ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2009. Том 16, № 1. С. 3–36

УДК 519.854.2

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ С ПРЕРЫВАНИЯМИ ОПЕРАЦИЙ*)

Ф. Баптист, Ж. Карлье, А. В. Кононов, М. Керан,
С. В. Севастьянов, М. Свириденко

Аннотация. Рассматриваются задачи на построение расписаний с разрешением прерываний операций, в которых каждая операция может быть прервана и возобновлена позднее без какого-либо штрафа. Исследуются фундаментальные свойства оптимальных решений этих задач такие, как существование оптимального решения (при условии, что множество допустимых решений непусто), конечность/полиномиальность числа прерываний в оптимальном решении, существование оптимального решения с прерываниями лишь в целочисленных точках и т. п. Такие теоретические вопросы представляют и практический интерес, поскольку структурные свойства оптимальных решений могут быть использованы для уменьшения пространства поиска в практических задачах на построение расписаний. В статье даются ответы на некоторые из этих фундаментальных вопросов для достаточно общей модели теории расписаний (включающей в качестве её частных случаев классические модели на параллельных машинах, цеховые модели и модели календарного планирования с ресурсными ограничениями) и для широкого множества целевых функций, включающего почти все известные. Для двух специальных классов целевых функций (включающих, тем не менее, все классические целевые функции) доказывается существование оптимального решения, обладающего специальной «рациональной» структурой. Важным следствием этого свойства является то, что распознавательные версии многих известных задач теории расписаний с допущением прерываний операций принадлежат классу NP.

Ключевые слова: теория расписаний, прерывание, оптимальное расписание.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08–06–9200–ННС (третьего автора) и 08–01–00370 (пятого автора)). The fourth author was supposed by a research grant from the Natural Sciences and Research Council of Canada.

Введение

Мотивация. Под задачей теории расписаний с прерываниями подразумевается задача, где любая операция в любой момент времени может быть прервана и возобновлена позднее (без какого-либо штрафа либо с таковым). Следует отметить, что прерывания возникают естественным образом во многих реальных процессах. Простейшим примером такого процесса является передача данных в сети Интернет. Когда мы хотим послать большой файл, то не имеет смысла посылать его единым куском. Проще разделить его на более мелкие части, варьируя канал и время передачи для различных частей. Другими примерами являются дрель или мотор, которые нагреваются во время работы. Такой инструмент нуждается в остановке на некоторое время с целью охлаждения. Аналогично, человек, выполняющий некоторую работу, время от времени нуждается в отдыхе либо в переключении на другую работу. Во всех этих ситуациях операция, выполняемая таким «инструментом», должна быть прервана и возобновлена позднее.

Точнее было бы сказать, что трудно придумать какую-либо механическую операцию, которая НЕ может быть прервана. Такие неразрывные процессы чаще всего возникают в химии и металлургии. (Также понятно, что когда мы выпекаем хлеб в духовке, то этот процесс лучше не прерывать, пока хлеб не будет испечён.)

Таким образом, мы можем заметить, что процессы, допускающие прерывания, являются более естественными и чаще возникают в реальной жизни, чем процессы, где прерывания невозможны. Тем не менее, следует признать, что в теории расписаний главным образом исследуются модели и задачи без прерываний. И эта странная ситуация имеет простое объяснение.

Дело в том, что, как правило, задачи с прерываниями характеризуются более сложной (и зачастую трудно предсказуемой) структурой их оптимальных расписаний. В ситуации, когда общее число прерываний не ограничено, а множество допустимых для прерывания точек каждой операции имеет континуальную мощность, мы не можем предложить точных переборных алгоритмов решения задачи, если не выполнен нетривиальный предварительный анализ свойств её оптимальных решений. Такой анализ имеет целью редуцировать исходное бесконечное множество возможных точек прерывания до некоторого множества конечной мощности, допускающего его прямой перебор. Однако для большинства задач теории расписаний такой анализ трудно осуществим. Лишь для достаточно простых задач мы имеем представление о том, как выглядят

их оптимальные расписания, и эти знания помогают нам при разработке эффективных алгоритмов их решения.

Среди хорошо известных примеров таких «простых» задач — задачи на минимум длины расписания для параллельных машин ($P|pmtn|C_{\max}$, алгоритм МакНотона [9]) и для задачи open shop ($O|pmtn|C_{\max}$, алгоритм Гонзалеза и Сани [4]). Обе задачи имеют дело с простейшим классическим критерием, оптимальное значение которого легко вычисляется для любого примера за линейное время. Для большинства других задач с прерываниями ситуация не столь оптимистична, и даже простейших переборных алгоритмов их точного решения до сих пор не известно. Вот почему задачи с прерываниями представляют на сегодняшний день малоисследованную область теории расписаний.

В этой ситуации возникает «крамольный» вопрос: а почему мы уверены, что оптимальное решение всегда существует? (Имеется в виду ситуация, когда множество допустимых решений непусто, но среди них нет наилучшего решения.) Рассмотрим следующие два примера.

Пример 1. Имеется одна работа единичной длительности, которая выполняется на единственной машине; целевая функция $f_1(C_1)$ зависит от момента C_1 завершения работы J_1 как

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 1; \\ x-1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Инфимум целевой функции по всем допустимым расписаниям равен нулю, но не достигается ни на каком допустимом расписании — ни с прерываниями, ни без прерываний.

Как читатель может заключить из приведённого примера, отсутствие в нём оптимального решения проистекает из-за отсутствия свойства целевой функции быть неубывающей. Теперь рассмотрим пример другой задачи, где указанная причина устранена.

Пример 2. В стандартной системе обозначений [8] данная задача может быть записана как $Q2|p_j = 1, pmtn|\sum f_j(C_j)$. В рассматриваемом примере этой задачи имеется две работы J_1 и J_2 с единичными длительностями. Требуется построить расписание их выполнения на двух подобных машинах M_1 и M_2 с заданными скоростями $s_1 = 1$ и $s_2 = 2$ с разрешением прерываний, минимизирующее аддитивную целевую функцию $F(C_1, C_2) = f_1(C_1) + f_2(C_2)$ от переменных C_1, C_2, где

$$f_1(x) = 2x; \quad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < 3/4; \\ x+1 & \text{при } x \geqslant 3/4. \end{cases}$$

Как можно заметить, целевая функция является теперь неубывающей (хотя и не непрерывной), и инфимум её значений по всем допустимым расписаниям с разрешением прерываний равняется 7/4. Однако это значение не может быть достигнуто, и тем самым оптимального решения для данного примера не существует. В то же время оптимальное решение для соответствующей задачи без прерываний существует.

В примере 2 нашу неудачу в достижении оптимума можно связать с отсутствием свойства непрерывности целевой функции. В связи с этим было бы интересно отыскать некоторые минимальные условия на целевую функцию, выполнение которых в задаче с допущением прерываний гарантировало бы существование по крайней мере одного оптимального решения. Конечно, едва ли возможно отыскание неких универсальных условий, подходящих для всех задач на построение расписаний. Однако, как доказано в разд. 2.3, существуют некоторые минимальные «достаточно универсальные» требования к целевой функции, которые для широкого круга задач теории расписаний гарантируют существование оптимального решения заданного примера при условии, что множество его допустимых решений непусто. (Забегая вперёд, можем сказать, что для многих задач целевой функции достаточно быть неубывающей и непрерывной слева.)

