d_i^t \in \mathbb{R} :$$
$$\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^{i,t} = \mathbf{p}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,r} + R_t d_i^{t-1} - d_i^t, \mathbf{p}^{t+1} \cdot \mathbf{z}^{i,t} \leqslant \mathbf{p}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1} \cdot d_i^t\big\}. \quad (2)$$

В дальнейшем мы будем использовать (2) как основное определение бюджетного множества.

Перейдём теперь к описанию потребительских предпочтений агента $i \in N$. Так же, как и в [4], полагаем, что они заданы полными транзитивными бинарными отношениями $\succcurlyeq_i^t$ на множестве $\mathbb{R}_+^{2L}$, т. е. потребитель в момент времени t сравнивает между собой потребительские планы, включающие в себя не только текущее потребление $\mathbf{x}^{i,t}$, но и запланированное на один период вперёд $\mathbf{z}^{i,t}$. Подобное «близорукое» поведение является наиболее правдоподобным для динамически развивающейся экономики, поскольку достоверный прогноз о достаточно отдалённых моментах времени, как правило, отсутствует. Исходя из этого, потребитель осуществляет выбор в этом бюджетном множестве наиболее предпочтительных (на ближайшую перспективу) элементов, формируя множество спроса

$$
\begin{aligned}
D_i^t(\mathbf{p}, R, d_i) = \big\{ &(\bar{\mathbf{x}}^{i,t}, \bar{\mathbf{z}}^{i,t}) \mid (\bar{\mathbf{x}}^{i,t}, \bar{\mathbf{z}}^{i,t}) \in B_i^t(\mathbf{p}, R, d_i), \\
&\forall (\mathbf{x}^{i,t}, \mathbf{z}^{i,t}) \in B_i^t(\mathbf{p}^t, R, d) \,:\, (\bar{\mathbf{x}}^{i,t}, \bar{\mathbf{z}}^{i,t}) \succcurlyeq_i^t (\mathbf{x}^{i,t}, \mathbf{z}^{i,t}) \big\}.
\end{aligned}
$$

В качестве «краевых условий» естественно полагать, что $d_i^0 \equiv 0$, так как у первого периода нет «предыстории», кроме того, предполагая в рамках настоящей статьи ограниченность функционирования экономики временем T, процесс принятия решений следует ограничить периодом $T-1$, в частности, реальный объём потребления $\mathbf{x}^{i,T}$ будет совпадать с запланированным в предыдущий период $\mathbf{z}^{i,T-1}$.

Отметим некоторые черты изучаемой модели, отличающие её от других многопериодных моделей экономики, среди которых наиболее известны *модели с перекрывающимися поколениями* (см., например, [1, гл. 5]). В этих моделях функционирование экономики происходит на неограниченном временно́м интервале, т. е. в наших обозначениях $T = +\infty$, в то время как период функционирования каждого индивида ограничен, и поэтому множество экономических агентов состоит из бесконечного числа сменяющих друг друга поколений, при этом некоторое время, как следует из названия модели, сотрудничающих друг с другом. Традиционно потребительский план каждого участника поколения (а иногда и всего поколения в целом) определяется как решение одной экстремальной задачи на весь период жизни его поколения, при этом каждое новое поколение начинает свою деятельность «с чистого листа». В отличие от этого в изучаемой модели поколения потребителей являются «долгоживущими», динамически корректирующими свои потребительские планы в соответствии с изменяющимися внешними обстоятельствами. В силу этого период функционирования системы приходится также считать конечным, что является недостатком в сравнении с моделью с перекрывающимися поколениями. Тем не менее изучаемая в данной работе модель может быть обобщена на случай бесконечного временно́го интервала, если рассматривать поколения потребителей, не перекрывающиеся, а *наследующие* друг другу.

Ниже будет предполагаться, что все потребительские отношения предпочтения удовлетворяют следующим условиям.

U1. Отношения предпочтения $\succcurlyeq_i^t$ непрерывны на $\mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L$, т. е. множества $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L \,|\, \mathbf{y} \succcurlyeq_i^t \mathbf{x}\}$ и $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L \,|\, \mathbf{x} \succcurlyeq_i^t \mathbf{y}\}$ замкнуты для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L$.

U2. Отношения предпочтения $\succcurlyeq_i^t$ строго выпуклы, т. е. для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L$ таких, что $\mathbf{x} \succcurlyeq_i^t \mathbf{y}$, и любого $\lambda \in (0,1)$ выполнено $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \succ_i^t \mathbf{y}$.

U3. Отношения предпочтения $\succcurlyeq_i^t$ локально ненасыщаемы вверх, т. е. для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L$ найдутся $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^L$ такие, что $\mathbf{x} + (\mathbf{v}, 0) \succ_i^t \mathbf{x}$, $\mathbf{x} + (0, \mathbf{w}) \succ_i^t \mathbf{x}$.

Из приведённого выше описания бюджетных множеств и множеств спроса следует, что за исключением начального периода в каждом последующем выбор потребителя не является вполне автономным, поскольку зависит в значительной степени от инвестиционно-потребительской стратегии поведения в предыдущие периоды деятельности. Поэтому объектом исследования будет не столько спрос в отдельные периоды, сколько *траектории спроса* на всём временно́м интервале $[0, 1, \ldots, T]$.

1.3. Взаимодействие секторов экономики. Рассмотрим оба сектора экономики в рамках единой системы, связав их с помощью операций кредитования (инвестирования). Начиная с этого момента, будем полагать, что процентная ставка r^{t+1} совпадает с общей доходностью производственного сектора $r^{t+1}(\mathbf{p})$. Более подробное обоснование этого отождествления, так называемого «условия безарбитражности» для безрисковых кредитных операций, можно найти в [4]. Соответственно определения бюджетных множеств и множеств спроса приобретают следующий вид:

$$B_i^t(\mathbf{p}, d_i) = \big\{(\mathbf{x}^{i,t}, \mathbf{z}^{i,t}) \in \mathbb{R}_+^{2L} \mid \exists d_i^t \in \mathbb{R} \,:\, \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^{i,t} = \mathbf{p}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,r} + R_t(\mathbf{p}) d_i^{t-1} - d_i^t, \\ \mathbf{p}^{t+1} \cdot \mathbf{z}^{i,t} \leqslant \mathbf{p}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1}(\mathbf{p}) \cdot d_i^t\big\}, \quad (3)$$

$$D_i^t(\mathbf{p}, d_i) = \big\{(\bar{\mathbf{x}}^{i,t}, \bar{\mathbf{z}}^{i,t}) \mid (\bar{\mathbf{x}}^{i,t}, \bar{\mathbf{z}}^{i,t}) \in B_i^t(\mathbf{p}, d_i), \\ \forall (\mathbf{x}^{i,t}, \mathbf{z}^{i,t}) \in B_i^t(\mathbf{p}, d_i) \,:\, (\bar{\mathbf{x}}^{i,t}, \bar{\mathbf{z}}^{i,t}) \succcurlyeq_i^t (\mathbf{x}^{i,t}, \mathbf{z}^{i,t})\big\},$$

в котором по-прежнему прослеживается зависимость от кредитной предыстории.

