ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2008. Том 15, № 6. С. 63–89

УДК 519.718

О РЕАЛИЗАЦИЯХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫМИ ПО НАДЁЖНОСТИ СХЕМАМИ

В. В. Чугунова

Аннотация. В работе решены две задачи.

1. Показано, что если к каждому из неприводимых полных базисов, содержащих функции, зависящие не более чем от двух переменных, добавить ровно одну неконстантную и не конгруэнтную базисным булеву функцию $\varphi(x_1, x_2)$, зависящую не более чем от двух переменных, то в большинстве полученных базисов оценка ненадёжности схем из функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на входах элементов, понизится для почти всех функций.

2. Показано, что если к каждому из неприводимых полных базисов, содержащих функции, зависящие не более чем от двух переменных, добавить k ($k \geqslant 3$) неконстантных и не конгруэнтных базисным булевых функции, зависящих не более чем от двух переменных, то во всех полученных базисах оценка ненадёжности схем из функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на входах элементов, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) равна 2ε (т. е. становится тривиальной) для всех функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, исключая константы 0, 1 и функции x_i, $\overline{x}_i$, где ε — вероятность ошибки на каждом входе функционального элемента, $i = \overline{1, n}$.

Показано также, что схемы, построенные при решении двух перечисленных задач, являются асимптотически оптимальными по надёжности при $\varepsilon \to 0$.

Ключевые слова: булевы функции, асимптотически оптимальные по надежности схемы.

Введение

Пусть $\widetilde{P}_2$ — множество всех булевых функций. Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадёжных функциональных элементов в базисах из функций, зависящих не более чем от двух переменных. Будем считать, что схема из функциональных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\widetilde{x})$, если при поступлении на входы

схемы набора $\widetilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\widetilde{a})$. Число входов функциональных элементов равно числу существенных переменных функций, приписанных этим элементам, т. е. каждый функциональный элемент имеет не более двух входов. Предполагается, что каждый вход элемента схемы независимо от всех других входов элементов с вероятностью ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$ подвержен инверсным неисправностям. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на вход элемента значение a $(a \in \{0,1\})$ с вероятностью ε может превратиться в значение $\overline{a}$. Заметим, что элементы, реализующие константы 0 и 1, являются абсолютно надёжными при инверсных неисправностях на входах элементов.

Пусть $P_{\overline{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ — вероятность появления значения $\overline{f}(\widetilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\widetilde{x})$ при входном наборе $\widetilde{a}$. Ненадёжность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\overline{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\widetilde{a}$. Надёжность схемы S равна $1 - P(S)$.

Обозначим $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где S — схема из ненадёжных элементов, реализующая булеву функцию f. Схему A из ненадёжных элементов, реализующую булеву функцию f, назовём *асимптотически оптимальной* (*наилучшей*) *по надёжности*, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $M(x_1, x_2) = \{x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 | x_2,\ x_1 \downarrow x_2,\ x_1 \to x_2,\ x_1 \not\to x_2,\ x_1 \sim x_2,\ x_1 \oplus x_2,\ x_1,\ \overline{x}_1,\ 0,\ 1\}$ — множество попарно не конгруэнтных булевых функций, зависящих (возможно, фиктивно) от двух переменных x_1, x_2, где $x_1 | x_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$, $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x}_1 \& \overline{x}_2$, $x_1 \sim x_2 = x_1 \& x_2 \vee \overline{x}_1 \& \overline{x}_2$, $x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$, $x_1 \not\to x_2 = x_1 \& \overline{x}_2$, $x_1 \oplus x_2 = x_1 \& \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \& x_2$.

Множество $B \subset M(x_1, x_2)$ назовём *неприводимым полным базисом* (в $\widetilde{P}_2$), если множество B полно и никакое его собственное подмножество полным не является.

Известно, что в $\widetilde{P}_2$ существует 17 (с точностью до переименования переменных) неприводимых полных базисов, содержащих функции не более чем двух переменных:

$$
\begin{aligned}
&B_1 = \{x_1 | x_2\},\ B_2 = \{x_1 \downarrow x_2\},\ B_3 = \{x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\},\\
&B_4 = \{x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\},\ B_5 = \{x_1 \not\to x_2, x_1 \sim x_2\},\\
&B_6 = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \& x_2, 1\},\ B_7 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, 0\},\\
&B_8 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\},\ B_9 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2\},\\
&B_{10} = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, 0\},\ B_{11} = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \vee x_2, 1\},\\
&B_{12} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1\},\ B_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1\},\ B_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1\},
\end{aligned}
$$

$$B_{15} = \{x_1 \to x_2, 0\},\ B_{16} = \{x_1 \& x_2, \overline{x}_1\},\ B_{17} = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}.$$

Любой другой базис, отличный от базисов B_1–B_{17} (например, $B_{18} = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}$), можно получить переименованием переменных без отождествления, а также добавлением одной или нескольких неконстантных, отличных от x_1 функций из множества $M(x_1, x_2)$ к некоторому базису из указанного списка.

Асимптотические оценки ненадёжности схем из функциональных элементов для неприводимых полных базисов B_1–B_{17}, а также для приводимых полных базисов, полученных из базисов B_{16}, B_{17} добавлением ровно одной неконстантной и не конгруэнтной базисным булевой функции, зависящей не более чем от двух переменных, и базиса M, содержащего все булевы функции, зависящие не более чем от двух переменных, получены ранее [4, 5] (доказаны теоремы 1 и 2).

Пусть базис B — один из перечисленных базисов, тогда для него справедливы теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть константы a, b, c, d (см. табл. 1) соответствуют базису B и $\varepsilon \in (0; d\,]$. Тогда любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в базисе B можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leqslant a\varepsilon + b\varepsilon^2$.*

Теорема 2. *Пусть константы $a, \widehat{b}, \widehat{d}$ и класс булевых функций $K(n)$ (см. табл. 1) соответствуют базису B. Тогда для любой булевой функции $f(\widetilde{x})$, $f \notin K(n)$, и любой схемы S, реализующей f в базисе B, имеем*

$$P(S) \geqslant a\varepsilon + \widehat{b}\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; \widehat{d}\,]$, причём a — та же константа, что и в теореме 1.

Из теоремы 2 следует, что схемы, построенные при доказательстве теоремы 1, являются асимптотически оптимальными по надёжности для почти всех функций и функционируют с ненадёжностью $a\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Из результатов табл. 1 следует, что если к базису B_{16}, в котором оценка ненадёжности асимптотически оптимальных схем для почти всех функций равна 4ε, добавить ещё одну булеву функцию, неконстантную и не конгруэнтную ни одной из функций базиса, то в полученном базисе асимптотическая оценка понижается до 3ε (в базисе B_{16}^4) или даже становится тривиальной — 2ε (в базисах B_{16}^1–B_{16}^3 и B_{16}^5), в зависимости от добавленной функции.

Аналогичный результат имеет место и для базиса B_{17}, двойственного B_{16} [1].

Таким образом, возникают две взаимосвязанные задачи.

Т а б л и ц а 1

B	a	b	d	$\widehat{b}$	$\widehat{d}$	$K(n)$
$B_1 = \{x_1 \vert x_2\}$	2	19	1/100	−1	1/4	$x_i, 1$
$B_2 = \{x_1 \downarrow x_2\}$	2	19	1/100	−1	1/4	$x_i, 0$
$B_3 = \{x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$	2	51	1/300	−1	1/4	$x_i, 0, 1$
$B_4 = \{x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/4	$x_i, 1$
$B_5 = \{x_1 \not\to x_2, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/4	$x_i, 0$
$B_6 = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \& x_2, 1\}$	2	67	1/200	−2	1/4	$x_i, 0, 1$
$B_7 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, 0\}$	2	67	1/200	−2	1/4	$x_i, 0, 1$
$B_8 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	62	1/300	−2	1/4	$x_i, 0$
$B_9 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	62	1/300	−2	1/4	$x_i, 1$
$B_{10} = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, 0\}$	2	66	1/200	−2	1/4	$x_i, 0$
$B_{11} = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \vee x_2, 1\}$	2	66	1/200	−2	1/4	$x_i, 1$
$B_{12} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1\}$	3	41	1/150	−6	1/6	$x_i^\delta \& h(\widetilde{x}), 1$
$B_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1\}$	3	41	1/150	−6	1/6	$x_i^\delta \vee h(\widetilde{x}), 0$
$B_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1\}$	4	59	1/200	−8	1/11	$(x_i^\delta \& h(\widetilde{x}))^\mu$
$B_{15} = \{x_1 \to x_2, 0\}$	4	59	1/200	−8	1/11	$(x_i^\delta \& h(\widetilde{x}))^\mu$
$B_{16} = \{x_1 \& x_2, \overline{x}_1\}$	4	83	1/200	−12	1/10	$(x_i^\delta \& h(\widetilde{x}))^\mu$
$B_{17} = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}$	4	83	1/200	−12	1/10	$(x_i^\delta \& h(\widetilde{x}))^\mu$
$B_{18} = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}_1\}$	2	19	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{16}^1 = \{x_1 \& x_2, \overline{x}_1, x_1 \vert x_2\}$	2	19	1/100	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{16}^2 = \{x_1 \& x_2, \overline{x}_1, x_1 \downarrow x_2\}$	2	19	1/100	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{16}^3 = \{x_1 \& x_2, \overline{x}_1, x_1 \to x_2\}$	2	57	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{16}^4 = \{x_1 \& x_2, \overline{x}_1, x_1 \not\to x_2\}$	3	41	1/150	−6	1/8	$x_i^\delta \& h(\widetilde{x}), 1$
$B_{16}^5 = \{x_1 \& x_2, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\}$	2	70	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{16}^6 = \{x_1 \& x_2, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$	2	70	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{17}^1 = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1, x_1 \vert x_2\}$	2	19	1/100	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{17}^2 = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1, x_1 \downarrow x_2\}$	2	19	1/100	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{17}^3 = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1, x_1 \to x_2\}$	3	41	1/150	−6	1/8	$x_i^\delta \vee h(\widetilde{x}), 0$
$B_{17}^4 = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1, x_1 \not\to x_2\}$	2	57	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{17}^5 = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\}$	2	70	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{17}^6 = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$	2	70	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$M = \{x_1 \vert x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}_1,$ $x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2, x_1 \sim x_2, x_1 \oplus x_2, 0, 1\}$	2	19	1/100	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$

Используемые в табл. 1 обозначения: $i = \overline{1,n}$, $\delta, \mu \in \{0,1\}$, $h(\widetilde{x})$ — произвольная булева функция от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Задача 1. *Как изменится ненадёжность асимптотически оптимальных схем, если к любому из неприводимых полных базисов B_{12}–B_{15} добавить ровно одну произвольную булеву функцию, зависящую не более чем от двух переменных*?