Имеются и другие интересные вопросы, характерные лишь для задач с прерываниями. Например, для каких задач гарантировано не более чем конечное/полиномиальное число прерываний в оптимальном расписании (и тем самым задача алгоритмически/полиномиально разрешима)? В каких случаях можно гарантировать, что все прерывания в оптимальном расписании происходят в целых (или рациональных) точках? Вопросы такого типа исследуются в данной статье для широкого круга моделей теории расписаний и целевых функций.

Новые результаты. Мы получили некоторые общие результаты для задач на построение расписаний с прерываниями, касающиеся существования оптимального расписания, а также существования оптимального расписания с конечным числом прерываний. Такие результаты установлены для широкого круга моделей, включая большинство как классических, так и нетрадиционных моделей теории расписаний и календарного планирования с ресурсными ограничениями, а также для широкого круга целевых функций, включая все классические.

Наконец, для достаточно общей расписательной модели и достаточно общих целевых функций мы получили теоремы о рациональной структуре (теоремы 3 и 4), согласно которым для любого примера с непустым

множеством допустимых решений существует оптимальное расписание со следующими свойствами:

(1) суммарное число прерываний не превосходит полинома от числа операций и от числа фиксированных дат, заданных на входе;

(2) все точки переключения в расписании (т. е. моменты начала, завершения, прерывания и возобновления операций) совпадают с моментами времени, кратными некоторому рациональному числу $\delta > 0$; при этом длина записи числа δ ограничена полиномом от длины записи входа задачи;

(3) оптимальное значение целевой функции является числом, кратным числу δ, при этом длина записи коэффициента кратности также ограничена полиномом от длины записи входа.

Важным следствием этих теорем о рациональной структуре является заключение о том, что распознавательные аналоги оптимизационных задач с прерываниями принадлежат классу NP. Действительно, для любого заданного примера такой задачи и заданного ограничения сверху на значение целевой функции существует сертификат полиномиального размера, подтверждающий положительный ответ на вопрос о существовании допустимого решения со значением целевой функции не более заданной величины в том случае, когда ответ действительно положительный. Такой сертификат предоставляется оптимальным расписанием, обладающим свойствами (1)–(3) (при этом значение оптимума не превосходит заданной границы).

Известные результаты. В литературе, посвящённой задачам теории расписаний с прерываниями, встречается не так много систематических исследований подобных общих вопросов, и большинство известных результатов о структурных свойствах оптимальных решений следуют либо (i) из доказанного факта, что прерывания не дают какого-либо преимущества [1, 2], либо (ii) из существования полиномиального алгоритма (или из каких-то его свойств). Результаты, следующие из (i), являются, очевидно, сильнейшими структурными результатами, на которые только можно надеяться при решении задач на построение расписаний с прерываниями. Многие из этих классических результатов могут быть найдены в стандартной литературе по теории расписаний (например, в [8]); другим богатым источником подобных результатов является книга Танаева, Гордона и Шафранского [13].

Структурные результаты, вытекающие из (ii), были получены в основном для задач с параллельными машинами и для задачи open shop. МакНотон [9] разработал алгоритм построения оптимального расписа-

ния с не более чем $m-1$ прерываниями для задачи $P|pmtn|C_{\max}$ на m идентичных параллельных машинах на минимум длины расписания. Гонзалез и Сани [5] построили оптимальное расписание с не более чем $2(m-1)$ прерываниями для версии этой задачи с подобными параллельными машинами ($Q|pmtn|C_{\max}$). Оценки на число прерываний (и на число моментов прерываний), полученные МакНотоном и Гонзалезом и Сани, точны. Лабетул и др. [6] доказали, что простой жадный алгоритм для задачи $Q|r_j, pmtn|\sum\limits_j C_j$ с m машинами и n работами находит оптимальное решение с не более чем $2n-m$ прерываниями. Для задачи $R|pmtn|C_{\max}$ с неродственными параллельными машинами Лолэ и др. [8] установили, что алгоритм Лолэ и Лабетула [7] может быть усовершенствован с гарантией построения оптимальных расписаний с не более чем $O(m^2)$ прерываниями. Возвращаясь к задаче open shop, мы можем упомянуть результат Гонзалеза и Сани [4], которые построили оптимальное расписание для задачи $O|pmtn|C_{\max}$ с m машинами, n работами и ξ операциями, имеющее не более $\xi+n+m$ моментов прерываний. Ду и Люнг [3] получили соответствующий результат для $O2|pmtn|\sum\limits_j C_j$. Для других цеховых задач с прерываниями подобные структурные вопросы не получили достаточного внимания со стороны специалистов по теории расписаний, о чём свидетельствуют пробелы в литературе.

Некоторые общие структурные результаты были получены Сауэром и Стоуном [11] (см. также [10]). Они доказали, что для задачи на параллельных машинах на минимум длины расписания выполнения n работ единичной длины с разрешением прерываний в процессе их выполнения и ограничениями предшествования всегда существует оптимальное расписание с не более чем $n-1$ моментами прерываний. Они также показали, что длина временного интервала между двумя последовательными моментами прерываний есть рациональное число, и получили нижнюю оценку его значения. Мы обобщаем технику, используемую в [11], для доказательства наших теорем о рациональной структуре, применимых к существенно более общему классу задач на построение расписаний и для более общих целевых функций.

Структура работы. В разд. 1 даны определения базовых понятий и сформулирована общая задача с прерываниями операций. В разд. 2 доказаны более общие результаты о существовании оптимального решения и конечности числа прерываний в оптимальном расписании. Две теоремы о рациональной структуре доказаны в разд. 3. Наконец, в разд. 4 обсуждаются полученные результаты и ставятся открытые вопросы.

1. Постановка задачи

В данном разделе формулируется некая общая модель процесса выполнения операций с допущением их прерываний. На основе этой модели формулируется несколько оптимизационных задач, различающихся критериями оптимальности. Наиболее общей из них является *Общая Задача*, или задача **GP**, на отыскание лексикографического минимума заданной последовательности произвольных функций от моментов окончания операций. Для этой задачи в разд. 2 будет доказана *Теорема о конечности* числа прерываний в оптимальном расписании. Несколько менее общая задача, являющаяся спецификацией задачи **GP** на случай последовательности регулярных целевых функций, рассматривается в разд. 2, где доказывается *Теорема о Существовании* оптимального решения. Наконец, та же общая модель, но со специальными классами регулярных целевых функций, будет рассматриваться в разд. 3, где будут доказаны теоремы о рациональной структуре оптимальных расписаний.

1.1. Общие определения

Для векторов $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ и $x'' = (x''_1, \ldots, x''_n)$ пишем $x' \leqslant x''$, если покомпонентно выполняются неравенства $x'_i \leqslant x''_i$.