Введём некоторые вспомогательные конструкции, позволяющие упростить дальнейшее изложение. Пусть $\mathbf{q} = (\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^T) \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$ — некоторая траектория цен, $\boldsymbol{\omega}^i = (\boldsymbol{\omega}^{i,0}, \ldots, \boldsymbol{\omega}^{i,T}) \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{+}$ — «траектория» начальных запасов. Рассмотрим классическое бюджетное множество в модели чистого обмена при ценах $\mathbf{q}$ с начальными запасами $\boldsymbol{\omega}^i$:

$$\widetilde{B}_i(\mathbf{q}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{+} \mid \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} \leqslant \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}^i\right\}.$$

Определение 4. Вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^T) \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{+}$ называется *бюджетно-допустимой траекторией* относительно траектории цен $\mathbf{q}$, если для всех $t \in \{0, \ldots, T\}$ выполнено

$$(\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^t, 0, \boldsymbol{\omega}^{i,(t+2)}, \ldots, \boldsymbol{\omega}^{i,T}) \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}),$$

в частности, при $t = T$ получаем, что $\mathbf{x} \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q})$.

Бюджетно-допустимая траектория $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^T)$ называется *локально-оптимальной* относительно $\mathbf{q}$, если для всех $t \in \{0, \ldots, T-2\}$ найдутся $\bar{\mathbf{z}}^t \geqslant 0$ и $\bar{\mathbf{z}}^{T-1} = \bar{\mathbf{x}}^T$ такие, что выполнены следующие условия: для всех векторов $(\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t) \in \mathbb{R}^{2L}_{+}$, удовлетворяющих условию

$$(\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^{t-1}, \mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t, \boldsymbol{\omega}^{i,t+2}, \ldots, \boldsymbol{\omega}^{i,T}) \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}),$$

выполнено $(\bar{\mathbf{x}}^t, \bar{\mathbf{z}}^t) \succcurlyeq_i^t (\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены предположения* U1–U3. *Тогда для любого* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$ *существует единственная локально-оптимальная траектория* $(\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^T) \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q})$, *при этом выполнено равенство*

$$\mathbf{q} \cdot (\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^T) = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}^i.$$

Доказательство. Пусть $t = 0$, рассмотрим множество

$$B_0 = \{\mathbf{x} \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}) \mid \forall t \geqslant 2 : \mathbf{x}^t = \boldsymbol{\omega}^{i,t}\},$$

которое, очевидно, является непустым выпуклым компактом. Это же верно и для проекции множества B_0 на первые $2l$ компонент. В силу непрерывности и строгой выпуклости отношения предпочтения $\succcurlyeq_i^0$ существует единственный максимальный элемент $(\bar{\mathbf{x}}^0, \bar{\mathbf{z}}^0)$ в проекции B_0. Тем самым выполнено условие локальной оптимальности при $t = 0$, причём в силу единственности максимального элемента вектор $\bar{\mathbf{x}}^0$ является началом любой локально-оптимальной траектории.

Предположим теперь, что для некоторого $\tau \leqslant T-2$ доказано выполнение условий локальной оптимальности для всех $t \leqslant \tau - 1$ и, кроме того, доказано, что вектор $(\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^{\tau-1})$ является общим начальным отрезком для всех локально-оптимальных траекторий. Покажем однозначную продолжаемость этого отрезка на период τ. Рассмотрим множество $B_\tau = \{\mathbf{x} \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}) \mid (\forall t \leqslant \tau - 1)\, \mathbf{x}^t = \bar{\mathbf{x}}^t \& (\forall t \geqslant \tau + 2)\, \mathbf{x}^t = \boldsymbol{\omega}^{i,t}\}$, являющееся непустым выпуклым компактом, и спроектируем его на компоненты, соответствующие периодам τ и $\tau+1$. Элементы этой проекции $(\mathbf{x}^\tau, \mathbf{z}^\tau)$ в силу своего определения удовлетворяют условию

$$(\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^{\tau-1}, \mathbf{x}^\tau, \mathbf{z}^\tau, \boldsymbol{\omega}^{i,\tau+2}, \ldots, \boldsymbol{\omega}^{i,T}) \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}).$$

Как и ранее, в множестве B_τ существует единственный максимальный относительно $\succcurlyeq_i^t$ элемент $(\bar{\mathbf{x}}^t, \bar{\mathbf{z}}^t)$. Наконец, проводя аналогичные рассуждения при $\tau = T-1$, мы дополнительно учитываем второе краевое условие $\bar{\mathbf{x}}^T = \bar{\mathbf{z}}^{T-1}$. Таким образом, опираясь только на определение локальной оптимальности и свойства отношений предпочтений, мы построили единственную локально-оптимальную траекторию $(\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^T)$, при этом тождество Вальраса $\mathbf{q} \cdot (\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^T) = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}^i$ является тривиальным следствием локальной ненасыщаемости отношения предпочтения $\succcurlyeq_i^T$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{p} = (\mathbf{p}^0, \ldots, \mathbf{p}^T) \in \mathbb{R}_{++}^{(T+1)L}$ *— произвольная траектория цен,* $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^0, \ldots, \mathbf{x}^T) \in \mathbb{R}_{+}^{(T+1)L}$. *Тогда* $\mathbf{x}$ *— бюджетно-допустимая траектория относительно траектории приведённых цен* $PV(\mathbf{p})$ *тогда и только тогда, когда для всех* $t \in \{0, \ldots, T-1\}$ *найдутся векторы* $\mathbf{z}^t \geqslant 0$, $\mathbf{z}^{T-1} = \mathbf{x}^T$ *и числа* d_i^{t-1} *(при* $t = 0$ *полагаем* $d_i^{-1} = 0$*) такие, что* $(\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t) \in B_i^t(\mathbf{p}, d_i)$.

Кроме того, $(\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^{\tau-1})$ *является локально-оптимальной относительно* $PV(\mathbf{p})$ *траекторией тогда и только тогда, когда для всех* $t \in \{0, \ldots, T-1\}$ *найдутся векторы* $\bar{\mathbf{z}}^t \geqslant 0$, $\bar{\mathbf{z}}^{T-1} = \bar{\mathbf{x}}^T$ *такие, что* $(\bar{\mathbf{x}}^t, \bar{\mathbf{z}}^t) \in D_i^t(\mathbf{p}, d_i(\mathbf{p}))$, *где все числа* $d_i^t(\mathbf{p})$ *задаются однозначно вектором* $\mathbf{p}$.

Доказательство. Докажем вначале первую эквивалентность.

Необходимость. Пусть выполнены включения $(\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t) \in B_i^t(\mathbf{p}, d_i)$ для всех t. Из всех бюджетных ограничений выберем те, в которых участвуют все $\mathbf{x}^t$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{p}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,0} - d_i^0,\\
&\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 = \mathbf{p}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,1} + R_1(\mathbf{p}) d_i^0 - d_i^1,\\
&\qquad\qquad \dots\\
&\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{x}^T \leqslant \mathbf{p}^T \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,T} + R_T(\mathbf{p}) d_i^{T-1}.
\end{aligned}$$

Каждое ограничение с номером t разделим на положительное число $R_{[t]}(\mathbf{p})$, полагая $R_{[0]}(\mathbf{p}) = 1$. Просуммировав полученные соотношения, получим неравенство $PV(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} \leqslant PV(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\omega}^i$. Пусть теперь $t \leqslant T-2$. Рассмотрим следующую систему ограничений, пополненную тривиальными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{p}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,0} - d_i^{0,},\\
&\qquad\qquad \dots\\
&\mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^t = \mathbf{p}^t \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t} + R_t(\mathbf{p}) d_i^{t-1} - d_i^t,\\
&\mathbf{p}^{\mathbf{t+1}} \cdot 0 \leqslant \mathbf{p}^{t+1} \cdot \mathbf{z}^t \leqslant \mathbf{p}^{t+1} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1}(\mathbf{p}) d_i^t,\\
&\mathbf{p}^{t+2} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+2} = \mathbf{p}^{t+2} \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,t+2},\\
&\qquad\qquad \dots\\
&\mathbf{p}^T \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,T} = \mathbf{p}^T \cdot \boldsymbol{\omega}^{i,T}.
\end{aligned}$$