Замечание 1. Хотя в задаче 1 идёт речь о произвольной булевой функции, в этой задаче и всюду далее без ограничения общности будем считать, что добавляемая к базису функция $\varphi(x_1, x_2)$ удовлетворяет условиям.

1. Функция $\varphi(x_1, x_2)$ не конгруэнтна ни одной из функций рассматриваемого базиса.

2. Функция $\varphi(x_1, x_2)$ не равна константе и переменной, поскольку, добавляя константу к исходному базису, понизить верхнюю оценку ненадёжности схем не удаётся. Более того, нижние оценки ненадёжности свидетельствуют о том, что полученные верхние оценки неулучшаемы. Таким образом, имеет место следующий факт: добавление к полному базису надёжных элементов, реализующих булевы константы, для почти всех функций не влияет на ненадёжность схем.

3. Функция $\varphi(x_1, x_2)$ отлична от функций $x_1|x_2$ или $x_1 \downarrow x_2$, так как добавив одну из этих функций к исходному базису, очевидно, получим такую же верхнюю оценку ненадёжности, как в базисах B_1, B_2, а нижнюю — как в базисе M, т. е. задача становится тривиальной.

Отметим также, что ненадёжности двойственных схем в двойственных базисах при инверсных неисправностях на входах равны [1], поэтому доказанное для некоторых функций в некотором базисе утверждение справедливо для двойственных функций в двойственном базисе.

Задача 2. *Выяснить, сколько и каких функций нужно добавить к каждому из неприводимых полных базисов B_{12}–B_{17} для того, чтобы оценка ненадёжности в полученных базисах стала тривиальной, асимптотически равной 2ε $(\varepsilon \to 0)$*?

Задачи 1 и 2 решены в данной статье. Весь материал статьи разбит на два раздела, каждый из которых посвящён решению одной из этих задач.

Разд. 1 содержит решение задачи 1. Задача 1 решена в два этапа. На первом этапе найдены верхние оценки ненадёжности схем, реализующих произвольные булевы функции в каждом из базисов, полученных из базисов B_{12}–B_{15} добавлением ровно одной произвольной булевой функции. На втором этапе в каждом из базисов, рассмотренном на первом

этапе решения, найдены нижние оценки ненадёжности схем, реализующих почти все булевы функции, и доказано, что схемы, построенные на первом этапе решения, являются асимптотически оптимальными по надёжности для почти всех булевых функций. Таким образом, в разд. 1 доказано, что если к неприводимым полным базисам B_{12}–B_{13} добавить ровно одну произвольную булеву функцию, зависящую не более чем от двух переменных, то во всех полученных базисах, кроме двух, оценка ненадёжности асимптотически оптимальных схем понижается с 3ε до 2ε, а если к базисам B_{15}–B_{16} добавить ровно одну функцию, то во всех базисах (кроме четырёх) оценка ненадёжности асимптотически оптимальных схем понижается с 4ε до 2ε.

Разд. 2 содержит решение задачи 2, которое также разбивается на два этапа. На первом этапе рассмотрены базисы, полученные при решении задачи 1, в которых асимптотические оценки ненадёжности схем нетривиальны и равны 3ε, причём среди них встречаются базисы B_{16}^4 и B_{17}^3 (табл. 1). К каждому из указанных базисов последовательно добавляются булевы функции до тех пор, пока верхние оценки ненадёжности схем в каждом из полученных базисов будут не больше $2\varepsilon + b\varepsilon^2$, где b — некоторая зависящая лишь от базиса константа. На втором этапе решения задачи 2 доказано, что схемы, построенные на первом этапе решения этой задачи, являются асимптотически оптимальными по надёжности для всех булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, кроме функций x_i, $\overline{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и констант 0, 1. Таким образом, доказано, что если к каждому из неприводимых полных базисов B_{12}–B_{17} добавить ещё k $(k \geqslant 3)$ произвольных булевых функций, зависящих не более чем от двух переменных, то во всех полученных базисах ненадёжность асимптотически $(\varepsilon \to 0)$ оптимальных по надёжности схем из функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на входах элементов, равна 2ε для всех функций, исключая константы 0, 1 и функции x_i, $\overline{x}_i$, где ε — вероятность ошибки на каждом входе функционального элемента.

1. Реализация булевых функций с асимптотической ненадёжностью 3ε или 2ε

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Как изменится ненадёжность асимптотически оптимальных схем, если к любому из неприводимых полных базисов B_{12}–B_{15} добавить ровно одну произвольную булеву функцию, зависящую не более чем от двух переменных*?

Найдём верхние и нижние асимптотические оценки ненадёжности

схем в приводимых полных базисах, полученных из базисов B_{12}–B_{15} добавлением ровно одной произвольной булевой функции, зависящей не более чем от двух переменных.

Решим поставленную задачу в каждом из базисов

$$\begin{aligned}
&B^1_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2\},\ B^2_{13} = \{x_1 \to x_2, x_1\overline{x}_1, \not\to x_2\},\\
&B^3_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\},\ B^4_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\},\\
&B^5_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\},\ B^1_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, x_1\&x_2\},\\
&B^2_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \not\to x_2\},\ B^3_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \sim x_2\},\\
&B^4_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \oplus x_2\},\ B^5_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1\},\\
&B^6_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \vee x_2\}.
\end{aligned}$$

Найдём верхние оценки ненадёжности схем.

1.1. Верхние оценки ненадёжности схем. Для базиса B^1_{13} утверждение о верхней оценке ненадёжности схем содержит

Лемма 1 [5]. *При $\varepsilon \in (0; 1/150]$ любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в базисе $B^1_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2\}$ можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 57\varepsilon^2$.*

Рассмотрим вспомогательные утверждения — лемму 2 и теорему 3.

Лемма 2 [3]. *Пусть схема S_h реализует функцию $x_1|x_2$ с ненадёжностью μ. Если $\mu \in (0; 1/50]$, то любую функцию $f(\widetilde{x})$ можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leqslant 4\mu$.*

Теорема 3. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная булева функция, S — схема, реализующая функцию $f(\widetilde{x})$ с ненадёжностью $P(S)$, S' — схема, реализующая функцию $\overline{f}(\widetilde{x})$ в базисе $B^1_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, x_1\&x_2\}$ с ненадёжностью $P(S')$. Тогда по схемам S и S' в базисе B^1_{15} можно построить схему $\psi_1(S, S')$, реализующую функцию $f(\widetilde{x})$, для которой*

$$P(\psi_1(S,S')) \leqslant \max\{2\varepsilon + 5\varepsilon^2 + 15\varepsilon\widehat{P}(S,S') + 3\widehat{P}^2(S,S'),\\ 12\varepsilon^2 + 8\varepsilon\widehat{P}(S,S') + 3\widehat{P}^2(S,S')\},$$

где $\widehat{P}(S,S') = \max\{P(S), P(S')\}$, $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная булева функция, а схема S реализует функцию $f(\widetilde{x})$ с ненадёжностью $P(S)$ в базисе B^1_{15}. Для доказательства теоремы будем использовать схему D_1, реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3$. Нетрудно проверить,

что $\overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 = ((x_1 \to x_2) \to x_3) \to (x_1 \to 0)\&x_2$. Моделируя формулу в правой части последнего равенства, построим схему D_1 из шести элементов, из которых пять элементов ненадёжные, а один, реализующий константу 0, надёжный (рис. 1).

Найдём вероятности ошибок на выходе схемы D_1.

Пусть на входы схемы D_1 поступает набор значений (000).

Тогда вероятность ошибки на выходе элемента E_1 при поступлении на его входы набора (00) равна $P_0(E_1,(00)) = \varepsilon - \varepsilon^2$, т. е. $P_0(E_1,(00)) < \varepsilon$.