Определение 1. Мы говорим, что функция $F(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, определённая в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, является *неубывающей*, если неравенство $F(x') \leqslant F(x'')$ выполняется для любой пары векторов $x', x'' \in D$ такой, что $x' \leqslant x''$.

Определение 2. Мы говорим, что функция $F(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, определённая в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, является *непрерывной слева*, если для любой точки $x \in D$ и любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что неравенство $|F(x) - F(x')| < \varepsilon$ выполняется для всех $x' \in D$ таких, что $x - \delta E \leqslant x' \leqslant x$, где $E = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Определение 3. Вещественнозначная функция $F(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ называется *регулярной*, если она является неубывающей и непрерывной слева.

Определение 4. Если рассматривается задача с ξ операциями на минимум регулярной функции $F(C)$, где $C = (C_1, \ldots, C_\xi)$ — вектор моментов завершения операций, то мы говорим, что рассматриваем задачу с *регулярным критерием*.

Если в задаче определены K регулярных функций $F_1(C), \ldots, F_K(C)$, зависящих от вектора моментов завершения операций, и целью является

отыскание лексикографического минимума заданной приоритетной последовательности $(F_1(C), \ldots, F_K(C))$ этих функций, то мы говорим, что рассматривается задача с *лексикографическим регулярным критерием.*

1.2. Формулировка общей задачи

Рассматривается производственная система, состоящая из конечного множества $\mathcal{O} = \{o_1, \ldots, o_\xi\}$ *операций*, представленных для выполнения. Каждая операция $o_j \in \mathcal{O}$ характеризуется *объёмом* $q_j \geqslant 0$ и может выполняться в различных *режимах* (в частности, на различных машинах, с различными скоростями, с потреблением различного количества ресурсов и т. п.). Пусть $\mathcal{M}(o_j)$ обозначает конечное множество всевозможных режимов выполнения операции $o_j \in \mathcal{O}$. Каждый режим $\mu \in \mathcal{M}(o_j)$ характеризуется *скоростью* $s_\mu > 0$ такой, что при полном выполнении операции o_j в режиме μ потребуется q_j/s_μ единиц времени. Мы предполагаем, что операция может выполняться одновременно в нескольких режимах. Кроме того, выполнение любой операции может *прерываться* и возобновляться любое число раз. (Более строгое определение прерывания будет приведено ниже.)

Пусть $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{o_j \in \mathcal{O}} \mathcal{M}(o_j)$ обозначает множество всех режимов. Без ограничения общности нашей модели будем полагать, что режимы, используемые разными операциями, различны, т. е. $\mathcal{M}(o_i) \cap \mathcal{M}(o_j) = \varnothing$ для любой пары $o_i \neq o_j$, что даёт возможность по заданному режиму $\mu \in \mathcal{M}$ однозначно определять операцию $\omega(\mu) \in \mathcal{O}$, к которой он относится.

Далее предполагаем, что задана конечная последовательность $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_D$ *фиксированных* (т. е. независимых от расписания) *дат* τ_k такая, что выполнение всего проекта должно осуществляться в интервале времени $[\tau_1, \tau_D]$, называемом далее *горизонтом планирования.* Типичными примерами фиксированных дат являются моменты появления работ в системе и директивные сроки завершения работ, а также точки переключения в определениях целевых функций (например, желаемые моменты завершения работ, нарушение которых наказывается штрафом) и функций, задающих ресурсные ограничения. Так, например, τ_1 может быть наиболее ранним моментом появления работ либо моментом начала выделения ресурсов; в большинстве случаев мы можем предполагать, что $\tau_1 = 0$. В качестве последней даты τ_D может выступать любая разумная (но при этом конечная) верхняя точка горизонта планирования; обычно такая верхняя точка легко вычисляется по исходным данным задачи. Ситуация равенства $\tau_k = \tau_{k+1}$ может потребоваться для моде-

лирования ситуаций, когда для какой-то операции нулевой длины задан единственно возможный момент её выполнения.

Чтобы сформулировать технологические требования, предъявляемые к расписаниям, необходимо для начала понять, что представляет собой *расписание* в модели, где разрешаются прерывания операций.

Ясно, что расписание должно изображать процесс выполнения во времени всех заданных на входе операций. Этот процесс будем представлять кусочно-постоянным: весь интервал планирования делится на конечное либо счётное число интервалов времени, в течение которых расписание постоянно. Последнее означает, что в течение заданного интервала времени остаётся неизменным не только набор выполняемых операций, но и набор режимов, в которых эти операции выполняются.

Определение 5. Набор режимов, одновременно используемых в текущем расписании в момент времени t, называется *шаблоном.*

Определение 6. Частичное расписание $\widehat{S}$, определённое в некотором временном интервале $[t', t''] \subseteq [\tau_1, \tau_D]$ путём задания единственного (возможно, пустого) шаблона P, используемого во всём интервале $[t', t'']$, называется *слайсом*, или *P-слайсом*. Таким образом, каждый слайс характеризуется (и ассоциируется с) тройкой $(t', t''; P)$. Слайс положительной длины будем для краткости называть *положительным слайсом*, а слайс нулевой длины — *нулевым слайсом.* Слайс, в котором выполняется пустой шаблон, будем называть *пустым слайсом.*

Следующее замечание представляется нам важным для понимания целесообразности использования в расписании нулевых слайсов.

Замечание 1. В нашей модели допускается существование операций нулевой длины. Это даёт возможность моделирования более общих ситуаций в едином стиле, а также предоставляет удобный инструмент для задания сложных ограничений посредством введения нескольких нулевых (фиктивных) операций. За эти удобства мы вынуждены расплачиваться допущением существования нулевых слайсов, так же как и существованием в расписании S нескольких таких слайсов $(\widehat{S}_i, \widehat{S}_j, \dots)$, приписанных к одному и тому же моменту времени $(t''_i = t'_i = t''_j = t'_j = \dots)$. Последнее допущение является естественным обобщением общепринятого в теории расписаний соглашения о том, что несколько нулевых операций могут выполняться *на одной и той же машине в один и тот же момент времени.* (Хотя это и противоречит широко распространённой формулировке, присутствующей во многих статьях и книгах по теории расписаний, согласно которой «разрешается выполнение *не более одной* операции на каждой

машине в каждый момент времени».) Кроме того, поскольку разрешены прерывания, слайс нулевой длины не обязан содержать какую-либо операцию нулевой длины, но вместо этого может состоять из нулевых фрагментов операций. Это даёт возможность поместить нулевой слайс с заданной операцией o (т. е. с шаблоном P, содержащим хотя бы один режим $\mu \in \mathcal{M}(o)$) в любую точку t, где шаблон P является допустимым. В частности, данный «трюк» может помочь в ситуации, когда мы пытаемся достичь желаемого момента завершения операции (если этому не препятствуют какие-либо ограничения задачи).

Определение 7. Нулевой слайс называется *существенным*, если хотя бы одна нулевая операция выполняется в нём целиком. В противном случае нулевой слайс называется *несущественным*.