Снова разделив соответствующие выражения на $R_{[t]}(\mathbf{p})$ и просуммировав их, получим неравенство

$$PV(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^t, 0, \boldsymbol{\omega}^{i,t+2}, \dots, \boldsymbol{\omega}^{i,T}) \leqslant PV(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\omega}^i.$$

Достаточность. Пусть $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^T) \in \mathbb{R}_+^{(T+1)L}$ — бюджетно-допустимая относительно $PV(\mathbf{p})$ траектория. Определим по индукции числа $d_i^t = \mathbf{p}^t \cdot (\boldsymbol{\omega}^{i,t} - \mathbf{x}^t) + R_t(\mathbf{p}) d_i^{t-1}$, полагая $d_i^{-1} = 0$. Покажем далее, что векторы $\mathbf{z}^t = 0$ при $t \leqslant T-2$, $\mathbf{z}^{T-1} = \mathbf{x}^T$, удовлетворяют всем условиям, достаточным для принадлежности $(\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t) \in B_i^t(\mathbf{p}^t, \mathbf{p}^{t+1}, d_i^{t-1})$. Действительно, для этого достаточно показать лишь неотрицательность правых частей бюджетных ограничений на $\mathbf{z}^t$, которые равны

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^t \boldsymbol{\omega}^{i,t+1} + R_{t+1}(\mathbf{p}) d_i^t = R_{[t+1]}(\mathbf{p})[&PV(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\omega}^i\\
&- PV(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^t, 0, \boldsymbol{\omega}^{i,t+2}, \dots, \boldsymbol{\omega}^{i,T})].
\end{aligned}$$

Указанное равенство получается путём рекуррентных подстановок выражений для d_i^t с последующим приведением подобных слагаемых. Наконец, неотрицательность полученных выражений следует из условия бюджетной допустимости траектории $\mathbf{x}$ относительно вектора цен $PV(\mathbf{p})$.

Пусть теперь $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}^0, \ldots, \bar{\mathbf{x}}^T)$ — локально-оптимальная траектория относительно вектора цен $PV(\mathbf{p})$. С учётом доказанных выше утверждений указанная эквивалентность условий следует непосредственно из определения локальной оптимальности. Лемма 5 доказана.

В силу доказанных выше утверждений для каждого $i \in N$ определена функция $\mathbf{x}^i : \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++} \to \mathbb{R}^{(T+1)L}_{+}$, сопоставляющая каждой траектории цен $\mathbf{p}$ единственную при этих ценах локально-оптимальную относительно вектора $PV(\mathbf{p})$ траекторию $\mathbf{x}^i(\mathbf{p})$. Тем самым в $\mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$ определена и функция совокупного спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \sum\limits_{i \in N} \mathbf{x}^i(\mathbf{p})$.

Сформулируем теперь основное понятие настоящей работы.

Определение 5. Вектор $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ называется *равновесной системой цен*, если имеет место равенство совокупного спроса и совокупного предложения: $\mathbf{x}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{y}(\mathbf{p}^*) + \boldsymbol{\omega}$.

В дополнение к использованным ранее предположениям о параметрах нашей модели экономики сформулируем ещё два.

U4 (условие ресурсной связности). Для любых $k, k' \in L$, $t, t' \in \{1, \ldots, T\}$ таких, что $(k,t) \neq (k',t')$ и $|t - t'| \leqslant 1$, найдётся участник $i \in N$, у которого отношение предпочтения $\succcurlyeq^t_i$ монотонно возрастает относительно $x^{i,t}_k$ при том, что $\boldsymbol{\omega}^{i,t'}_{k'} > 0$.

Y6 (условие производственной ненасыщаемости). Для любого периода t и любого элемента $\mathbf{y} \in Y^t = \sum\limits_{j \in M} Y^t_j$ найдётся $\mathbf{z} \in Y^t$ такой, что $\mathbf{z}^+ > \mathbf{y}^+$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Пусть в производственном секторе все технологические множества удовлетворяют условиям* Y1–Y6, *а отношения предпочтения* $\succcurlyeq^t_i$ *— условиям* U1–U4, *и, кроме того,* $\boldsymbol{\omega}^{i,t} \neq 0$ *для всех* $i \in N$, $t \in \{0, \ldots, T\}$. *Тогда существует равновесная система цен* $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^{(T+1)\cdot L}_{++}$.

2. Вспомогательные утверждения

В настоящем разделе приведены некоторые технические результаты, используемые в доказательстве теоремы существования. Значительная часть из них представляют собой обобщения или модификации (иногда совершенно незначительные) результатов, опубликованных в [4].

Пусть $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$, $t \in \{0, \ldots, T-1\}$ и $\alpha \geqslant 1$. Положим

$$f^t_{\mathbf{q}}(\alpha) = (\mathbf{q}^t, \mathbf{q}^{t+1}) \cdot \mathbf{y}^t(\mathbf{q}^t, \alpha\mathbf{q}^{t+1}).$$

Лемма 6. *Функция $f^t_{\mathbf{q}}(\alpha)$ является невозрастающей на множестве $[1,+\infty)$, и для любого числа $v \leqslant f^t_{\mathbf{q}}(1)$ найдутся $1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < +\infty$ такие, что $(f^t_{\mathbf{q}})^{-1}(v) = [\alpha_1, \alpha_2]$. При этом функция $\mathbf{y}^t(\mathbf{q}^t, \alpha\mathbf{q}^{t+1})$ постоянна на $[\alpha_1, \alpha_2]$.*

Доказательство этого утверждения при $t = 0$ содержится в [4, следствие 3]. В силу локального характера утверждения доказательство для произвольного t полностью идентично вышеупомянутому с точностью до замены $(\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1)$ на $(\mathbf{q}^t, \mathbf{q}^{t+1})$.

Лемма 7. *Для любого вектора $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$ прообраз $PV^{-1}(\mathbf{q})$ является непустым выпуклым компактным подмножеством в $\mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$. При этом для любого $\lambda > 0$ выполнено $PV^{-1}(\lambda\mathbf{q}) = \lambda PV^{-1}(\mathbf{q})$ и множество $\mathbf{y}(PV^{-1}(\mathbf{q}))$ одноэлементно.*

Доказательство. Для $T = 1$ это утверждение было доказано в [4, лемма 9]. Доказательство общего случая будет проведено по индукции с использованием предыдущей леммы. Точнее говоря, покажем, что для любого $\tau \leqslant T$ найдутся конечные последовательности чисел $1 \leqslant \alpha^t_1 \leqslant \alpha^t_2$, $1 \leqslant t \leqslant \tau$ такие, что

$$PV^{-1}_\tau(\mathbf{q}^0, \ldots, \mathbf{q}^\tau) = \{\mathbf{q}^0\} \times [\alpha^1_1, \alpha^1_2]\mathbf{q}^1 \times [\alpha^1_1\alpha^2_1, \alpha^1_2\alpha^2_2]\mathbf{q}^2 \times \ldots \\ \times \left[\prod_{t=1}^{\tau} \alpha^t_1, \prod_{t=1}^{\tau} \alpha^t_2\right] \mathbf{q}^\tau,$$

где $[\alpha_1, \alpha_2]\mathbf{q}$ обозначает множество всех векторов вида $\alpha\mathbf{q}$ для $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, а $PV_\tau(\mathbf{p})$ — множество всех проекций элементов из $PV(\mathbf{p})$ на первые $(\tau+1)l$ компонент.