Вероятность ошибки на выходе подсхемы S^1, состоящей из элементов E_1 и E_2, при поступлении на входы элемента E_2 набора (10) удовлетворяет неравенству

$$P_1(S^1,(10)) \leqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2 + P_0(E_1,(00))(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \leqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon(1 - \varepsilon + \varepsilon^2) \leqslant 3\varepsilon - \varepsilon^2.$$

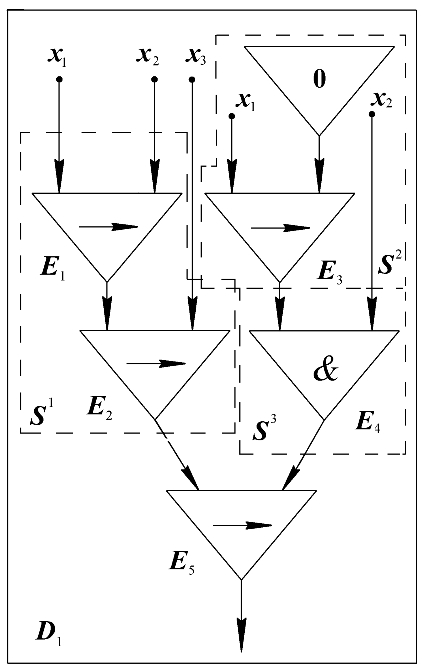

Рис. 1

Вероятность ошибки на выходе подсхемы S^2, содержащей два элемента — ненадёжный элемент E_3 и надёжный, реализующий константу 0, при поступлении на входы элемента E_3 набора (00) равна $P_0(S^2,(00)) = \varepsilon - \varepsilon^2$, т. е. $P_0(S^2,(00)) < \varepsilon$.

Вероятность ошибки на выходе подсхемы S^3, содержащей три элемента – два ненадёжных элемента E_3, E_4 и надёжный, реализующий константу 0, при поступлении на входы элемента E_4 набора (10) удовлетворяет неравенству $P_1(S^3,(10)) \leqslant \varepsilon - \varepsilon^2$.

Тогда вероятность ошибки на выходе схемы D_1, состоящей из шести элеметов, при поступлении на входы элемента E_5 набора (00) удовлетворяет неравенству

$$P_0(D_1,(00)) \leqslant \varepsilon - \varepsilon^2 + P_1(S^1,(10)) + P_1(S^1,(10))P_1(S^3,(10))\varepsilon \\ + P_1(S^3,(10))\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon - \varepsilon^2 + 3\varepsilon - \varepsilon^2 + (\varepsilon - \varepsilon^2)\varepsilon^2 + (3\varepsilon - \varepsilon^2)\varepsilon^2 \\ = 4\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - 2\varepsilon^4 \leqslant 4\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Таким образом, вероятность ошибки на выходе схемы D_1 при поступлении на её входы набора (000) удовлетворяет неравенству $P_0(000) \leqslant 4\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Аналогичные рассуждения позволяют найти оценки вероятностей ошибок на выходе схемы D_1 при поступлении на её входы других наборов:

$$P_1(001) \leqslant 4\varepsilon,\ P_0(010) \leqslant 12\varepsilon^2,\ P_0(011) \leqslant 4\varepsilon,\ P_1(100) \leqslant 5\varepsilon, \\ P_1(101) \leqslant 2\varepsilon + 5\varepsilon^2,\ P_0(110) \leqslant 4\varepsilon,\ P_1(111) \leqslant 6\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Возьмём два экземпляра схемы S', реализующей функцию $\overline{f}$, и соединим их выходы с первым и третьим входами схемы D_1, затем возьмём один экземпляр схемы S, реализующей функцию $f(\widetilde{x})$, соединим её выход со вторым входом схемы D_1. Построенную таким образом схему, реализующую функцию $f(\widetilde{x})$, обозначим $\psi_1(S,S')$. Вычислим вероятности ошибок на выходе этой схемы.

Пусть входной набор $\widetilde{a}$ схемы S является нулевым для функции f ($f(\widetilde{a}) = 0$) и единичным для функции $\overline{f}$ ($\overline{f}(\widetilde{a}) = 1$). Вероятность ошибки $P_1(\psi_1(S,S'),\widetilde{a})$ на выходе схемы $\psi_1(S,S')$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$P_1(\psi_1(S,S'),\widetilde{a}) \leqslant P_0^2(S',\widetilde{a})(1 - P_1(S,\widetilde{a})) \\ + P_0(S',\widetilde{a})(1 - P_0(S',\widetilde{a}))(1 - P_1(S,\widetilde{a})) \cdot 4\varepsilon + P_0^2(S',\widetilde{a})P_1(S,\widetilde{a})$$

$$+P_0(S',\widetilde{a})(1-P_0(S',\widetilde{a}))P_1(S,\widetilde{a})+P_0(S',\widetilde{a})(1-P_0(S',\widetilde{a}))(1-P_1(S,\widetilde{a}))\cdot 5\varepsilon$$
$$+ (1-P_0(S',\widetilde{a}))^2(1-P_1(S,\widetilde{a}))(2\varepsilon+5\varepsilon^2) + P_0(S',\widetilde{a})(1-P_0(S',\widetilde{a}))P_1(S,\widetilde{a})$$
$$+ (1-P_0(S',\widetilde{a}))^2 P_1(S,\widetilde{a})\cdot 6\varepsilon \leqslant 2\varepsilon + 5\varepsilon^2 + 9P_0(S',\widetilde{a})\varepsilon + 6P_1(S,\widetilde{a})\varepsilon$$
$$+ 2P_0(S',\widetilde{a})P_1(S,\widetilde{a}) + P_0^2(S',\widetilde{a})$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Следовательно,

$$P_1(\psi_1(S,S'),\widetilde{a}) \leqslant 2\varepsilon + 5\varepsilon^2 + 9P_0(S',\widetilde{a})\varepsilon + 6P_1(S,\widetilde{a})\varepsilon$$
$$+ 2P_0(S',\widetilde{a})P_1(S,\widetilde{a}) + P_0^2(S',\widetilde{a})$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Пусть входной набор $\widetilde{a}$ схемы S является единичным для функции f ($f(\widetilde{a}) = 1$) и нулевым для функции $\overline{f}$ ($\overline{f}(\widetilde{a}) = 0$). Вероятность ошибки $P_0(\psi_1(S,S'),\widetilde{a})$ на выходе схемы $\psi_1(S,S')$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$P_0(\psi_1(S,S'),\widetilde{a}) \leqslant (1-P_1(S',\widetilde{a}))^2 P_0(S,\widetilde{a})\cdot 4\varepsilon$$
$$+ P_1(S',\widetilde{a})(1-P_1(S',\widetilde{a}))P_0(S,\widetilde{a}) + (1-P_1(S',\widetilde{a}))^2(1-P_0(S,\widetilde{a}))\cdot 12\varepsilon^2$$
$$+ P_1(S',\widetilde{a})(1-P_1(S',\widetilde{a}))(1-P_0(S,\widetilde{a}))\cdot 4\varepsilon$$
$$+ P_1(S',\widetilde{a})(1-P_1(S',\widetilde{a}))P_0(S,\widetilde{a}) + P_1^2(S',\widetilde{a})P_0(S,\widetilde{a})$$
$$+ P_1(S',\widetilde{a})(1-P_1(S',\widetilde{a}))(1-P_0(S,\widetilde{a}))\cdot 4\varepsilon$$
$$+ P_1^2(S',\widetilde{a})(1-P_0(S,\widetilde{a})) \leqslant 12\varepsilon^2 + 4P_1(S',\widetilde{a})\varepsilon + 4P_0(S,\widetilde{a})\varepsilon$$
$$+ 2P_1(S',\widetilde{a})P_0(S,\widetilde{a}) + P_1^2(S',\widetilde{a})$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Следовательно,

$$P_0(\psi_1(S,S'),\widetilde{a}) \leqslant 12\varepsilon^2 + 4P_1(S',\widetilde{a})\varepsilon + 4P_0(S,\widetilde{a})\varepsilon + 2P_1(S',\widetilde{a})P_0(S,\widetilde{a})$$
$$+ P_1^2(S',\widetilde{a})$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Таким образом, при $\varepsilon \in (0; 1/200]$ и $\widehat{P}(S,S') = \max\{P(S), P(S')\}$ получим

$$P(\psi_1(S,S')) \leqslant \max\{2\varepsilon + 5\varepsilon^2 + 15\varepsilon\widehat{P}(S,S') + 3\widehat{P}^2(S,S'),$$
$$12\varepsilon^2 + 8\varepsilon\widehat{P}(S,S') + 3\widehat{P}^2(S,S')\}.$$

Теорема 3 доказана.

Лемма 3. *При* $\varepsilon \in (0; 1/200]$ *любую булеву функцию* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $B_{15}^1 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1\&x_2\}$ *можно реализовать схемой* S *с ненадёжностью* $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 55\varepsilon^2$.

Доказательство. В базисе B_{15}^1, моделируя формулу

$$x_1|x_2 = x_1\&x_2 \to 0,$$

построим схему S_h, реализующую функцию $x_1|x_2$. Схема S_h содержит три элемента, два из которых ненадёжные. Ненадёжность каждого из них не больше 2ε, поэтому ненадёжность схемы S_h не больше 4ε. Тогда $\mu \in (0; 4\varepsilon]$ и $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

По лемме 2 при $\varepsilon \in (0; 1/200]$ любую булеву функцию можно реализовать схемой с ненадёжностью не более 16ε, т. е. функцию f можно реализовать схемой $\widetilde{S}$ с ненадёжностью $P(\widetilde{S}) \leqslant 16\varepsilon$, а функцию $\overline{f}$ можно реализовать схемой $\widetilde{S}'$ с ненадёжностью $P(\widetilde{S}') \leqslant 16\varepsilon$.