Определение 8. Пусть $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots\}$ — некоторое вычислимое (конечное или счётное) *множество индексов*. Семейство слайсов

$$S = \{\widehat{S}_i = (t'_i, t''_i; P_i) \mid i \in \mathcal{I}\}$$

называется (*правильным*) *расписанием* для заданного примера задачи **GP**, если для любых двух слайсов $S_i, S_j \in S$ $(i \neq j)$ их интервалы $[t'_i, t''_i], [t'_j, t''_j]$ пересекаются не более чем в одной точке, при этом точка пересечения должна быть крайней для обоих интервалов. (В данной работе мы будем рассматривать лишь правильные расписания.)

Расписание называется *полным*, если каждый момент времени в интервале планирования $[\tau_1, \tau_D]$ покрыт хотя бы одним (возможно, пустым) слайсом.

Далее, рассматривая какое-либо расписание для всего множества операций, без ограничения общности будем считать его полным, представляя непокрытые слайсами промежутки времени в виде пустых слайсов.

Концевые точки слайсов $\{t'_i, t''_i\}$ будут далее называться *точками переключения*. В этих точках либо происходит смена текущего шаблона, либо находится одна из фиксированных дат τ_i, свидетельствующих об изменениях каких-то параметров системы.

Из свойства «правильности» расписания следует, что в любом допустимом расписании S слайсы следуют друг за другом, в том смысле, что для любых двух слайсов $\widehat{S}_i$ и $\widehat{S}_j$ всегда можно определить, какой из слайсов идёт первым. А именно, полагаем, что слайс $\widehat{S}_i$ предшествует слайсу $\widehat{S}_j$ (и обозначаем это $\widehat{S}_i \preceq \widehat{S}_j$), если $t''_i \leqslant t'_j$. (Для слайсов нулевой длины $\widehat{S}_i$ и $\widehat{S}_j$, приписанных к одному и тому же моменту времени t, одновременно имеем $\widehat{S}_i \preceq \widehat{S}_j$ и $\widehat{S}_j \preceq \widehat{S}_i$.)

Однако из правильности расписания не следует, что мы можем перенумеровать все слайсы $\{\widehat{S}_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ «слева-направо», обеспечивая $\widehat{S}_i \preceq \widehat{S}_j$ для любой пары $i < j$. Например, такая нумерация невозможна, если существует *точка накопления* $t \in [\tau_1, \tau_D)$, т. е. такая точка, что любая из её окрестностей содержит бесконечное число слайсов.

Определение 9. *Момент завершения* и *момент начала* операции $o_j \in \mathcal{O}$ в расписании с прерываниями $S = \{(t'_i, t''_i; P_i) \,|\, i \in \mathcal{I}\}$ определяются как

$$C_j = \sup\{t''_i \mid i \in \mathcal{I}_j\}, \quad S_j = \inf\{t'_i \mid i \in \mathcal{I}_j\},$$

где $\mathcal{I}_j = \{i \in \mathcal{I} \mid P_i \cap \mathcal{M}(o_j) \neq \varnothing\}$.

Определение 10. Мы говорим, что операция $o_j \in \mathcal{O}$ имеет *прерывание* в момент времени t в расписании $S = \{(t'_i, t''_i; P_i) \,|\, i \in \mathcal{I}\}$, если

(a) существует $i \in \mathcal{I}$ такое, что $t''_i = t$ и $P_i \cap \mathcal{M}(o_j) \neq \varnothing$;

(b) для любого $\varepsilon > 0$ существует $i' \in \mathcal{I}$ такое, что $t'_{i'} \in [t, t+\varepsilon]$ и $P_{i'} \cap \mathcal{M}(o_j) \neq P_i \cap \mathcal{M}(o_j)$;

(c) существует $i'' \in \mathcal{I}$ такое, что $t''_{i''} > t$ и $P_{i''} \cap \mathcal{M}(o_j) \neq \varnothing$.

Теперь сформулируем технологические требования, предъявляемые к расписаниям. В модели рассматриваются три типа ограничений: *ограничения совместности режимов*, *ограничения предшествования* между операциями и *требование полного выполнения операций*.

Ограничения совместности определяются для каждого временного интервала $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ $(k = 1, \ldots, D-1)$ путём задания множества $\mathcal{P}(k) \subseteq 2^{\mathcal{M}}$ *допустимых шаблонов*, т. е. подмножеств совместимых режимов $P \subseteq \mathcal{M}$, которые могут использоваться совместно в любой момент времени $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Слайс $(t', t''; P)$ называется *выполнимым*, если $[t', t''] \subseteq [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $P \in \mathcal{P}(k)$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, D-1\}$.

Следует заметить, что в большинстве практических ситуаций семейства $\mathcal{P}(k)$ замкнуты по включению, т. е. из того, что $P \subset P'$ и $P' \in \mathcal{P}(k)$, следует $P \in \mathcal{P}(k)$. Однако в нашей модели мы не будем требовать выполнения этого свойства, тем самым допуская существование таких ситуаций, когда технологические ограничения требуют одновременного использования заданного набора режимов (либо определённого подмножества операций) или хотя бы одного из заданного семейства допустимых наборов. Будем предполагать, что среди допустимых шаблонов имеется

и «пустой» шаблон $\varnothing \in \mathcal{P}(k)$, допуская, что в какие-то промежутки времени в интервале планирования $[\tau_1, \tau_D]$ все операции и все ресурсы могут простаивать. (Например, такая ситуация типична для конца интервала планирования.)

Требование полного выполнения. Пусть задано полное расписание с прерываниями $S = \{(t'_i, t''_i; P_i) \mid i \in \mathcal{I}\}$, и пусть $s_{ji} \doteq \sum\limits_{\mu \in P_i \cap \mathcal{M}(o_j)} s_\mu$ обозначает суммарную скорость выполнения операции o_j в шаблоне P_i. Тогда должны выполняться равенства

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} s_{ji}(t''_i - t'_i) = q_j \text{ по всем } o_j \in \mathcal{O}.$$

Кроме того, для любой операции o_j нулевого объёма ($q_j = 0$) должен быть хотя бы один слайс $\widehat{S}_i \in S$ такой, что $P_i \cap \mathcal{M}(o_j) \neq \varnothing$.

Ограничения предшествования на множестве операций $\mathcal{O}$ задаются ориентированным взвешенным графом $G = (\mathcal{O}, U)$, вершинами которого являются операции заданного примера, а каждой дуге $(o_i, o_j) \in U$ приписан вес $p_{ij} \in \mathbb{R}$ (который может быть отрицательным). Наличие дуги $(o_i, o_j) \in U$ накладывает ограничения

$$C_i + p_{ij} \leqslant S_j. \tag{1}$$

В случае, когда все веса неотрицательны ($p_{ij} \geqslant 0$), они обычно называются *задержками*. Мы, однако, будем допускать и отрицательные веса p_{ij}.

Определение 11. Полное расписание S, построенное для заданного примера задачи **GP**, называется *допустимым*, если оно удовлетворяет ограничениям совместности, предшествования и требованию полноты выполнения каждой операции.