Базис индукции. Пусть $\tau = 1$. Рассмотрим множество всех таких векторов $(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1)$, что $PV_1(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1) = (\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1)$. В силу определения $PV(\mathbf{p})$ выполнены равенства $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, $\mathbf{p}^1 = \alpha\mathbf{q}^1$, где

$$\alpha = R_1(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1) = R_{[1]}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1) \geqslant 1.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для $\mathbf{p}^0$ и $\mathbf{p}^1$, получаем, что α должно удовлетворять тождеству

$$\alpha = R_1(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1) = \frac{\alpha\mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{y}^{0+}(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1)}{\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{y}^{0-}(\mathbf{q}^0, \alpha\mathbf{q}^1)},$$

что эквивалентно равенству $f^0_{\mathbf{q}}(\alpha) = 0$. В силу леммы 6 все такие α образуют отрезок $\left[\alpha^1_1, \alpha^1_2\right]$, следовательно $PV^{-1}_1(\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^1) = \{\mathbf{q}^0\} \times \left[\alpha^1_1, \alpha^1_2\right]\mathbf{q}^1$.

Шаг индукции. Предположим, что для некоторого $\tau \leqslant T-1$ утверждение доказано. Рассмотрим множество всех таких векторов $(\mathbf{p}^0, \ldots, \mathbf{p}^\tau, \mathbf{p}^{\tau+1})$, что $PV_{\tau+1}(\mathbf{p}^0, \ldots, \mathbf{p}^\tau, \mathbf{p}^{\tau+1}) = (\mathbf{q}^0, \ldots, \mathbf{q}^\tau, \mathbf{q}^{\tau+1})$. В частности, $PV_\tau(\mathbf{p}^0, \ldots, \mathbf{p}^\tau) = (\mathbf{q}^0, \ldots, \mathbf{q}^\tau)$ в силу определения отображения PV, следовательно,

$$(\mathbf{p}^0, \ldots, \mathbf{p}^\tau) \in \{\mathbf{q}^0\} \times \left[\alpha_1^1, \alpha_2^1\right]\mathbf{q}^1 \times \left[\alpha_1^1\alpha_1^2, \alpha_2^1\alpha_2^2\right]\mathbf{q}^2 \times \ldots \times \left[\prod_{t=1}^{\tau}\alpha_1^t, \prod_{t=1}^{\tau}\alpha_2^t\right]\mathbf{q}^\tau$$

для некоторых $\alpha_1^t \leqslant \alpha_2^t$, $1 \leqslant t \leqslant \tau$. Пусть $\beta^1, \ldots, \beta^\tau$ — такие элементы соответствующих отрезков, что $(\mathbf{p}^0, \ldots, \mathbf{p}^\tau) = (\mathbf{q}^0, \beta^1\mathbf{q}^1, \ldots, \beta^\tau\mathbf{q}^\tau)$. Заметим, что в силу определения отображения PV для всех $t \leqslant \tau$ выполнено $\beta^t = R_{[t]}(\mathbf{p})$ и искомый вектор $\mathbf{p}^{\tau+1}$ должен быть положительно пропорционален вектору $\mathbf{q}^{\tau+1}$. Будем искать его в виде $\mathbf{p}^{\tau+1} = \alpha \cdot \beta^\tau\mathbf{q}^{\tau+1}$, что не ограничивает общности ввиду $\beta^\tau > 0$. С другой стороны, прямо из определения $PV(\mathbf{p})$ следует соотношение

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{\tau+1} &= R_{[\tau+1]}(\mathbf{p})\mathbf{q}^{\tau+1} = R_{[\tau]}(\mathbf{p})R_{\tau+1}(\mathbf{p}^\tau, \mathbf{p}^{\tau+1})\mathbf{q}^{\tau+1} \\ &= \beta^\tau R_{\tau+1}(\mathbf{p}^\tau, \mathbf{p}^{\tau+1})\mathbf{q}^{\tau+1} = \beta^\tau R_{\tau+1}(\beta^\tau\mathbf{q}^\tau, \mathbf{p}^{\tau+1})\mathbf{q}^{\tau+1}.\end{aligned}$$

Подставляя предыдущее выражение для $\mathbf{p}^{\tau+1}$, получаем, что α должно удовлетворять условию

$$\alpha\beta^\tau = \beta^\tau R_{\tau+1}(\beta^\tau\mathbf{q}^\tau, \alpha\beta^\tau\mathbf{q}^{\tau+1}) = \beta^\tau R_{\tau+1}(\mathbf{q}^\tau, \alpha\mathbf{q}^{\tau+1})$$

ввиду свойства однородности степени нуль для функции $R_{\tau+1}$. Таким образом, $\alpha = R_{\tau+1}(\mathbf{q}^\tau, \alpha\mathbf{q}^{\tau+1})$, что снова приводит нас к эквивалентному условию $f_{\mathbf{q}}^{\tau+1}(\alpha) = 0$, порождающему в силу леммы 6 отрезок $\left[\alpha_1^{\tau+1}, \alpha_2^{\tau+1}\right]$ возможных значений для α. Заметим, что это равенство уже не содержит зависимости от конкретного выбора множителей β^t, поэтому полученный таким образом множитель α порождает вектор $\mathbf{p}^{\tau+1} = \alpha \cdot \beta^\tau\mathbf{q}^{\tau+1}$, дополняющий $(\mathbf{p}^0, \ldots, \mathbf{p}^\tau)$ до элемента

$$(\mathbf{p}^0, \ldots, \mathbf{p}^{\tau+1}) \in PV_{\tau+1}^{-1}(\mathbf{q}^0, \ldots, \mathbf{q}^{\tau+1}).$$

Продолжая индукционный процесс до $\tau = T$, мы получим доказательство утверждения о структуре множества $PV^{-1}(\mathbf{q})$. Свойство положительной однородности степени 1 для точечно-множественного соответствия PV^{-1} тривиально следует из соответствующего свойства для PV.

Покажем теперь одноэлементность множества $\mathbf{y}(PV^{-1}(\mathbf{q}))$. Пусть $\mathbf{p}$, $\overline{\mathbf{p}}$ — два различных элемента из множества $PV^{-1}(\mathbf{q})$, тогда в силу предыдущих рассуждений

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{q}^0, \alpha^1\mathbf{q}^1, \alpha^1\alpha^2\mathbf{q}^2, \ldots, \prod_{t=1}^{T}\alpha^t\mathbf{q}^T\right),$$
$$\overline{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{q}^0, \overline{\alpha}^1\mathbf{q}^1, \overline{\alpha}^1\overline{\alpha}^2\mathbf{q}^2, \ldots, \prod_{t=1}^{T}\overline{\alpha}^t\mathbf{q}^T\right)$$

для некоторых $\alpha^t, \overline{\alpha}^t \in \left[\alpha_1^t, \alpha_2^t\right]$. Сравним значения $\mathbf{y}^\tau(\mathbf{p}^\tau,\, \mathbf{p}^{\tau+1})$ и $\mathbf{y}^\tau(\overline{\mathbf{p}}^\tau,\, \overline{\mathbf{p}}^{\tau+1})$ для произвольного $\tau \leqslant T-1$. Получим

$$\mathbf{y}^\tau(\mathbf{p}^\tau, \mathbf{p}^{\tau+1}) = \mathbf{y}^\tau\left(\prod_{t=1}^{\tau}\alpha^t\mathbf{q}^\tau, \prod_{t=1}^{\tau}\alpha^t\alpha^{\tau+1}\mathbf{q}^{\tau+1}\right) = \mathbf{y}^\tau(\mathbf{q}^\tau, \alpha^{\tau+1}\mathbf{q}^{\tau+1})$$