Применяя теорему 3, по схемам $\widetilde{S}$ и $\widetilde{S}'$ построим схему $\psi_1(\widetilde{S}, \widetilde{S}')$, реализующую функцию f с ненадёжностью

$$P(\psi_1(\widetilde{S}, \widetilde{S}')) \leqslant 2\varepsilon + 1013\varepsilon^2 \leqslant 7{,}1\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$. Применяя теорему 3 ещё раз, по схемам $\psi_1(\widetilde{S}, \widetilde{S}')$ и $\psi_1'(\widetilde{S}, \widetilde{S}')$, реализующим соответственно функции f и $\overline{f}$, построим схему ψ_1^2, реализующую функцию f с ненадёжностью

$$P(\psi_1^2) \leqslant 2\varepsilon + 263\varepsilon^2 \leqslant 3{,}4\varepsilon$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$. Действуя аналогичным образом при $\varepsilon \in (0; 1/200]$, построим другие схемы, реализующие f:

схему ψ_1^3 с ненадёжностью $P(\psi_1^3) \leqslant 2\varepsilon + 91\varepsilon^2$,
схему ψ_1^4 с ненадёжностью $P(\psi_1^4) \leqslant 2\varepsilon + 60\varepsilon^2$,
схему ψ_1^5 с ненадёжностью $P(\psi_1^5) \leqslant 2\varepsilon + 56\varepsilon^2$,
схему ψ_1^6 с ненадёжностью $P(\psi_1^6) \leqslant 2\varepsilon + 55\varepsilon^2$.
Схема ψ_1^6 искомая, т. е. $S = \psi_1^6$. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим вспомогательное утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $f(\widetilde{x})$ — *произвольная булева функция,* S — *схема, реализующая функцию* $f(\widetilde{x})$ *с ненадёжностью* $P(S)$, S' — *схема, реализующая функцию* $\overline{f}(\widetilde{x})$ *с ненадёжностью* $P(S')$ *в базисе* B_{15}^3. *Тогда по схемам* S *и* S' *в базисе* B_{15}^3 *можно построить схему* $\psi_2(S, S')$, *реализующую функцию* $f(\widetilde{x})$, *для которой*

$$P(\psi_2(S, S')) \leqslant 2\varepsilon + 7\varepsilon^2 + 18\varepsilon\widehat{P}(S, S') + 3\widehat{P}^2(S, S'),$$

где $\widehat{P}(S, S') = \max\{P(S), P(S')\}$, $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная булева функция, а схема S реализует функцию f с ненадёжностью $P(S)$ в базисе B^3_{15}. Для доказательства теоремы будем использовать схему D_2, реализующую функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3$. Нетрудно проверить, что $\overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 = ((x_1 \sim x_2) \to (x_2 \sim x_3)) \sim x_2$. Моделируя формулу в правой части последнего равенства, построим схему D_2 из четырёх элементов. Вероятности ошибок на выходе этой схемы таковы: $P_1(000) \leqslant 5\varepsilon$, $P_0(001) \leqslant 8\varepsilon$, $P_0(010) \leqslant 5\varepsilon$, $P_0(011) \leqslant 2\varepsilon + 7\varepsilon^2$, $P_1(100) \leqslant 2\varepsilon + 7\varepsilon^2$, $P_1(101) \leqslant 5\varepsilon$, $P_1(110) \leqslant 8\varepsilon$, $P_0(111) \leqslant 5\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/200]$ (оценки находятся как в теореме 3).

Возьмём один экземпляр схемы S', реализующей функцию $\overline{f}$, два экземпляра схемы S, реализующей функцию f, и соединим их выходы в указанном порядке с соответствующими входами схемы D_2. Построенную таким образом схему обозначим $\psi_2(S, S')$. Вычислим вероятности ошибок на выходе этой схемы.

Пусть входной набор $\widetilde{a}$ схемы S является нулевым для функции f ($f(\widetilde{a}) = 0$) и единичным для функции $\overline{f}$ ($\overline{f}(\widetilde{a}) = 1$). Вероятность ошибки $P_1(\psi_2(S, S'), \widetilde{a})$ на выходе схемы $\psi_2(S, S')$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
P_1(\psi_2(S, S'), \widetilde{a}) &\leqslant P_0(S', \widetilde{a})(1 - P_1(S, \widetilde{a}))^2 \cdot 5\varepsilon \\
&\quad + P_0(S', \widetilde{a})(1 - P_1(S, \widetilde{a}))P_1(S, \widetilde{a}) + P_0(S', \widetilde{a})P_1(S, \widetilde{a})(1 - P_1(S, \widetilde{a})) \\
&\quad + P_0(S', \widetilde{a})P_1^2(S, \widetilde{a}) + (1 - P_0(S', \widetilde{a}))(1 - P_1(S, \widetilde{a}))^2(2\varepsilon + 7\varepsilon^2) \\
&\quad + (1 - P_0(S', \widetilde{a}))(1 - P_1(S, \widetilde{a}))P_1(S, \widetilde{a}) \cdot 5\varepsilon \\
&\quad + (1 - P_0(S', \widetilde{a}))P_1(S, \widetilde{a})(1 - P_1(S, \widetilde{a})) \cdot 8\varepsilon + (1 - P_0(S', \widetilde{a}))P_1^2(S, \widetilde{a}) \\
&\leqslant 2\varepsilon + 7\varepsilon^2 + 5P_0(S', \widetilde{a})\varepsilon + 13P_1(S, \widetilde{a})\varepsilon \\
&\quad + 2P_0(S', \widetilde{a})P_1(S, \widetilde{a}) + P_1^2(S, \widetilde{a})
\end{aligned}$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
P_1(\psi_2(S, S'), \widetilde{a}) \leqslant 2\varepsilon + 7\varepsilon^2 + 5P_0(S', \widetilde{a})\varepsilon + 13P_1(S, \widetilde{a})\varepsilon \\
+ 2P_0(S', \widetilde{a})P_1(S, \widetilde{a}) + P_1^2(S, \widetilde{a})
\end{aligned}$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

Пусть входной набор $\widetilde{a}$ схемы S является единичным для функции f ($f(\widetilde{a}) = 1$) и нулевым для функции $\overline{f}$ ($\overline{f}(\widetilde{a}) = 0$). Вероятность ошибки $P_0(\psi_2(S, S'), \widetilde{a})$ на выходе схемы $\psi_2(S, S')$ в этом случае удовлетворяет

неравенству

$$\begin{aligned}P_0(\psi_2(S,S'),\widetilde{a}) \leqslant (1-P_1(S',\widetilde{a}))P_0^2(S,\widetilde{a})\\
+(1-P_1(S',\widetilde{a}))P_0(S,\widetilde{a})(1-P_0(S,\widetilde{a}))\cdot 8\varepsilon\\
+(1-P_1(S',\widetilde{a}))(1-P_0(S,\widetilde{a}))P_0(S,\widetilde{a})\cdot 5\varepsilon\\
+(1-P_1(S',\widetilde{a}))(1-P_0(S,\widetilde{a}))^2(2\varepsilon+7\varepsilon^2)+P_1(S',\widetilde{a})P_0^2(S,\widetilde{a})\\
+P_1(S',\widetilde{a})P_0(S,\widetilde{a})(1-P_0(S,\widetilde{a}))+P_1(S',\widetilde{a})(1-P_0(S,\widetilde{a}))P_0(S,\widetilde{a})\\
+P_1(S',\widetilde{a})(1-P_0(S,\widetilde{a}))^2\cdot 5\varepsilon \leqslant 2\varepsilon+7\varepsilon^2+5P_1(S',\widetilde{a})\varepsilon+13P_0(S,\widetilde{a})\varepsilon\\
+2P_1(S',\widetilde{a})P_0(S,\widetilde{a})+P_0^2(S,\widetilde{a})\end{aligned}$$

при $\varepsilon \in (0;1/200]$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}P_0(\psi_2(S,S'),\widetilde{a}) \leqslant 2\varepsilon+7\varepsilon^2+5P_1(S',\widetilde{a})\varepsilon+13P_0(S,\widetilde{a})\varepsilon\\
+2P_1(S',\widetilde{a})P_0(S,\widetilde{a})+P_0^2(S,\widetilde{a})\end{aligned}$$

при $\varepsilon \in (0;1/200]$.

Таким образом, при $\varepsilon \in (0;1/200]$ и $\widehat{P}(S,S') = \max\{P(S),P(S')\}$ получим

$$P(\psi_2(S,S')) \leqslant 2\varepsilon+7\varepsilon^2+18\varepsilon\widehat{P}(S,S')+3\widehat{P}^2(S,S').$$

Теорема 4 доказана.

Лемма 4. *При $\varepsilon \in (0;1/150]$ любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в базисе B_{13}^3 можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leqslant 2\varepsilon+70\varepsilon^2$.*

Доказательство. В базисе B_{13}^3 построим схему S_h, реализующую функцию $x_1|x_2$, моделируя формулу $x_1|x_2 = x_1 \to \overline{x}_2$. Схема S_h содержит два ненадёжных элемента. Ненадёжность одного из них не больше 2ε, другого — не больше ε. Поэтому ненадёжность схемы S_h не больше 3ε. Тогда $\mu \in (0;3\varepsilon]$ и $\varepsilon \in (0;1/150]$.

По лемме 2 при $\varepsilon \in (0;1/150]$ любую булеву функцию можно реализовать схемой с ненадёжностью не более 12ε, т. е. функцию f можно реализовать схемой $\widetilde{S}$ с ненадёжностью $P(\widetilde{S}) \leqslant 12\varepsilon$, а функцию $\overline{f}$ можно реализовать схемой $\widetilde{S}'$ с ненадёжностью $P(\widetilde{S}') \leqslant 12\varepsilon$.