Целевые функции. Пусть K целевых функций $F_1(C), \ldots, F_K(C)$, зависящих от вектора $C = (C_1, \ldots, C_\xi)$ моментов завершения операций, заданы в каждой точке ξ-мерной области $[\tau_1, \tau_D]^\xi$. Целью решения задачи является построение допустимого расписания S, лексикографически минимизирующего заданную последовательность $(F_1(C), \ldots, F_K(C))$ целевых функций.

Суммируя вышесказанное, задачу **GP** сформулируем следующим образом.

Задача **GP** — это задача лексикографической минимизации заданной последовательности $(F_1(C), \ldots, F_K(C))$ целевых функций (каждая из которых зависит от вектора $C = (C_1, \ldots, C_\xi)$ моментов завершения операций) на множестве полных расписаний с прерываниями $S = \{(t'_i, t''_i; P_i) \mid$

$i \in \mathcal{I}\}$, удовлетворяющих требованию полного выполнения операций и ограничениям предшествования на множестве операций.

Приведём несколько примеров известных задач теории расписаний, являющихся частными случаями задачи **GP**.

Ограничения совместности могут препятствовать одновременной реализации (выполнению):

(i) двух различных режимов μ, μ' одной и той же операции, если $\{\mu, \mu'\} \nsubseteq P$ ни для какого шаблона $P \in \mathcal{P}$;

(ii) двух операций o и o', принадлежащих одной и той же *работе* J_j, как в классических цеховых моделях (см. [8]), если $\mathcal{M}(o) \cap P \neq \varnothing$ влечёт $\mathcal{M}(o') \cap P = \varnothing$;

(iii) двух операций, выполняемых на одной и той же *машине* (*процессоре*) единичной мощности;

(iv) более общо — любого подмножества режимов Q, требующего большего количества *ресурса*, чем доступно в любой точке t интервала $(\tau_k, \tau_{k+1}]$, если $Q \nsubseteq P$ для всех $P \in \mathcal{P}(k)$.

(v) Соглашение о непересекаемости наборов режимов, относящихся к разным операциям, даёт нам возможность моделировать ситуации *персональной несовместимости*. Рассмотрим следующий пример: операции o_j $(j = 1, 2, 3)$ обозначают сдачу экзамена студентами A, B, C; при этом есть два альтернативных экзаменатора D и E, выполняющих роль «параллельных машин», на которых эти операции должны быть выполнены. Пусть режимы 1 и 2 соответствуют сдаче экзамена студентом A (экзаменаторам D и E соответственно); аналогично, режимы 3, 4 соответствуют студенту B, а режимы 5, 6 — студенту C. Может возникнуть ситуация, когда каждый из экзаменаторов может принимать экзамен одновременно у двух студентов, за исключением персонального случая, когда студентами являются A и B, а экзаменатором — E (по причине их несовместимых личных отношений). Другими словами, комбинация режимов $\{2, 4\}$ запрещена. Очевидно, было бы трудно отразить это ограничение, если бы выполнение всякой операции на одной и той же машине считалось бы одним и тем же режимом и, таким образом, мы не могли бы различать режимы 2, 4, 6.

Разрешение семейству допустимых шаблонов $\mathcal{P}(k)$ изменяться во времени позволяет нам моделировать

(vi) *директивные интервалы использования режимов*, с помощью которых режим $\mu \in \mathcal{M}$ не может использоваться до заданного *момента* r_μ *включения* режима μ и после *момента* $\bar{d}_\mu$ его *выключения*; такие

временные ограничения могут быть использованы для моделирования моментов появления *работ* и директивных сроков их окончания;

(vii) *календарь доступности* какого-либо ресурса; как следствие, выполнение любой операции в режиме, использующем данный ресурс, ограничивается одним или несколькими временными интервалами;

(viii) более общо — ограничение для любого заданного подмножества режимов быть используемым в заданном конечном подмножестве временных интервалов.

Календари доступности ресурсов могут быть использованы для планирования технического ремонта и замены оборудования, для моделирования изменяющихся во времени (но кусочно-постоянных) скоростей машин и функций количества произведённого продукта, а также для моделирования определённых форм *невозобновимых ресурсов*. Примерами классических задач теории расписаний, попадающих в рамки рассматриваемой общей задачи, являются: задача job shop с прерываниями и ограничениями предшествования $J|prec,\ pmtn|F$ и задача на параллельных неродственных машинах $R|r_j, \bar{d}_j,\ prec,\ pmtn|F$ с заданными моментами появления работ, жёсткими директивными сроками и ограничениями предшествования.

Далее, ограничения предшествования вида (1) дают возможность моделирования многих интересных ограничений на порядок выполнения операций. Например...

(ix) ...Чтобы заставить две операции стартовать (или завершиться) в один и тот же момент времени в любом допустимом расписании. Для простоты рассмотрим случай, когда каждая операция o_i имеет фиксированную длину p_i. Тогда, чтобы обеспечить данное свойство для операций o_i, o_j, достаточно добавить в граф G две дуги (o_i, o_j) и (o_j, o_i); если этим дугам присвоить веса $p_{ij} = -p_i,\ p_{ji} = -p_j$, то операции всегда будут стартовать одновременно. Наоборот, если положить $p_{ij} = -p_j,\ p_{ji} = -p_i$, то операции будут одновременно завершаться в любом допустимом расписании.

(x) ...Чтобы заставить несколько операций выполняться в любом допустимом расписании «в одной связке», так что никакая операция в связке не слишком опережает и не слишком отстаёт от других. Например, операции o_1, o_2, o_3 должны быть выполнены на одной машине подряд, без задержек и простоев машины; при этом порядок выполнения операций не фиксирован (т. е. следует обеспечить возможность выбора любого из шести порядков). Для обеспечения этого свойства достаточно для каждой пары $i, j \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j$, обеспечить существование в графе G дуги

(o_i, o_j) длины $p_{ij} = -p_1 - p_2 - p_3$ и обеспечить требование несовместности любых двух операций o_i, o_j $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ при задании допустимых шаблонов. Если же мы хотим зафиксировать порядок $o_1 \to o_2 \to o_3$, то достаточно положить $p_{12} = p_{23} = 0,\ p_{31} = -p_1 - p_2 - p_3$.

(xi) ...Чтобы заставить операцию o_i выполняться внутри временного интервала заданной длины ℓ_i (при этом не фиксированного во времени), добавляем в граф G петлю (o_i, o_i) длины $p_{ii} = -\ell_i$. В частности, для предотвращения какого-либо простоя при выполнении данной операции, следует положить $\ell_i = p_i$ (хотя это не может предотвратить возможности прерывания операции каким-либо слайсом нулевой длины).

Следует иметь в виду, что такие ограничения не могут быть реализованы без использования контуров и дуг отрицательного веса в графе G.