в силу свойства однородности степени нуль для функции $\mathbf{y}^\tau$, аналогично, $\mathbf{y}^\tau(\overline{\mathbf{p}}^\tau, \overline{\mathbf{p}}^{\tau+1}) = \mathbf{y}^\tau(\mathbf{q}^\tau, \overline{\alpha}^{\tau+1}\mathbf{q}^{\tau+1})$, где $\alpha^{\tau+1}, \overline{\alpha}^{\tau+1} \in \left[\alpha_1^{\tau+1}, \alpha_2^{\tau+1}\right]$. По лемме 6 в силу постоянства функции $\mathbf{y}^\tau(\mathbf{q}^\tau, \alpha\mathbf{q}^{\tau+1})$ на $\left[\alpha_1^{\tau+1}, \alpha_2^{\tau+1}\right]$ получим $\mathbf{y}^\tau(\mathbf{p}^\tau, \mathbf{p}^{\tau+1}) = \mathbf{y}^\tau(\overline{\mathbf{p}}^\tau, \overline{\mathbf{p}}^{\tau+1})$ для всех $\tau \leqslant T-1$. Отсюда и из определения $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ следует, что $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{y}(\overline{\mathbf{p}})$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Точечно-множественное соответствие*

$$PV^{-1} : \mathbf{q} \mapsto PV^{-1}(\mathbf{q})$$

имеет замкнутый график, и множество $PV^{-1}(K)$ ограничено для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}_{++}^{L(T+1)}$.

Доказательство. Для $T = 1$ этот результат доказан в [4, лемма 9]. Обобщим его на случай произвольного T. Пусть имеются сходящиеся последовательности $\mathbf{q}_n \to \mathbf{q}$, $\mathbf{p}_n \in PV^{-1}(\mathbf{q}_n)$, $\mathbf{p}_n \to \mathbf{p}$. Покажем, что $\mathbf{p} \in PV^{-1}(\mathbf{q})$. Для любого $\tau \in \{0, \ldots, T\}$ выполнено $\mathbf{q}_n^\tau \to \mathbf{q}^\tau$, $\mathbf{p}_n^\tau \to \mathbf{p}^\tau$. При этом в силу предыдущей леммы существуют последовательности чисел $\alpha_n^t \geqslant 1$ для $t \in \{1, \ldots, T\}$ такие, что $\mathbf{p}_n^\tau = \prod_{t=1}^{\tau}\alpha_n^t\mathbf{q}_n^\tau$ и $f_{\mathbf{q}_n}(\alpha_n^t) = 0$. Заметим, что все последовательности α_n^t являются сходящимися. Действительно, для $t = 1$ имеем

$$\alpha_n^1 = \frac{\|\mathbf{p}_n^t\|}{\|\mathbf{q}_n^t\|} \to \alpha^1 = \frac{\|\mathbf{p}^t\|}{\|\mathbf{q}^t\|} \geqslant 1,$$

остальные пределы вычисляются из соотношений $\mathbf{p}_n^\tau = \prod\limits_{t=1}^{\tau} \alpha_n^t \mathbf{q}_n^\tau$ рекуррентно. Кроме того, в силу непрерывности функции $f_{\mathbf{q}}(\alpha)$ получаем, что $f_{\mathbf{q}}(\alpha^t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{\mathbf{q}_n}(\alpha_n^t) = 0$. В силу рассуждений, проведённых при доказательстве предыдущей леммы это в точности означает, что

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{q}^0, \alpha^1\mathbf{q}^1, \alpha^1\alpha^2\mathbf{q}^2, \ldots, \prod_{t=1}^{T} \alpha^t \mathbf{q}^T\right) \in PV^{-1}(\mathbf{q}).$$

Докажем теперь ограниченность прообраза произвольного компакта $PV^{-1}(K)$. Предположим противное, т. е. что существует неограниченная последовательность $\mathbf{p}_n \in PV^{-1}(\mathbf{q}_n)$ для некоторой последовательности $\mathbf{q}_n$ элементов компактного множества K. Без ограничения общности последовательность $\mathbf{q}_n$ можно считать сходящейся. Как и ранее получаем, что $\mathbf{p}_n^\tau = \prod\limits_{t=1}^{\tau} \alpha_n^t \mathbf{q}_n^\tau$ для соответствующих последовательностей α_n^t, при этом неограниченность $\mathbf{p}_n$ означает неограниченность некоторой последовательности α_n^t. Рассмотрим минимальное τ, при котором α_n^τ неограничена, тогда последовательность векторов

$$\frac{1}{\prod\limits_{t=1}^{\tau-1} \alpha_n^t}\left(\mathbf{p}_n^{\tau-1}, \mathbf{p}_n^\tau\right) = \frac{1}{\prod\limits_{t=1}^{\tau-1} \alpha_n^t}\left(\prod_{t=1}^{\tau-1} \alpha_n^t \mathbf{q}_n^{\tau-1}, \prod_{t=1}^{\tau} \alpha_n^t \mathbf{q}_n^\tau\right) = \left(\mathbf{q}_n^{\tau-1}, \alpha_n^\tau \mathbf{q}_n^\tau\right)$$

также неограничена, причём по построению

$$\frac{1}{\prod\limits_{t=1}^{\tau-1} \alpha_n^t}\left(\mathbf{p}_n^{\tau-1}, \mathbf{p}_n^\tau\right) \in PV_1^{-1}\left(\mathbf{q}_n^{\tau-1}, \mathbf{q}_n^\tau\right),$$

где PV_1 — функция приведённых цен, соответствующая случаю $T = 1$. В силу сходимости последовательности $\mathbf{q}_n$ последовательность $\left(\mathbf{q}_n^{\tau-1}, \mathbf{q}_n^\tau\right)$ также является сходящейся, поэтому существует компактное множество $K_\tau \subset \mathbb{R}_{++}^{2l}$, содержащее в себе последовательность $\left(\mathbf{q}_n^{\tau-1}, \mathbf{q}_n^\tau\right)$. Таким образом, прообраз $PV_1^{-1}(K_\tau)$, содержащий неограниченную последовательность $\frac{1}{\prod_{t=1}^{\tau-1} \alpha_n^t}\left(\mathbf{p}_n^{\tau-1}, \mathbf{p}_n^\tau\right)$, является неограниченным множеством, что противоречит утверждению леммы 9 из [4]. Лемма 8 доказана.

Следствие 1. *При любом* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{++}^{T\cdot L}$ *множество* $\widehat{\mathbf{y}}(\mathbf{q}) = \mathbf{y}(PV^{-1}(\mathbf{q}))$ *является одноэлементным. Кроме того, функция* $\widehat{\mathbf{y}} : \mathbb{R}_{++}^{2L} \to \mathbb{R}^{2L}$ *непрерывна, положительно однородна степени нуль и при любом* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{++}^{2L}$ *справедливо тождество* $\mathbf{q} \cdot \widehat{\mathbf{y}}(\mathbf{q}) \equiv 0$.

Пусть $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$ — произвольный элемент, через $\widehat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{q})$ обозначим локально-оптимальную траекторию потребления для индивида $i \in N$ при ценах $\mathbf{q}$, которая существует и единственна в силу леммы 4.