В базисе B_{13}^3 справедлива теорема 4, так как из элементов этого базиса можно построить ту же схему, что и в теореме 4.

Применяя теорему 4, по схемам $\widetilde{S}$ и $\widetilde{S}'$ построим такую схему $\psi_2(\widetilde{S},\widetilde{S}')$, реализующую функцию f, что $P(\psi_2(\widetilde{S},\widetilde{S}')) \leqslant 2\varepsilon+655\varepsilon^2 \leqslant 7\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0;1/150]$. Аналогично по схемам $\psi_2(\widetilde{S},\widetilde{S}')$ и $\psi_2'(\widetilde{S},\widetilde{S}')$, реализующим соответственно функции f и $\overline{f}$, построим схему ψ_2^2, реализующую

функцию f с ненадёжностью $P(\psi_2^2) \leqslant 2\varepsilon + 280\varepsilon^2 \leqslant 4\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0; 1/150]$. Действуя аналогичным образом при $\varepsilon \in (0; 1/150]$, построим другие схемы, реализующие функцию f:

схему ψ_2^3 с ненадёжностью $P(\psi_2^3) \leqslant 2\varepsilon + 127\varepsilon^2 \leqslant 3\varepsilon$,
схему ψ_2^4 с ненадёжностью $P(\psi_2^4) \leqslant 2\varepsilon + 88\varepsilon^2$,
схему ψ_2^5 с ненадёжностью $P(\psi_2^5) \leqslant 2\varepsilon + 74\varepsilon^2$,
схему ψ_2^6 с ненадёжностью $P(\psi_2^6) \leqslant 2\varepsilon + 71\varepsilon^2$,
схему ψ_2^7 с ненадёжностью $P(\psi_1^7) \leqslant 2\varepsilon + 70\varepsilon^2$.

Схема ψ_2^7 искомая, т. е. $S = \psi_2^7$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *При $\varepsilon \in (0; 1/200]$ любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в базисе $B_{15}^3 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \sim x_2\}$ можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 66\varepsilon^2$.*

Доказательство. В базисе B_{15}^3, моделируя формулу $x_1|x_2 = x_1 \to (x_2 \to 0)$, построим схему S_h, реализующую функцию $x_1|x_2$. Схема S_h содержит три элемента, два из которых ненадёжные. Ненадёжность каждого из них не больше 2ε. Поэтому ненадёжность схемы S_h не больше 4ε. Тогда $\mu \in (0; 4\varepsilon]$ и $\varepsilon \in (0; 1/200]$.

По лемме 2 при $\varepsilon \in (0; 1/200]$ любую булеву функцию можно реализовать схемой с ненадёжностью не более 16ε, т. е. функцию f можно реализовать схемой $\widetilde{S}$ с ненадёжностью $P(\widetilde{S}) \leqslant 16\varepsilon$, а функцию $\overline{f}$ можно реализовать схемой $\widetilde{S}'$ с ненадёжностью $P(\widetilde{S}') \leqslant 16\varepsilon$.

Применяя теорему 4, по схемам $\widetilde{S}$ и $\widetilde{S}'$ построим схему $\psi_2(\widetilde{S}, \widetilde{S}')$, реализующую функцию f с ненадёжностью

$$P(\psi_2(\widetilde{S}, \widetilde{S}')) \leqslant 2\varepsilon + 1084\varepsilon^2 \leqslant 7\varepsilon + 84\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$. Применяя теорему 4 ещё раз, по схемам $\psi_2(\widetilde{S}, \widetilde{S}')$ и $\psi_2'(\widetilde{S}, \widetilde{S}')$, реализующим соответственно функции f и $\overline{f}$, построим схему ψ_2^2, реализующую функцию f с ненадёжностью

$$P(\psi_2^2) \leqslant 2\varepsilon + 308\varepsilon^2 \leqslant 3\varepsilon + 108\varepsilon^2$$

при $\varepsilon \in (0; 1/200]$. Действуя аналогичным образом при $\varepsilon \in (0; 1/200]$, построим другие схемы, реализующие f:

схему ψ_2^3 с ненадёжностью $P(\psi_2^3) \leqslant 2\varepsilon + 109\varepsilon^2$,
схему ψ_2^4 с ненадёжностью $P(\psi_2^4) \leqslant 2\varepsilon + 73\varepsilon^2$,
схему ψ_2^5 с ненадёжностью $P(\psi_2^5) \leqslant 2\varepsilon + 67\varepsilon^2$,
схему ψ_2^6 с ненадёжностью $P(\psi_1^6) \leqslant 2\varepsilon + 66\varepsilon^2$.

Схема ψ_2^6 искомая, т. е. $S = \psi_2^6$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *При $\varepsilon \in (0; 1/300]$ любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в каждом из базисов $B_{13}^2 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \not\to x_2\}$ и $B_{15}^2 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \not\to x_2\}$ можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 51\varepsilon^2$.*

Справедливость леммы 6 следует из того, что оба базиса B_{13}^2 и B_{15}^2 содержат базис $B_3 = \{x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$, в котором это утверждение верно (теорема 1).

Лемма 7. *При $\varepsilon \in (0; 1/200]$ любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ в каждом из базисов $B_{13}^4 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$ и $B_{15}^4 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \oplus x_2\}$ можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 66\varepsilon^2$.*

Справедливость леммы 7 следует из того, что каждый из базисов B_{13}^4 и B_{15}^4 содержит базис $B_4 = \{x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\}$, в котором это утверждение верно (теорема 1).

Лемма 8. *Пусть $\varepsilon \leqslant 1/150$ в базисах $B_{13}^5 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\}$, $B_{15}^5 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, 0\}$ и $B_{15}^6 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \vee x_2\}$, а $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция. Тогда функцию f в каждом из базисов $B_{13}^5, B_{15}^5, B_{15}^6$ можно реализовать схемой S с ненадёжностью $P(S) \leqslant 3\varepsilon + 41\varepsilon^2$.*

Справедливость леммы 8 следует из того, что каждый из базисов B_{13}^5, B_{15}^5 и B_{15}^6 содержит базис $B_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1\}$, в котором это утверждение верно (теорема 1).

Найдём нижние оценки ненадёжности схем.

1.2. Нижние оценки ненадёжности схем. Пусть базис $\widehat{B}$ — один из базисов B_{13}^1, B_{13}^2, B_{13}^3, B_{13}^4, B_{15}^1, B_{15}^2, B_{15}^3, B_{15}^4, для которых верхняя оценка ненадёжности схем асимптотически равна 2ε. Пусть $\widehat{K}(n)$ — множество, содержащее функции $x_i, \overline{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и константы 0, 1. Очевидно, число функций в множестве $\widehat{K}(n)$ равно $2n + 2$ и мало по сравнению с общим числом булевых функций 2^{2^n}.

Лемма 9. *Пусть $\varepsilon \in (0; 1/6]$, $f(\widetilde{x})$ — булева функция, $f \notin \widehat{K}(n)$, и S — любая схема, реализующая f в базисе $\widehat{B}$. Тогда $P(S) \geqslant 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.*

Справедливость леммы 9 следует из того, что базис $\widehat{B}$ содержится в базисе M, содержащем все булевы функции, зависящие не более чем от двух переменных, в котором это утверждение верно (теорема 2).

Из леммы 9 следует, что схемы, построенные при доказательстве лемм 3–8, для каждого из базисов $\widehat{B}$ являются асимптотически оптимальными по надёжности для всех функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, кроме функций $x_i, \overline{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и констант 0, 1. Очевидно, что функции x_i можно реализовать надёжно во всех рассматриваемых базисах, а функции $\overline{x}_i$ и константу 0 — лишь в тех базисах, которые содержат эти функции.

Для доказательства утверждений о нижних оценках схем в базисах B^5_{13}, B^5_{15} и B^6_{15} введём необходимые вспомогательные понятия и леммы 10–11.

Пусть в схеме S, реализующей булеву функцию $f(\widetilde{x})$, отличную от константы, выделена подсхема A, имеющая один вход, содержащая выход схемы S и реализующая инверсию. Обозначим через C подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы A (рис. 2). Очевидно, что схема C реализует $\overline{f}(\widetilde{x})$. Если выполнено неравенство $P(S) > P(C)$, то будем говорить, что схема C надёжнее схемы S и получается из S удалением подсхемы A.

Схема S, реализующая булеву функцию $f(\widetilde{x})$, отличную от константы, является c-схемой, если из неё нельзя получить более надёжную схему удалением подсхемы с одним входом, содержащей выход схемы S и реализующей $\overline{f}(\widetilde{x})$.