2. Общие результаты

Этот раздел мы начинаем с теоремы о конечности, согласно которой каждый раз, когда для задачи **GP** существует оптимальное расписание, существует и оптимальное расписание с конечным (и даже полиномиально ограниченным от размера входа) числом прерываний. Теорема о существовании оптимума устанавливает существование оптимального расписания для заданного примера задачи **GP**, на котором достигается лексикографический минимум вектора значений K приоритетно упорядоченных *регулярных* целевых функций, при условии, что множество допустимых решений для этого примера непусто.

2.1. Конечность числа прерываний

Определение 12. Будем говорить, что нулевой слайс $(t'_i, t''_i; P_i)$, $t'_i = t''_i$, *визирует завершение* операции o_j в расписании S, если он выполняется в точке окончания операции o_j, его шаблон P_i является допустимым для этой точки и содержит хотя бы один режим $\mu \in \mathcal{M}(o_j)$ операции o_j.

Лемма 1. *Если для заданного примера задачи* **GP** *существует допустимое полное расписание S, то существует допустимое полное расписание S' с такими же значениями моментов окончания операций и с не более чем $(2\xi + D - 1)H + \xi$ слайсами, из которых не более ξ нулевых, где ξ — число операций, D — число фиксированных дат, H — число допустимых шаблонов.*

Доказательство. Пусть задано допустимое полное расписание S, и пусть $S_j,\ C_j$ — моменты начала и окончания операции o_j в расписании S.

Определим множество $\{\tau'_k \,|\, k = 1,\dots,D'\}$, состоящее из всех попарно различных элементов семейства $\{S_j, C_j \,|\, o_j \in \mathcal{O}\} \cup \{\tau_k \,|\, k = 1,\dots,D\}$: $\tau'_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_{D'}$. Ясно, что каждый слайс $\widehat{S}_i \in S$ целиком содержится в интервале $I_k = [\tau'_k, \tau'_{k+1}]$ для некоторого $k \in \{1,\dots,D'-1\}$. Преобразование исходного расписания S в допустимое расписание, обладающее указанными в лемме свойствами, будет осуществляться с помощью трёх процедур: *визирования, чистки* и *склейки*, выполняемых в этом порядке. Текущее расписание в процессе этих преобразований будем обозначать через S', где начальное значение S' совпадает с S.

Процедура визирования. Пусть $\mathcal{O}'$ — список операций, незавизированных в текущем расписании S'. Если $\mathcal{O}' \neq \varnothing$, то выбираем произвольно операцию $o_j \in \mathcal{O}'$. Очевидно, C_j совпадает с некоторой точкой $\tau'_k, k \in \{2,\dots,D'\}$. Из определения C_j следует, что в интервале $(\tau'_{k-1}, \tau'_k]$ в расписании S выполняется хотя бы один слайс $(t'_i, t''_i; P_i)$, шаблон которого содержит режим выполнения операции o_j. Очевидно, что этот режим является допустимым и для точки τ'_k. Определяем нулевой слайс $\widehat{S} = (\tau'_k, \tau'_k; P_i)$, выполняемый в точке τ'_k и визирующий момент завершения операции o_j. Ясно, что добавление этого нулевого слайса в расписание не изменяет ни момента завершения, ни момента начала никакой из операций.

Помимо операции o_j шаблон P_i может содержать режимы других операций. Ясно, что вновь добавленный слайс визирует и другие операции, перечисленные в шаблоне P_i и завершающиеся в точке τ'_k. Удаляем все такие операции из списка $\mathcal{O}'$. Если $\mathcal{O}' \neq \varnothing$, то возвращаемся на начало процедуры. Ясно, что по окончании работы процедуры визирования все операции будут завизированы.

Процедура чистки. Целью процедуры является удаление из расписания лишних нулевых слайсов. Для начала удаляем все нулевые слайсы, не визирующие никакие операции. Удаление этих слайсов не изменяет моментов окончания операций. Что касается моментов начала операций, то они могут лишь увеличиваться, что не приводит к нарушению ограничений предшествования между операциями.

Кроме того, нет необходимости сохранять в расписании **все** визирующие слайсы. Для каждой операции достаточно наличия в расписании лишь одного такого слайса. Ясно, что из множества нулевых слайсов, визирующих окончание операций из множества O, всегда можно выбрать подмножество, состоящее из не более чем $|O|$ слайсов и «покрывающее» всё множество O. Таким образом, по окончании работы данной процедуры расписание будет содержать не более $\xi = |O|$ нулевых слайсов.

Процедура склеивания. Пусть $\mathcal{S}_k$ обозначает множество ненулевых слайсов, расположенных в интервале I_k. Для каждого шаблона P_i, разрешённого в интервале I_k, и для каждого $k = 1, \ldots, D' - 1$ производим склеивание всех P_i-слайсов, выполняемых в интервале I_k (длина полученного агрегированного слайса $\widehat{S}_{ik}$ равна сумме длин его составляющих). Полученные в интервале I_k агрегированные слайсы размещаем в том же интервале в произвольном порядке. Ясно, что установление такого порядка не изменяет момента завершения никакой из операций. (Эти моменты завизированы нулевыми слайсами, положение которых остаётся неизменным в процессе выполнения данной процедуры.) При этом моменты начала операций могут лишь увеличиваться, что не приводит к нарушению ограничений предшествования. Ясно также, что перестановка слайсов внутри интервала I_k не нарушает допустимости этих слайсов. Следовательно, ограничения совместности также не нарушаются.

В полученном расписании S' число ненулевых слайсов в каждом интервале I_k не превосходит H. Таким образом, общее число ненулевых слайсов можно оценить сверху величиной $(K - 1)H \leqslant (2\xi + D - 1)H$. Учитывая, что число нулевых слайсов не превосходит ξ, получаем требуемую в лемме общую оценку на число слайсов. Лемма 1 доказана.

Из доказанной леммы непосредственно следует

Теорема 1 (о конечности числа прерываний)**.** *Если для заданного примера задачи* **GP** *существует оптимальное расписание, то существует и оптимальное расписание с не более чем $T \doteq (2\xi+D-1)H+\xi$ слайсами, где ξ — число операций, D — число фиксированных дат, H — число допустимых шаблонов.*

Следует заметить, что критическим фактором, обеспечивающим конечность числа слайсов в оптимальном расписании, является конечность числа фиксированных дат и числа операций. В следующем примере с бесконечным числом фиксированных дат любое оптимальное расписание имеет бесконечное число слайсов (и, следовательно, бесконечное число прерываний), в то время как существуют допустимые расписания, не имеющие прерываний.

Рассмотрим пример с единственной операцией единичной длины на минимум длины расписания. Операция потребляет ресурс, доступный во временных интервалах $\{[5/2^i, 6/2^i] \mid i = 0, 1, \ldots\}$. Хотя возможно полное выполнение операции в интервале $[5, 6]$ без единого прерывания, для достижения оптимального значения $C_{\max} = 3$ мы вынуждены сделать бесконечное число прерываний этой операции.