Лемма 9. *Если выполнены предположения* U1–U3, *а начальные запасы* $\boldsymbol{\omega}^{i,t}$ *отличны от* 0 *при всех* t, *то функция* $\widehat{\mathbf{x}}^i : \mathbb{R}^{(T+1)\cdot L}_{++} \to \mathbb{R}^L_+$ *является непрерывной, положительно однородной степени нуль и удовлетворяет закону Вальраса: при любом* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{(T+1)\cdot L}_{++}$ *выполнено тождество* $\mathbf{q} \cdot \widehat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}^i$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность цен $\mathbf{q}_n \to \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$. Положим $\mathbf{x}_n = \widehat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{q}_n)$. Требуется показать, что последовательность $\mathbf{x}_n$ является сходящейся к точке $\widehat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{q})$. Заметим вначале, что последовательность $\mathbf{x}_n$ ограничена. Действительно, в силу строгой положительности всех компонент предельной точки $\mathbf{q}$ найдутся положительные числа $C > c > 0$, для которых

$$c \leqslant \inf_{j,n}(q_j)_n, \quad C \geqslant \sup_{j,n}(q_j)_n.$$

Тогда для всех компонент всех членов последовательности имеем следующие ограничения:

$$0 \leqslant (x_j)_n \leqslant \frac{C \cdot (T+1)L}{c} \max_{t,k} \omega^{i,t}_k.$$

Таким образом, последовательность $\mathbf{x}_n$ имеет по меньшей мере одну предельную точку. Для доказательства непрерывности достаточно показать, что любая предельная точка $\overline{\mathbf{x}}$ совпадает с $\widehat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{q})$. В свою очередь, для этого достаточно показать локальную оптимальность $\overline{\mathbf{x}}$ при ценах $\mathbf{q}$, тогда указанное совпадение будет следовать из единственности локально-оптимальной траектории.

Согласно определению локальной оптимальности нужно отыскать такой вектор $\overline{\mathbf{z}}^t \geqslant 0$, что $(\overline{\mathbf{x}}^t, \overline{\mathbf{z}}^t) \succcurlyeq^t_i (\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t)$ для всех элементов $(\overline{\mathbf{x}}^0, \ldots, \overline{\mathbf{x}}^{t-1}, \mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t, \boldsymbol{\omega}^{i,t+2}, \ldots, \boldsymbol{\omega}^{i,T}) \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q})$ при том, что $(\overline{\mathbf{x}}^0, \ldots, \overline{\mathbf{x}}^{t-1}, \overline{\mathbf{x}}^t, \overline{\mathbf{z}}^t, \boldsymbol{\omega}^{i,t+2}, \ldots, \boldsymbol{\omega}^{i,T}) \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q})$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ — некоторое число, тогда в силу сходимости $\mathbf{x}_n \to \overline{\mathbf{x}}$ для достаточно больших номеров имеем

$$\left(\mathbf{x}^0_n, \ldots, \mathbf{x}^{t-1}_n, \varepsilon\mathbf{x}^t, \varepsilon\mathbf{z}^t, \boldsymbol{\omega}^{i,t+2}, \ldots, \boldsymbol{\omega}^{i,T}\right) \in \widetilde{B}_i(\mathbf{q}_n).$$

Ввиду того, что $\mathbf{x}_n$ — локально-оптимальная траектория при ценах $\mathbf{q}_n$, выполнено $\left(\mathbf{x}^t_n, \mathbf{z}^t_n\right) \succcurlyeq^t_i (\varepsilon\mathbf{x}^t, \varepsilon\mathbf{z}^t)$. В силу доказанного выше последовательность $\mathbf{z}^t_n$ ограничена, поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{z}^t_n \to \overline{\mathbf{z}}^t$. Отсюда в силу полунепрерывности сверху отношения предпочтения для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ получим

$$(\overline{\mathbf{x}}^t, \overline{\mathbf{z}}^t) \succcurlyeq_i^t (\varepsilon \mathbf{x}^t, \varepsilon \mathbf{z}^t).$$

Далее, переходя к пределу по $\varepsilon \to 1$ и используя полунепрерывность снизу для отношения предпочтения, получаем требуемое соотношение $(\overline{\mathbf{x}}^t, \overline{\mathbf{z}}^t) \succcurlyeq_i^t (\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t)$. Тем самым непрерывность функции $\widehat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{q})$ доказана. Свойство однородности тривиально следует из однородности определяющих неравенств. Наконец, тождество Вальраса для локально-оптимальных траекторий уже было доказано в лемме 4.

Заметим, что в силу леммы 5 $\widehat{\mathbf{x}}^i(PV(\mathbf{p})) \equiv \mathbf{x}^i(\mathbf{p})$ для всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^{(T+1)L}$, откуда, в частности, следуют свойства непрерывности и однородности для функции спроса $\mathbf{x}^i(\mathbf{p})$. Закон Вальраса для функции $\mathbf{x}^i(\mathbf{p})$ не имеет места, однако в силу доказанного выше выполнено тождество Вальраса относительно приведённых цен:

$$PV(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}^i(\mathbf{p}) = PV(\mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\omega}^i.$$

Определим теперь функцию $\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q})$, полагая

$$\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q}) = \sum_{i \in N} \widehat{\mathbf{x}}^i(\mathbf{q}) - \sum_{i \in N} \boldsymbol{\omega}^i - \widehat{\mathbf{y}}(\mathbf{q}).$$

В силу доказанного выше эта функция определена всюду в $\mathbb{R}_{++}^{(T+1)\cdot L}$. Заметим, что вектор $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_{++}^{(T+1)TL}$ является равновесным тогда и только тогда, когда $\mathbf{p}^* \in PV^{-1}(\mathbf{q}^*)$, где $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}_{++}^{(T+1)L}$ удовлетворяет условию $\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q}^*) = 0$.

Лемма 10. *В условиях теоремы* 1 *функция* $\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q})$ *является непрерывной, однородной степени нуль и удовлетворяет закону Вальраса: при любом* $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{++}^{(T+1)\cdot L}$ *выполнено тождество* $\mathbf{q} \cdot \widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q}) = 0$.

Справедливость этой леммы легко вытекает из предыдущих утверждений.

Рассмотрим множество векторов

$$\widetilde{Z} = \Big\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{(T+1)L} \mid \mathbf{z}^t = \sum_{i \in N} \mathbf{x}^{i,t} - \sum_{j \in M} (\mathbf{y}_j^{(t-1)+} - \mathbf{y}_j^{t-}) - \sum_{i \in N} \boldsymbol{\omega}^{i,t}, \\ t \in \{0, \dots, T\},\ (-\mathbf{y}^{t-}, \mathbf{y}^{t+}) \in Y_j^t \Big\}.$$

При $t = 0$ полагаем $\mathbf{y}^{(-1)-} = 0$, а при $t = T - \mathbf{y}^{T+} = 0$. По определению $\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q}) \in \widetilde{Z}$.