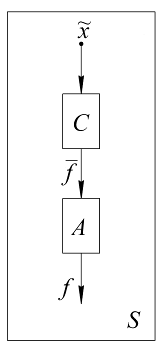

Рис. 2

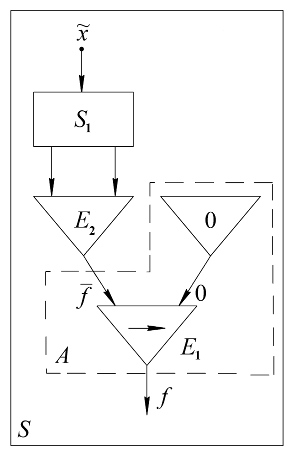

Рис. 3

Лемма 10 [4]. *Пусть схема S, ненадёжность которой равна $P(S)$, реализует функцию $f(\widetilde{x})$ и является c-схемой. Если в S можно выделить подсхему A, имеющую один вход, содержащую выход схемы S и реализующую инверсную функцию с вероятностями ошибок p_0 и p_1 (p_0 и p_1 — вероятности ошибок на выходе подсхемы A) такими, что $0 < p_0 + p_1 < 1$, то верно неравенство*

$$\min\left\{\frac{p_0}{p_0+p_1}, \frac{p_1}{p_0+p_1}\right\} \leqslant P(S).$$

Лемма 11 [2]. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная булева функция, отличная от константы, S — любая схема, реализующая $f(\widetilde{x})$, $\widetilde{a}$ — входной*

набор схемы S. Пусть подсхема R схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию $f'(\widetilde{x})$ с ненадёжностью $P(R) \in (0;1/2]$. Обозначим через p^1 минимум вероятностей ошибок на выходе схемы R по таким входным наборам $\widetilde{r}$, что $f'(\widetilde{r}) = 0$. Аналогично, p^0 — минимум вероятностей ошибок на выходе схемы R по таким входным наборам $\widetilde{r}$, что $f'(\widetilde{r}) = 1$.

Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют условиям: $P_1(S,\widetilde{a}) \geqslant p^1$, если $f(\widetilde{a}) = 0$; $\quad P_0(S,\widetilde{a}) \geqslant p^0$, если $f(\widetilde{a}) = 1$.

Замечание 2 [2]. Из леммы 11 следует, что $P(S) \geqslant \max\{p^0, p^1\}$.

Пусть $K^*(n)$ — множество функций $x_i^\delta \vee h(\widetilde{x})$ и константа 0 ($i = \overline{1,n}$). Очевидно, число функций в $K^*(n)$ не больше $2n \cdot 2^{2^{n-1}} - (2n-1)$ и мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Лемма 12. *Пусть $\varepsilon \in (0;1/10]$, $f(\widetilde{x})$ — булева функция, $f \notin K^*(n)$, S — любая схема в базисе $B_{15}^5 = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1\}$, реализующая $f(\widetilde{x})$. Тогда $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$.*

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — булева функция, удовлетворяющая условиям леммы, а S — произвольная схема, реализующая её в базисе B_{15}^5. Поскольку $f \notin K^*(n)$, схема S содержит по крайней мере два ненадёжных элемента E_1 и E_2. Пусть E_1 — элемент, содержащий выход схемы S. Разберём возможные случаи.

1. Элемент E_1 является импликатором.

1.1. Правый вход импликатора соединен с выходом элемента E_2, реализующего одну из функций $x_1 \to x_2$ или $\overline{x}_1$. Вероятность ошибки на выходе подсхемы, содержащей элементы E_1 и E_2, при поступлении на входы элемента E_1 набора (10) удовлетворяет неравенству

$$P_1 = p^1 \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon(1-2\varepsilon)^2 + \varepsilon^2(1-2\varepsilon) \geqslant 3\varepsilon - 4\varepsilon^2.$$

При $\varepsilon \in (0;1/10]$ применима лемма 11, поэтому $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 4\varepsilon^2$ (см. замечание 2).

1.2. Правый вход импликатора соединен с выходом надёжного элемента, реализующего константу 0. Если $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0;1/10]$, то утверждение теоремы справедливо.

Предположим противное: пусть схема S такова, что $P(S) < 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0;1/10]$. Выделим в схеме S подсхему A из двух элементов, а именно E_1 и элемента, реализующего константу 0 (рис. 3). Для подсхемы A вероятности ошибок на выходе равны $p_0 = \varepsilon - \varepsilon^2$, $p_1 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$. При $\varepsilon \in (0;1/10]$ подсхема A удовлетворяет условиям леммы 10.

Применим лемму 10 к схеме S и получим

$$\min\left\{\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{3\varepsilon-2\varepsilon^2}, \frac{2\varepsilon-\varepsilon^2}{3\varepsilon-2\varepsilon^2}\right\} = \frac{1-\varepsilon}{3-2\varepsilon}.$$

Исходя из сделанного предположения, приходим к выводу, что при $\varepsilon \in (0; 1/10]$ справедливо неравенство $(1-\varepsilon)/(3-2\varepsilon) < 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$. Домножим обе части последнего неравенства на положительное при $\varepsilon \in (0; 1/10]$ выражение $3-2\varepsilon$, перенесём все слагаемые в левую часть неравенства, получим $(1-10\varepsilon) + 12\varepsilon^2(2-\varepsilon) < 0$ при $\varepsilon \in (0; 1/10]$.

Анализируя сумму, стоящую в левой части последнего неравенства, приходим к выводу, что при $\varepsilon \in (0; 1/10]$ она положительна. Получили противоречие. Значит, предположение о том, что $P(S) < 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0; 1/10]$, неверно.

2. Элемент E_1 является инвертором, вход которого соединен с выходом элемента E_2.

2.1. E_2 является импликатором. Вероятность ошибки на выходе подсхемы, содержащей элементы E_1 и E_2, при поступлении на вход элемента E_1 значения (0) удовлетворяет неравенству

$$P_0 = p^0 \geqslant \varepsilon + (2\varepsilon - \varepsilon^2)(1-2\varepsilon) \geqslant 3\varepsilon - 5\varepsilon^2.$$

При $\varepsilon \in (0; 1/10]$ применима лемма 11, поэтому $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 5\varepsilon^2$ (см. замечание 2).

2.2. E_2 является инвертором. В этом случае схема содержит по крайней мере ещё один элемент базиса E_3, иначе $f \in K^*(n)$. Вероятность ошибки на выходе подсхемы, содержащей элементы E_1, E_2 и E_3, при поступлении на вход элемента E_1 значения (1) удовлетворяет неравенству

$$P_1 = p^1 \geqslant \varepsilon + (2\varepsilon - 2\varepsilon^2)(1-2\varepsilon) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2.$$

При $\varepsilon \in (0; 1/10]$ применима лемма 11, поэтому (см. замечание 2) $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$. Лемма 12 доказана.

Лемма 13 [5]. *Пусть $\varepsilon \in (0; 1/6]$, $f(\widetilde{x})$ — булева функция, $f \notin K^*(n)$, S — любая схема в базисе $B_{13}^5 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\}$, реализующая $f(\widetilde{x})$. Тогда $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$.*

Лемма 14. *Пусть $\varepsilon \in (0; 1/10]$, $f(\widetilde{x})$ — булева функция, $f \notin K^*(n)$, S — любая схема в базисе $B_{15}^6 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \vee x_2\}$, реализующая $f(\widetilde{x})$. Тогда $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$.*

Доказательство. Пусть $f(\widetilde{x})$ — булева функция, удовлетворяющая условиям леммы, а S — произвольная схема, реализующая её в базисе B_{15}^6. Поскольку $f \notin K^*(n)$, схема S содержит по крайней мере два ненадёжных элемента E_1 и E_2. Пусть E_1 — элемент, содержащий выход схемы S. Разберём возможные случаи.

1. Элемент E_1 является импликатором.

1.1. Правый вход импликатора соединен с выходом элемента E_2, реализующего одну из функций $x_1 \to x_2$ или $x_1 \vee x_2$. Вероятность ошибки на выходе подсхемы, содержащей элементы E_1 и E_2, при поступлении на входы элемента E_1 набора (10) удовлетворяет неравенству

$$P_1 = p^1 \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2 + (2\varepsilon - \varepsilon^2)(1-2\varepsilon)^2 + (2\varepsilon - \varepsilon^2)\varepsilon(1-2\varepsilon) \geqslant 4\varepsilon - 8\varepsilon^2.$$

При $\varepsilon \in (0;1/10]$ применима лемма 11, поэтому $P(S) \geqslant 4\varepsilon - 8\varepsilon^2$ (см. замечание 2).

1.2. Правый вход импликатора соединен с выходом надёжного элемента, реализующего константу 0. Если $P(S) \geqslant 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0;1/10]$, то утверждение теоремы справедливо.

Предположим противное: схема S такова, что $P(S) < 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0;1/10]$. Выделим в схеме S подсхему A из двух элементов, а именно E_1 и надёжного элемента, реализующего константу 0 (рис. 3). Для подсхемы A вероятности ошибок на выходе равны $p_0 = \varepsilon - \varepsilon^2$, $p_1 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$. При $\varepsilon \in (0;1/10]$ подсхема A удовлетворяет условиям леммы 10. Применим лемму 10 к схеме S и получим

$$\min\left\{\frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{3\varepsilon - 2\varepsilon^2}, \frac{2\varepsilon - \varepsilon^2}{3\varepsilon - 2\varepsilon^2}\right\} = \frac{1-\varepsilon}{3-2\varepsilon} < 3\varepsilon - 6\varepsilon^2,$$

что неверно при $\varepsilon \in (0;1/10]$ (как в доказательстве леммы 12). Значит, предположение о том, что $P(S) < 3\varepsilon - 6\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0;1/10]$ неверно.

2. Элемент E_1 является дизъюнктором.

2.1. Один из входов дизъюнктора E_1 соединен с выходом элемента E_2, реализующего одну из функций $x_1 \to x_2$ или $x_1 \vee x_2$. Вероятность ошибки на выходе подсхемы, содержащей элементы E_1 и E_2 при поступлении на входы элемента E_1 набора (00), удовлетворяет неравенству

$$P_1 = p^1 \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2 + (2\varepsilon - \varepsilon^2)(1 - 3\varepsilon + \varepsilon^2) \geqslant 4\varepsilon - 8\varepsilon^2.$$

При $\varepsilon \in (0;1/10]$ применима лемма 11, поэтому $P(S) \geqslant 4\varepsilon - 8\varepsilon^2$ (см. замечание 2).