2.2. Свойства расписаний с конечным числом прерываний

Пусть на входе задачи **GP** задан некоторый пример, $\mathcal{S}$ — множество его полных допустимых расписаний, $\mathcal{S}(T)$ — множество расписаний из $\mathcal{S}$ с не более чем T слайсами. Рассмотрим произвольное расписание $S \in \mathcal{S}(T)$, состоящее из $\theta(S) \leqslant T$ слайсов $\{\widehat{S}_\nu = (t'_\nu, t''_\nu; P_\nu) \,|\, \nu = 1, \ldots, \theta(S)\}$. Поскольку S — полное допустимое расписание (см. определения 8, 11) и содержит конечное число слайсов, может быть найдена нумерация этих слайсов $(\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_{\theta(S)})$ со следующими свойствами:

1) $t''_{\nu-1} = t'_\nu$ для всех $\nu = 2, \ldots, \theta(S)$; $t'_1 = \tau_1,\ t''_{\theta(S)} = \tau_D$;

2) существуют *узловые индексы* $\theta_k \in \{0, 1, \ldots, \theta(S)\},\ k = 1, \ldots, D$, удовлетворяющие неравенствам

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_D = \theta(S), \tag{2}$$

такие, что для всех $k = 1, \ldots, D-1$ и $\nu = \theta_k+1, \ldots, \theta_{k+1}$ выполняются соотношения $[t'_\nu, t''_\nu] \subseteq [\tau_k, \tau_{k+1}],\ P_\nu \in \mathcal{P}(k)$, обеспечивающие выполнимость ν-го слайса.

Пусть $\pi(S) = (P_1, \ldots, P_{\theta(S)})$ — последовательность шаблонов, используемых в слайсах $\widehat{S}_1, \ldots, \widehat{S}_{\theta(S)}$ в этом порядке, $L(S) = (l_1, \ldots, l_{\theta(S)})$ — вектор длительностей слайсов $\{\widehat{S}_\nu\}$, $\Theta(S) = (\theta_1, \ldots, \theta_D)$ — последовательность узловых индексов. Назовём *краткой* и *полной конфигурацией* расписания S пару $\mathfrak{A}(S) = (\pi(S), \Theta(S))$ и тройку $\mathfrak{B}(S) = (\pi(S), \Theta(S), L(S))$ соответственно.

Нетрудно понять, что компоненты полной конфигурации определяются по заданному расписанию не вполне однозначно (с точностью до перестановки нулевых слайсов, выполняемых одновременно, а также с точностью до добавления несущественных нулевых слайсов). Эту неоднозначность устраним таким образом, что саму полную конфигурацию, т. е. тройку (π, Θ, L), и будем называть *расписанием* (это корректно, если речь идёт о полных расписаниях с конечным числом слайсов).

Из неравенств $t''_{\theta_k} \leqslant \tau_k \leqslant t'_{\theta_k+1}$, вытекающих из свойства 2, и из равенства $t''_{\theta_k} = t'_{\theta_k+1}$ (свойство 1) получаем равенства $t''_{\theta_k} = \tau_k = t'_{\theta_k+1}$, согласно которым слайс с индексом $\nu = \theta_k$ оканчивается в узле τ_k. Это свойство записывается в таком виде:

$$\sum_{\nu=\theta_k+1}^{\theta_{k+1}} l_\nu = \tau_{k+1} - \tau_k, \quad k = 1, \ldots, D-1. \tag{3}$$

Требование полного выполнения каждой операции o_j записываем в виде

$$\sum_{\nu=1}^{\theta_D} s_{j\nu} l_\nu = p_j \quad \text{для всех } o_j \in \mathcal{O}, \tag{4}$$

где $s_{j\nu}$ — суммарная скорость выполнения операции o_j в шаблоне P_ν. Далее, пусть $s(o_j) = \min\{\nu \mid P_\nu \cap \mathcal{M}(o_j) \neq \varnothing\}$ и $c(o_j) = \max\{\nu \mid P_\nu \cap \mathcal{M}(o_j) \neq \varnothing\}$ обозначают номера первого и последнего слайсов в последовательности $\pi(S)$ из тех, где выполняется операция o_j. (Таким образом, оба параметра $s(o_j)$ и $c(o_j)$ зависят лишь от компоненты $\pi(S)$.) Тогда ограничения предшествования, которым удовлетворяет расписание S, записываются в виде

$$\sum_{\nu=1}^{c(o_i)} l_\nu - \sum_{\nu=1}^{s(o_j)-1} l_\nu \leqslant -p_{ij} \quad \text{для каждой дуги } (o_i, o_j) \in U \text{ графа } G. \tag{5}$$

Резюмируя вышесказанное, можем сформулировать

Утверждение 1. *Пусть $S = (\pi(S), \Theta(S), L(S))$ — допустимое расписание для заданного на входе задачи* **GP** *примера* 1. *Тогда S удовлетворяет соотношениям* (3)–(5).

Верно и обратное

Утверждение 2. *Пусть $S = (\pi(S), \Theta(S), L(S))$ — допустимое расписание примера* 1, *а $LS(\pi(S), \Theta(S))$ — система* (3)–(5) *линейных ограничений на переменные l_ν, задаваемая краткой конфигурацией расписания S. Тогда для всякого допустимого решения L' этой системы тройка $S' = (\pi(S), \Theta(S), L')$ задаёт допустимое расписание примера* 1.

Доказательство. Из равенств (3) следует, что ν-й слайс в расписании S' попадает в тот же интервал $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, что и ν-й слайс в расписании S. Поскольку оба слайса используют один и тот же шаблон $P_\nu(S)$, соотношения $[t'_\nu(S), t''_\nu(S)] \subseteq [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $P_\nu(S) \in \mathcal{P}(k)$, обеспечивающие выполнимость ν-го слайса в расписании S, трансформируются в соотношения $[t'_\nu(S'), t''_\nu(S')] \subseteq [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $P_\nu(S') \in \mathcal{P}(k)$, обеспечивающие выполнимость ν-го слайса в расписании S'.

Выполнимость двух оставшихся требований (полноты выполнения операций и ограничений предшествования на множестве операций) вытекает из (4) и (5). Таким образом, допустимость расписания S' доказана. Утверждение 2 доказано.

2.3. Существование оптимального расписания

Теорема 2 (о существовании оптимального расписания). *Если все целевые функции $F_1(C), \ldots, F_K(C)$ задачи* **GP** *являются регулярными, то для любого примера задачи* **GP***с непустым множеством допустимых расписаний существует оптимальное расписание S, лексикографически минимизирующее вектор-функцию* $(F_1(C(S)), \ldots, F_K(C(S)))$.

Доказательство. Рассмотрим пример I задачи **GP**, имеющий непустое множество допустимых расписаний. Утверждение теоремы будет доказано индукцией по числу целевых функций. Базис индукции следует из существования допустимого расписания, поскольку мы всегда можем определить дополнительную целевую функцию $F_0(C(S)) \equiv \text{const}$ (которая, очевидно, регулярна), относительно которой всякое допустимое расписание S является оптимальным. Таким образом, остаётся доказать лишь индукционный шаг. Поскольку момент C_j завершения операции o_j зависит от заданного расписания S, каждая целевая функция $F_i(C_1(S), \ldots, C_\xi(S))$ может рассматриваться как функция $\widetilde{F}_i(S)$ от расписания.