Лемма 11. *Пусть* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{(T+1)L}$ *и* $\widetilde{Z}(\mathbf{v}) = \{\mathbf{z} \in \widetilde{Z} \mid \mathbf{z} \leqslant \mathbf{v}\}$. *Тогда множество всех допустимых значений слагаемых, входящих во все элементы* $\mathbf{z} \in \widetilde{Z}(\mathbf{v})$, *т. е. всех* $\mathbf{x}^{i,t}$, $\mathbf{y}_j^{t-}$, $\mathbf{y}_j^{t+}$ *при любых* $i \in N$, $j \in M$, $t \in \{0, \ldots, T\}$, *ограничено сверху.*

Доказательство этого утверждения при $T = 1$ содержится в лемме 13 из [4]. Используя индукцию, докажем общий случай. Заметим, что для любого подмножества $U \subset Y_j^t \subset \mathbb{R}^{2L}$ из ограниченности проекции множества U на первые l компонент следует ограниченность всего множества U. Действительно, если существует последовательность $\mathbf{y}_n \in U$ такая, что $\|\mathbf{y}_n\| \to +\infty$, то без ограничения общности можно считать последовательность элементов единичной сферы $\mathbf{z}_n = \mathbf{y}_n / \|\mathbf{y}_n\|$ сходящейся к некоторому $\mathbf{z} \neq 0$. При этом $\mathbf{z}^- = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n^- / \|\mathbf{y}_n\| = 0$ в силу ограниченности последовательности числителей, т. е. $\mathbf{z} > 0$. С другой стороны, для всех n таких, что $\|\mathbf{y}_n\| \geqslant 1$, выполнено

$$\mathbf{z}_n = \left(1 - \frac{1}{\|\mathbf{y}_n\|}\right) 0 + \frac{1}{\|\mathbf{y}_n\|} \mathbf{y}_n \in Y_j^t,$$

поэтому $\mathbf{z} \in Y_j^t$, что противоречит условию отсутствия «рога изобилия».

Базис индукции. Пусть $t = 0$, тогда

$$\mathbf{z}^0 = \sum_{i\in N} \mathbf{x}^{i,0} + \sum_{j\in M} \mathbf{y}_j^{0-} - \sum_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^{i,0} \leqslant \mathbf{v}^0.$$

Отсюда для всех $\mathbf{x}^{i,0}$, $\mathbf{y}_j^{0-}$ следует ограниченность сверху вектором $\sum\limits_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^{i,0} + \mathbf{v}^0$.

Шаг индукции. Предположим, что для всех $t < \tau$ доказана ограниченность всех $\mathbf{x}^{i,t}$, $\mathbf{y}_j^{t\pm}$ и для $t = \tau$ доказана ограниченность $\mathbf{x}^{i,\tau}$, $\mathbf{y}_j^{\tau-}$. В силу сделанного выше замечания отсюда следует ограниченность множества всех слагаемых вида $\mathbf{y}_j^{\tau+}$. Рассмотрим теперь всевозможные векторы вида

$$\mathbf{z}^{\tau+1} = \sum_{i\in N} \mathbf{x}^{i,\tau+1} + \sum_{j\in M} \mathbf{y}_j^{(\tau+1)-} - \sum_{j\in M} \mathbf{y}_j^{\tau+} - \sum_{i\in N} \boldsymbol{\omega}^{i,\tau} \leqslant \mathbf{v}^{\tau+1}.$$

В силу изложенного выше отсюда вытекает ограниченность множества всех слагаемых вида $\mathbf{x}^{i,\tau+1}$, $\mathbf{y}_j^{(\tau+1)-}$, что завершает выполнение шага индукции.

3. Доказательство теоремы существования равновесий

Окончание доказательства существования равновесия опирается на известную теорему о неподвижной точке Какутани (см., например, [2, C.III.(14)]).

Теорема 2. *Пусть* $S \subset \mathbb{R}^m$ *— непустое выпуклое компактное множество. Если соответствие* $\varphi : S \to 2^S \setminus \{\varnothing\}$ *выпуклозначно и замкнуто, то оно имеет неподвижную точку* $\mathbf{x}^* \in \varphi(\mathbf{x}^*)$.

Напомним, что условие замкнутости для точечно-множественного соответствия означает следующее: для любых сходящихся последовательностей $\mathbf{x}_n \to \overline{\mathbf{x}}$, $\mathbf{y}_n \to \overline{\mathbf{y}}$, где $\mathbf{y}_n \in \varphi(\mathbf{x}_n)$, выполнено $\overline{\mathbf{y}} \in \varphi(\overline{\mathbf{x}})$.

Доказательство теоремы существования равновесий. Из сказанного выше следует, что для доказательства теоремы достаточно убедиться в существовании $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{++}$ такого, что $\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q}^*) = 0$. Рассмотрим единичный симплекс

$$\Delta = \Big\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{(T+1)L}_{+} \mid \sum_{k \in 2L} q_k = 1\Big\}$$

и его относительную внутренность $\Delta^0 = \{\mathbf{q} \in \Delta \mid \mathbf{q} \gg 0\}$. В силу свойства положительной однородности степени нуль достаточно рассмотреть ограничение функции $\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q})$ на множестве Δ^0. Для каждого $n \geqslant 1$ определим множество

$$\Delta_n = \left\{\mathbf{q} \in \Delta \mid \forall k :\ q_k \geqslant \frac{1}{n + (T+1)l}\right\} \subset \Delta^0.$$

Заметим, что в силу непрерывности образ $\widehat{\mathbf{z}}(\Delta_n)$ является ограниченным множеством, поэтому существует выпуклый компакт $B_n \supset \widehat{\mathbf{z}}(\Delta_n)$. Для произвольного элемента $\mathbf{z} \in B_n$ определим множество

$$Q_n(\mathbf{z}) = \{\overline{\mathbf{q}} \in \Delta_n \mid \forall \mathbf{q} \in \Delta_n :\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{z} \leqslant \overline{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{z}\}.$$

Легко видеть, что Q_n является выпуклозначным замкнутым соответствием. Поэтому соответствие $\varphi_n : \Delta_n \times B_n \to \Delta_n \times B_n$, где $\varphi_n(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = Q_n(\mathbf{z}) \times \{\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q})\}$, также будет выпуклозначным и замкнутым и, следовательно, имеет неподвижную точку $(\mathbf{q}_n, \mathbf{z}_n)$. Согласно определению φ_n выполнено $\mathbf{z}_n = \widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q}_n)$ и для всех $\mathbf{q} \in \Delta_n$ выполнено $\mathbf{q} \cdot \mathbf{z}_n \leqslant \mathbf{q}_n \cdot \mathbf{z}_n = 0$ в силу тождества Вальраса. В силу компактности Δ без ограничения общности можно считать, что последовательность $\mathbf{q}_n \to \mathbf{q}^* \in \Delta$.

Рассмотрим последовательность $\mathbf{z}_n \in \mathbb{R}^{(T+1)L}$, покажем прежде всего, что она ограничена. Предположим противное, тогда без ограничения общности можно считать, что $\|\mathbf{z}_n\| \to +\infty$. Рассмотрим ограниченную последовательность $\mathbf{v}_n = \mathbf{z}_n/\|\mathbf{z}_n\|$. В силу леммы 11 все последовательности, образованные слагаемыми вида $\mathbf{x}_n^{i,t}/\|\mathbf{z}_n\|$, $(\mathbf{y}_n^{t\pm})_j/\|\mathbf{z}_n\|$, ограничены, поэтому переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\frac{\mathbf{x}_n^{i,t}}{\|\mathbf{z}_n\|} \to \overline{\mathbf{x}}^{i,t} \geqslant 0, \quad \frac{(\mathbf{y}_n^{t\pm})_j}{\|\mathbf{z}_n\|} \to \overline{\mathbf{y}}_j^{t\pm}.$$