2.2. Оба входа дизъюнктора E_1 соединены с выходом одного элемента E_2, реализующего одну из функций $x_1 \to x_2$ или $x_1 \vee x_2$. Вероятность

ошибки на выходе подсхемы, содержащей элементы E_1 и E_2, при поступлении на входы элемента E_1 набора (00) удовлетворяет неравенству

$$P_1 = p^1 \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon^2 + (2\varepsilon - \varepsilon^2)(1 - 2\varepsilon) \geqslant 4\varepsilon - 6\varepsilon^2.$$

При $\varepsilon \in (0; 1/10]$ применима лемма 11, поэтому (см. замечание 2) $P(S) \geqslant 4\varepsilon - 6\varepsilon^2$. Лемма 14 доказана.

Из лемм 12–14 следует, что схемы, для которых выполняются условия леммы 8, являются асимптотически оптимальными по надёжности для почти всех булевых функций в соответствующих базисах.

Полученные результаты приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

$\widetilde{B}$	a	b	d	$\widehat{b}$	$\widehat{d}$	$K(n)$
$B_{13}^1 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \& x_2\}$	2	57	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{13}^2 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \not\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{13}^3 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\}$	2	70	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{13}^4 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{13}^5 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\}$	3	41	1/150	−6	1/6	$x_i^\delta \vee h(\widetilde{x}), 0$
$B_{15}^1 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \& x_2\}$	2	55	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{15}^2 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \not\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{15}^3 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{15}^4 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{15}^5 = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1\}$	3	41	1/150	−6	1/10	$x_i^\delta \vee h(\widetilde{x}), 0$
$B_{15}^6 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \vee x_2\}$	3	41	1/150	−6	1/10	$x_i^\delta \vee h(\widetilde{x}), 0$

Пусть базис $\widetilde{B}$ — один из приводимых полных базисов, полученный из базисов B_{13} и B_{15} добавлением ровно одной булевой функции, зависящей не более чем от двух переменных. Тогда в базисе $\widetilde{B}$ справедливы теоремы 1 и 2, а соответствующие константы и множество $K(n)$ представлены в табл. 2.

Отметим, что все доказанные утверждения справедливы не только в перечисленных базисах B_{13}^1–B_{13}^5, B_{15}^1–B_{15}^6, но и в соотвествующих им двойственных базисах B_{12}^1–B_{12}^5, B_{14}^1–B_{14}^6 (табл. 3), так как при инверсных неисправностях на входах элементов ненадёжности двойственных схем в двойственных базисах равны [1].

Используемые в табл. 2 и 3 обозначения те же, что и в табл. 1.

Таблица 3

$\widetilde{B}$	a	b	d	$\widehat{b}$	$\widehat{d}$	$K(n)$
$B_{12}^1 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\}$	2	57	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{12}^2 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{12}^3 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{12}^4 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$	2	70	1/150	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{12}^5 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \& x_2\}$	3	41	1/150	−6	1/6	$x_i^\delta \& h(\widetilde{x}), 1$
$B_{14}^1 = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{14}^2 = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \vee x_2\}$	2	55	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{14}^3 = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{14}^4 = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B_{14}^5 = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1\}$	3	41	1/150	−6	1/10	$x_i^\delta \& h(\widetilde{x}), 1$
$B_{14}^6 = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \& x_2\}$	3	41	1/150	−6	1/10	$x_i^\delta \& h(\widetilde{x}), 1$

Таким образом, доказано, что если к каждому из неприводимых полных базисов B_1–B_{17} добавить ровно одну булеву функцию, зависящую не более чем от двух переменных, то в большинстве полученных базисов ненадёжность асимптотически оптимальных схем понижается до 2ε ($\varepsilon \to 0$), т. е. становится тривиальной. Исключение составляют лишь базисы $B_{12}^5 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \& x_2\}$, $B_{14}^5 = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1\}$, $B_{14}^6 = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \& x_2\}$ и двойственные им базисы $B_{13}^5 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\}$, $B_{15}^5 = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1\}$, $B_{15}^6 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \vee x_2\}$ [1].

2. Реализация булевых функций с асимптотической ненадёжностью 2ε

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. *Выяснить, сколько и каких функций нужно добавить к базисам $B_{12}^5 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \& x_2\}$, $B_{14}^5 = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1\}$, $B_{14}^6 = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \& x_2\}$, $B_{13}^5 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\}$, $B_{15}^5 = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1\}$, $B_{15}^6 = \{x_1 \to x_2, 0, x_1 \vee x_2\}$ для того, чтобы оценка ненадёжности в полученных базисах стала тривиальной.*

К каждому из базисов B_{12}^5, B_{14}^5 и B_{14}^6 последовательно будем добавлять по одной булевой функции до тех пор, пока верхние оценки ненадёжности схем в полученных базисах станут не больше $2\varepsilon + b\varepsilon^2$, где b — некоторая зависящая лишь от базиса константа.

2.1. Верхние оценки ненадёжности схем.

Лемма 15. *При* $\varepsilon \in (0; 1/300]$ *в каждом из базисов*

$$B_{12}^{51} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \to x_2\},$$
$$B_{14}^{51} = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \& x_2, x_1 \to x_2\},$$
$$B_{14}^{61} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \to x_2\}$$

любую булеву функцию $f(\widetilde{x})$ *можно реализовать схемой* S *с ненадёжностью* $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 51\varepsilon^2$.

Справедливость леммы 15 следует из того, что каждый из базисов B_{12}^{51}, B_{14}^{51} и B_{14}^{61} содержит базис $B_3 = \{x_1 \not\to x_2, x_1 \to x_2, \}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

Лемма 16. *При* $\varepsilon \in (0; 1/200]$ *любую булеву функцию* $f(\widetilde{x})$ *в каждом из базисов*

$$B_{12}^{52} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \sim x_2\},$$
$$B_{14}^{52} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\},$$
$$B_{14}^{62} = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \& x_2, x_1 \sim x_2\}$$

можно реализовать схемой S *с ненадёжностью* $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 66\varepsilon^2$.

Справедливость леммы 16 следует из того, что каждый из базисов B_{12}^{52} и B_{14}^{52} содержит базис $B_5 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\}$, базис B_{14}^{62} содержит базис $B_{14}^{3} = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \sim x_2\}$, а в базисах B_5 и B_{14}^{3} это утверждение верно (теорема 1).

Лемма 17. *При* $\varepsilon \in (0; 1/150]$ *любую булеву функцию* $f(\widetilde{x})$ *в каждом из базисов*

$$B_{12}^{53} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\},$$
$$B_{14}^{53} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$$

можно реализовать схемой S *с ненадёжностью* $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 70\varepsilon^2$.

Справедливость леммы 17 следует из того, что каждый из базисов B_{12}^{53} и B_{14}^{53} содержит базис $B_{12}^{4} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

Лемма 18. *При* $\varepsilon \in (0; 1/200]$ *любую булеву функцию* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $B_{14}^{63} = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$ *можно реализовать схемой* S *с ненадёжностью* $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 66\varepsilon^2$.

Справедливость леммы 18 следует из того, что B_{14}^{63} содержит базис $B_{14}^{4} = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \oplus x_2\}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

Лемма 19. *При* $\varepsilon \in (0; 1/200]$ *любую булеву функцию* $f(\widetilde{x})$ *в каждом из базисов*

$$B_{12}^{54} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2, x_1 \vee x_2\},$$
$$B_{14}^{54} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\},$$
$$B_{14}^{64} = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1\&x_2, x_1 \vee x_2\}$$

можно реализовать схемой S *с ненадёжностью* $P(S) \leqslant 2\varepsilon + 55\varepsilon^2$.

Справедливость леммы 19 следует из того, что каждый из базисов B_{12}^{54}, B_{14}^{54} и B_{14}^{64} содержит базис $B_{14}^{2} = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \vee x_2\}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

Лемма 20. *При* $\varepsilon \in (0; 1/150]$ *любую булеву функцию* $f(\widetilde{x})$ *в базисе* $B_{14}^{65} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2, 1\}$ *можно реализовать схемой* S *с ненадёжностью* $P(S) \leqslant 3\varepsilon + 41\varepsilon^2$.

Справедливость леммы 20 следует из того, что B_{14}^{65} содержит базис $B_{14}^{6} = \{x_1 \not\to x_2, x_1\&x_2, 1\}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

С другой строны, базис B_{14}^{65} можно получить добавлением константы 1 к базису $B_{16}^{4} = \{x_1 \not\to x_2, x_1\&x_2, \overline{x}_1\}$. Так как в базисе B_{16}^{4} нижняя оценка ненадёжности схем асимптотически равна 3ε (теорема 2), то и в B_{14}^{65} эта оценка асимптотически равна 3ε, так как нижняя оценка ненадёжности схем не зависит от добавления надёжных элементов, реализующих константы (см. замечание 1).

Учитывая лемму 20, приходим к выводу, что добавив к базису $B_{14}^{6} = \{x_1 \not\to x_2, x_1\&x_2, 1\}$ только одну булеву функцию — инверсию, нельзя добиться понижения асимптотической оценки ненадёжности схем до 2ε. Следовательно, к базису $B_{14}^{65} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2, 1\}$ необходимо добавить ещё одну булеву функцию. Получим базисы

$$B_{14}^{651} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2, 1, x_1 \vee x_2\},$$
$$B_{14}^{652} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2, 1, x_1 \to x_2\},$$
$$B_{14}^{653} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2, 1, x_1 \sim x_2\},$$
$$B_{14}^{654} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1\&x_2, 1, x_1 \oplus x_2\}.$$

В базисе B_{14}^{651} справедлива лемма 19, так как этот базис содержит

базис $B_{14}^2 = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \vee x_2\}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

В базисе B_{14}^{652} справедлива лемма 15, так как этот базис содержит базис $B_3 = \{x_1 \not\to x_2, x_1 \to x_2\}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

В базисе B_{14}^{653} справедлива лемма 16, так как этот базис содержит базис $B_5 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

В базисе B_{14}^{654} справедлива лемма 17, так как этот базис содержит базис $B_{12}^4 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$, для которого это утверждение верно (теорема 1).