В силу того, что $\|\mathbf{z}_n\| \to +\infty$ при любом $\lambda \geqslant 0$, для всех достаточно больших номеров выполнены включения $\lambda\big(-\mathbf{y}_{\mathbf{j,n}}^{\mathbf{t-}}, \mathbf{y}_{\mathbf{j,n}}^{\mathbf{t+}}\big)/\|\mathbf{z}_n\| \in Y_j^t$, откуда следует $\lambda\overline{\mathbf{y}}_j^t \in Y_j^t$, что в силу условия Y4 означает, что $\overline{\mathbf{y}}_j^{t+} = 0$ для всех j и t. Поэтому

$$\mathbf{v}_n^t = \left(\sum_{i\in N}\frac{\mathbf{x}_n^{i,t}}{\|\mathbf{z}_n\|} - \sum_{i\in N}\frac{\boldsymbol{\omega}^{i,t}}{\|\mathbf{z}_n\|} - \sum_{j\in M}\frac{\mathbf{y}_{j,n}^{t+}}{\|\mathbf{z}_n\|} + \sum_{j\in M}\frac{\mathbf{y}_{j,n}^{(t-1)-}}{\|\mathbf{z}_n\|}\right) \to \overline{\mathbf{v}}^t$$
$$= \left(\sum_{i\in N}\overline{\mathbf{x}}^{i,t} + \sum_{j\in M}\overline{\mathbf{y}}_j^{(t-1)-}\right) \geqslant 0,$$

т. е. $\overline{\mathbf{v}} \geqslant 0$. С другой стороны, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{v}_n = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}_n/\|\mathbf{z}_n\| \leqslant 0$ для всех $\mathbf{q} \in \Delta_n$. Отсюда предельным переходом получаем $\mathbf{q}\cdot\mathbf{v} \leqslant 0$ для всех $\mathbf{q} \in \Delta$, что с учётом предыдущего возможно лишь при $\overline{\mathbf{v}} = 0$. Однако это невозможно ввиду очевидного равенства $\|\overline{\mathbf{v}}\| = 1$. Итак, предположив неограниченность последовательности $\mathbf{z}_n$, мы пришли к противоречию. Следовательно, $\mathbf{z}_n$ ограничена. Ещё раз применяя лемму 11, получим, что последовательности $\mathbf{x}_n^{i,t}$, и $\mathbf{y}_{j,n}^{t\pm}$ ограничены, поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что для всех t имеет место сходимость

$$\mathbf{z}_n^t \to \overline{\mathbf{z}}^t = \sum_{i\in N}\overline{\mathbf{x}}^{i,t} - \sum_{i\in N}\boldsymbol{\omega}^{i,t} - \sum_{j\in M}\overline{\mathbf{y}}_j^{t+} + \sum_{j\in M}\overline{\mathbf{y}}_j^{(t-1)-},$$

где $\mathbf{x}_n^i \to \overline{\mathbf{x}}^i$, $\mathbf{y}_{j,n}^{t\pm} \to \overline{\mathbf{y}}_j^{t\pm}$. Поскольку для всех n выполнено $\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}_n \leqslant 0$ для любого $\mathbf{q} \in \Delta_n$, то, как и выше, получаем $\overline{\mathbf{z}} \leqslant 0$.

Заметим, что по построению все векторы $\mathbf{x}_n^i = \big(\mathbf{x}_n^{i,0}, \ldots, \mathbf{x}_n^{i,T}\big)$ являлись локально-оптимальными, а значит, и бюджетно-допустимыми траекториями относительно цен $\mathbf{q}_n$. Учитывая, что бюджетные ограничения выдерживают предельные переходы, получаем отсюда бюджетную допустимость $\overline{\mathbf{x}}^i = (\overline{\mathbf{x}}^{i,0}, \ldots, \overline{\mathbf{x}}^{i,T})$ относительно цен $\mathbf{q}^*$. Более того, поскольку все $\mathbf{x}_n^i$ удовлетворяли тождеству Вальраса, это свойство будет выполнено и для $\overline{\mathbf{x}}^i$. Предположим теперь, что $\mathbf{q}^* = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{q}_n \in \Delta \setminus \Delta^0$, т. е. $(q_k^t)^* = 0$ для некоторых $t \in \{0, \ldots, T\}$ и $k \in L$. Тогда траектория $\tilde{\mathbf{x}}^i = (\overline{\mathbf{x}}^{i,0}, \ldots, \overline{\mathbf{x}}^{i,t} + \mathbf{e}^k \ldots, \overline{\mathbf{x}}^{i,T})$ также является бюджетно-допустимой (здесь $\mathbf{e}^k$ — k-й единичный базисный вектор), следовательно, для любого числа $0 < \varepsilon < 1$ траектория $\varepsilon\tilde{\mathbf{x}}^i$ тоже бюджетно-допустима. В силу условия ресурсной связности существует потребитель $i \in N$, желающий товар k и при этом имеющий строго положительный доход при ценах $\mathbf{q}^*$. Поэтому для всех достаточно больших номеров n траектория $\varepsilon\tilde{\mathbf{x}}^i$ будет бюджетно-допустимой и при ценах $\mathbf{q}_n$. Используя локальную оптимальность траекторий $\mathbf{x}_n^i$ при этих ценах, а также полунепрерывность отношений предпочтения сверху и снизу, после предельных переходов по $n \to +\infty$ и $\varepsilon \to 1$ получаем противоречивое соотношение

$$(\overline{\mathbf{x}}^{i,t}, \overline{\mathbf{x}}^{i,t+1}) \succcurlyeq_i^t (\overline{\mathbf{x}}^{i,t} + \mathbf{e}^k, \overline{\mathbf{x}}^{i,t+1}).$$

Случай $t = T$ рассматривается аналогично, при этом в итоге получается соотношение $(\overline{\mathbf{x}}^{i,T-1}, \overline{\mathbf{x}}^{i,T}) \succcurlyeq_i^t (\overline{\mathbf{x}}^{i,T-1}, \overline{\mathbf{x}}^{i,T} + \mathbf{e}^k)$.

Из полученного противоречия следует, что $\mathbf{q}^* \gg 0$. Поэтому последовательность $\mathbf{q}_n$ целиком содержится в некотором компакте $K \subset \mathbb{R}_{++}^{(T+1)L}$. Отсюда в силу непрерывности функции $\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q})$ получаем, что $\overline{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q}^*)$; в частности, выполнено тождество Вальраса $\mathbf{q}^* \cdot \overline{\mathbf{z}} = 0$. При этом, как было доказано выше, $\overline{\mathbf{z}} \leqslant 0$. Следовательно, $\widehat{\mathbf{z}}(\mathbf{q}^*) = \overline{\mathbf{z}} = 0$. Теперь в силу тождеств $\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \widehat{\mathbf{x}}(PV(\mathbf{p}))$ и $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \widehat{\mathbf{y}}(PV(\mathbf{p}))$ в качестве равновесных цен можно выбрать любой элемент $\mathbf{p}^* \in PV^{-1}(\mathbf{q}^*)$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О.** Существование и оптимальность конкурентного равновесия. — М: Мир, 1995. — 384 с.
2. **Гильденбрандт В.** Ядро и равновесие в большой экономике. — М: Наука, 1986. — 200 с.
3. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. — М: Мир, 1972. — 517 с.
4. **Сидоров А. В.** Существование равновесия в однопериодной модели экономики с инвестированием // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 74–96.
5. **Четыркин Е. М.** Финансовая математика. — М: Дело, 2003. — 400 с.

Сидоров Александр Васильевич,
e-mail: sidorov@math.nsc.ru

Статья поступила
7 апреля 2008 г.
Переработанный вариант —
21 июля 2008 г.