Утверждения, аналогичные леммам 15–19, справедливы не только в перечисленных базисах, но и в двойственных им базисах [1].

Найдём нижние оценки ненадёжности схем в каждом из рассматриваемых в этом разделе базисов.

2.2. Нижние оценки ненадёжности схем. Пусть B^* — один из рассмотренных в п. 2.1 базисов, для которых асимптотическая оценка ненадёжности схем равна 2ε, $K^*(n)$ — множество, содержащее функции $x_i, \overline{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и константы 0, 1. Очевидно, число функций в множестве $K^*(n)$ равно $2n + 2$ и мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

Для базиса B^* справедлива

Лемма 21. *Пусть $\varepsilon \in (0; 1/6]$, $f(\widetilde{x})$ — булева функция, $f \notin K^*(n)$, S — любая схема в базисе B^*, реализующая f. Тогда $P(S) \geqslant 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.*

Справедливость леммы 21 следует из того, что базис B^* содержится в базисе M, содержащем все булевы функции, зависящие не более чем от двух переменных, в котором это утверждение верно (теорема 2).

Лемма 21 справедлива и для базиса, двойственного базису B^* [1].

Таким образом, получены следующие результаты.

Если к базису $B_{12}^5 = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x}_1, x_1 \& x_2\}$ добавить ещё одну булеву функцию, зависящую не более чем от двух переменных, то в полученных базисах $B_{12}^{51} - B_{12}^{54}$ и двойственных им базисах $B_{13}^{51} - B_{13}^{54}$ справедливы теоремы 1 и 2 [1], а соответствующие константы и множества $K(n)$ представлены в табл. 4.

Используемые в табл. 4 обозначения те же, что и в табл. 1.

Таблица 4

$\widetilde{B}$	a	b	d	$\widehat{b}$	$\widehat{d}$	$K(n)$
$B_{12}^{51}=\{x_1\not\to x_2,\overline{x}_1,x_1\&x_2,x_1\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{12}^{52}=\{x_1\not\to x_2,\overline{x}_1,x_1\&x_2,x_1\sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{12}^{53}=\{x_1\not\to x_2,\overline{x}_1,x_1\&x_2,x_1\oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{12}^{54}=\{x_1\not\to x_2,\overline{x}_1,x_1\&x_2,x_1\vee x_2\}$	2	57	1/150	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{13}^{51}=\{x_1\to x_2,\overline{x}_1,x_1\vee x_2,x_1\not\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{13}^{52}=\{x_1\to x_2,\overline{x}_1,x_1\vee x_2,x_1\oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{13}^{53}=\{x_1\to x_2,\overline{x}_1,x_1\vee x_2,x_1\sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{13}^{54}=\{x_1\to x_2,\overline{x}_1,x_1\vee x_2,x_1\&x_2\}$	2	57	1/150	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$

Таблица 5

$\widetilde{B}$	a	b	d	$\widehat{b}$	$\widehat{d}$	$K(n)$
$B_{14}^{61}=\{x_1\not\to x_2,1,x_1\&x_2,x_1\to x_2\}\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{14}^{62}=\{x_1\not\to x_2,1,x_1\&x_2,x_1\sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{14}^{63}=\{x_1\not\to x_2,1,x_1\&x_2,x_1\oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{14}^{64}=\{x_1\not\to x_2,1,x_1\&x_2,x_1\vee x_2\}$	2	55	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{14}^{651}=\{x_1\not\to x_2,1,x_1\&x_2,\overline{x}_1,x_1\vee x_2\}$	2	55	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{14}^{652}=\{x_1\not\to x_2,1,x_1\&x_2,\overline{x}_1,x_1\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{14}^{653}=\{x_1\not\to x_2,1,x_1\&x_2,\overline{x}_1,x_1\sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{14}^{654}=\{x_1\not\to x_2,1,x_1\&x_2,\overline{x}_1,x_1\oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{15}^{61}=\{x_1\to x_2,0,x_1\vee x_2,x_1\not\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{15}^{62}=\{x_1\to x_2,0,x_1\vee x_2,x_1\oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{15}^{63}=\{x_1\to x_2,0,x_1\vee x_2,x_1\sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{15}^{64}=\{x_1\to x_2,0,x_1\vee x_2,x_1\&x_2\}$	2	55	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{15}^{651}=\{x_1\to x_2,0,x_1\vee x_2,\overline{x}_1,x_1\&x_2\}$	2	55	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{15}^{652}=\{x_1\to x_2,0,x_1\vee x_2,\overline{x}_1,x_1\not\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{15}^{653}=\{x_1\to x_2,0,x_1\vee x_2,\overline{x}_1,x_1\oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$
$B_{15}^{654}=\{x_1\to x_2,0,x_1\vee x_2,\overline{x}_1,x_1\sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i,\overline{x}_i,0,1$

Если к базису $B^6_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, x_1 \& x_2\}$ добавить одну булеву функцию, зависящую от двух переменных, то в полученных базисах B^{61}_{14}–B^{64}_{14} и двойственных им B^{61}_{15}–B^{64}_{15} справедливы теоремы 1 и 2, а соответствующие им константы и множества $K(n)$ представлены в табл. 5. Если к базису B^6_{14} добавить две функции, одна из которых — инверсия, а вторая — любая другая булева функция, существенно зависящая от двух переменных, то получим базисы B^{651}_{14}–B^{654}_{14}. В полученных базисах B^{651}_{14}–B^{654}_{14} и двойственных им базисах B^{651}_{15}–B^{654}_{15} справедливы теоремы 1 и 2 [1], а соответствующие им константы и множества $K(n)$ представлены в табл. 5. Используемые в табл. 5 обозначения те же, что и в табл. 1.

Таблица 6

$\widetilde{B}$	a	b	d	$\widehat{b}$	$\widehat{d}$	$K(n)$
$B^{81}_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \to x_2\}\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{82}_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{83}_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{84}_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2\}$	2	55	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{851}_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{852}_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{853}_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{81}_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1, x_1 \not\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{82}_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{83}_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{84}_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1, x_1 \& x_2\}$	2	55	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{851}_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2, x_1 \not\to x_2\}$	2	51	1/300	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{852}_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$
$B^{853}_{15} = \{x_1 \to x_2, 0, \overline{x}_1, x_1 \vee x_2, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	−2	1/6	$x_i, \overline{x}_i, 0, 1$

Если к базису $B^8_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1, \overline{x}_1\}$ добавить ещё одну булеву функцию, существенно зависящую от двух переменных и не равную конъюнкции, то в полученных базисах B^{81}_{14}–B^{84}_{14} и двойственных им B^{81}_{15}–B^{84}_{15} справедливы теоремы 1 и 2, а соответствующие им константы и множества $K(n)$ представлены в табл. 6. Если же к базису B^8_{14} добавить две функции, одна из которых — конъюнкция, а вторая — любая булева функция, существенно зависящая от двух переменных, то получим

базисы B_{14}^{851}–B_{14}^{853}. В полученных базисах B_{14}^{851}–B_{14}^{853} и двойственных им базисах B_{15}^{851}–B_{15}^{853} справедливы теоремы 1 и 2 [1], а соответствующие константы и множества $K(n)$ представлены в табл. 6. Используемые в табл. 6 обозначения те же, что и в табл. 1.

Таким образом, доказано, что если к каждому из неприводимых полных базисов B_{12}–B_{17} добавить ещё k ($k \geqslant 3$) неконстантных и не конгруэнтных базисным булевых функций, зависящих не более чем от двух переменных, то во всех полученных базисах ненадёжность асимптотически оптимальных по надёжности схем из функциональных элементов, подверженных инверсным неисправностям на входах элементов, асимптотически равна 2ε ($\varepsilon \to 0$) для всех функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, исключая константы 0, 1 и функции x_i, $\overline{x}_i (i = \overline{1, n})$, где ε — вероятность ошибки на каждом входе функционального элемента.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** О надёжности двойственных схем // Материалы XI школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Н. Новгород, 20–25 ноября 2000 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2000. — С. 6–8.
2. **Алехина М. А.** Нижние оценки ненадёжности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2002. — Т. 9, № 3. — С. 3–28.
3. **Алехина М. А., Чугунова В. В.** Об асимптотически наилучших по надёжности схемах в базисе $\{\&, \vee, \ \}$ при инверсных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 4. — С. 3–17.
4. **Чугунова В. В.** Синтез асимптотически оптимальных по надёжности схем при инверсных неисправностях на входах элементов // Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Пенза: Пензенский гос. ун-т, 2007. — 110 с.
5. **Чугунова В. В.** О надёжности схем в некоторых приводимых полных базисах // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. № 2. — 2007. — С. 25—37. http://www.pnzgu.ru/dep/k_dm/files/chugunova.pdf

Чугунова Варвара Валерьевна,
e-mail: burchug@sura.ru

Статья поступила
19 февраля 2008 г.
Переработанный вариант —
14 июля 2008 г.