Итак, предположим, что для некоторого $n < K$ множество $\mathcal{S}_n^*$ допустимых расписаний, лексикографически минимизирующих вектор-функцию $(\widetilde{F}_1(S), \ldots, \widetilde{F}_n(S))$, непусто (базис индукции). Каждая из функций $\widetilde{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$, принимает одно и то же значение $\widetilde{F}_i(S) = F_i^*$ на всех $S \in \mathcal{S}_n^*$. Покажем, что существует расписание $S \in \mathcal{S}_n^*$, на котором достигается $\inf\{\widetilde{F}_{n+1}(S) \,|\, S \in \mathcal{S}_n^*\}$ (индукционный шаг).

Предположим, от противного, что не существует расписания $S \in \mathcal{S}_n^*$, минимизирующего значение функции $\widetilde{F}_{n+1}(S)$ на множестве расписаний $S \in \mathcal{S}_n^*$. Поскольку функция $\widetilde{F}_{n+1}(S)$ ограничена снизу (например, значением $F_{n+1}(\tau_1, \ldots, \tau_1)$, так как $F_{n+1}(C)$ неубывающая и ни одна из компонент вектора $C = (C_1, \ldots, C_\xi)$ не может быть меньше τ_1), множество значений этой функции $\{\widetilde{F}_{n+1}(S) \,|\, S \in \mathcal{S}_n^*\}$ обладает точной нижней границей, обозначаемой через F_{n+1}^*. Поскольку по предположению не существует расписания $S \in \mathcal{S}_n^*$, на котором достигается равенство $\widetilde{F}_{n+1}(S) = F_{n+1}^*$, то по определению точной нижней границы существует бесконечная последовательность $S_1, S_2, \ldots$ расписаний $S_i \in \mathcal{S}_n^*$ такая, что последовательность значений $\widetilde{F}_{n+1}(S_1)$, $\widetilde{F}_{n+1}(S_2), \ldots$ сходится к F_{n+1}^*.

По лемме 1 для каждого расписания S_j $(j = 1, 2, \ldots)$ существует допустимое расписание S'_j с не более чем $T \doteq (2\xi + D - 1)H + \xi$ слайсами и теми же значениями моментов завершения операций, а значит, с теми же значениями целевых функций. Отсюда следует, что все расписания S'_j $(j = 1, 2, \ldots)$ также принадлежат множеству $\mathcal{S}_n^*$ и его подмножеству $\mathcal{S}_n^*(T)$, при этом $\widetilde{F}_{n+1}(S'_j) \to F_{n+1}^*$ при $j \to \infty$.

Заметим, что расписания из множества $\mathcal{S}_n^*(T)$ имеют лишь конечное число различных кратких конфигураций (π, Θ). (Действительно, последовательность $\pi(S')$ может принимать не более H^T различных значений на множестве расписаний $S' \in \mathcal{S}_n^*(T)$, тогда как $\Theta(S')$ может принимать не более T^D значений.) Отсюда следует, что в последовательности расписаний $S'_1, S'_2, \ldots$ найдётся счётная подпоследовательность $\beta = S''_1, S''_2, \ldots$ расписаний, имеющих одну и ту же краткую конфигурацию $\mathfrak{A}(S''_i) = (\pi^*, \Theta^*)$.

Поскольку все компоненты векторов $L(S''_i)$ не превосходят τ_D, последовательность векторов $\{L(S''_i) \,|\, S''_i \in \beta\}$ содержится в ограниченной области $\mathcal{L} \doteq [0, \tau_D]^\theta$ пространства $\mathbb{R}^\theta$. Отсюда следует, что последовательность β содержит счётную подпоследовательность $\gamma = S'''_1, S'''_2, \ldots,$ для которой последовательность векторов $L(S'''_i)$ сходится к определённой точке $L^* = (l^*_1, \ldots, l^*_\theta) \in \mathcal{L}$.

Мы знаем, что каждый из векторов $L(S'''_i), S'''_i \in \gamma$, является решением линейной системы $LS(\pi^*, \Theta^*)$. Отсюда следует, что предельная точка L^* последовательности векторов $L(S'''_1), L(S'''_2), \ldots$ также принадлежит замкнутому многограннику допустимых решений линейной системы $LS(\pi^*, \Theta^*)$, а значит, по утверждению 1 расписание $S^* = (\pi^*, \Theta^*, L^*)$ является допустимым для исходного примера I.

Покажем, что

$$S^* \in \mathcal{S}_n^* \quad \text{и} \quad \widetilde{F}_{n+1}(S^*) = F^*_{n+1}. \tag{6}$$

Поскольку момент завершения операции o_j в каждом расписании $S'''_i \in \gamma$ вычисляется по формуле

$$C_j(S'''_i) = \tau_1 + \sum_{\nu=1}^{c(o_j)} l_\nu(S'''_i)$$

($c(o_j)$ одно и то же для всех расписаний $S'''_i \in \gamma$ и для расписания S^*), получаем

$$\lim_{i\to\infty} C_j(S'''_i) = \tau_1 + \sum_{\nu=1}^{c(o_j)} \lim_{i\to\infty} l_\nu(S'''_i) = \tau_1 + \sum_{\nu=1}^{c(o_j)} l^*_\nu = C_j(S^*)$$

для всех $j = 1, \ldots, \xi$, или в векторной форме:

$$C(S'''_i) \to C(S^*) \text{ при } i \to \infty. \tag{7}$$

Теперь для каждого расписания S_i''' определим вектор

$$\widetilde{C}(S_i''') = (\widetilde{C}_1(S_i'''), \ldots, \widetilde{C}_\xi(S_i''')),$$

где $\widetilde{C}_j(S_i''') = \min\{C_j(S_i'''), C_j(S^*)\}$. Из (7) следует:

(a) $\widetilde{C}_j(S_i''') \leqslant C_j(S^*)$ для каждого j;

(b) $\lim\limits_{i\to\infty} \widetilde{C}(S_i''') = C(S^*)$;

(c) $\widetilde{C}_j(S_i''') \leqslant C_j(S_i''')$ для каждого j.

Учитывая, что все функции $F_\mu(C)$ непрерывны слева, из (a) и (b) получаем

$$\lim_{i\to\infty} F_\mu(\widetilde{C}(S_i''')) = F_\mu(C(S^*)) \text{ для всех } \mu. \tag{8}$$

С другой стороны, из (c) и неубывания функции $F_\mu(C)$ получаем

$$F_\mu(\widetilde{C}(S_i''')) \leqslant F_\mu(C(S_i''')),$$

и следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} F_\mu(\widetilde{C}(S_i''')) \leqslant \lim_{i\to\infty} F_\mu(C(S_i''')) = F_\mu^*,\ \mu = 1, \ldots, n+1. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что $\widetilde{F}_\mu(S^*) \doteq F_\mu(C(S^*)) \leqslant F_\mu^*$ выполняется для всех $\mu = 1, \ldots, n+1$. Но поскольку расписание S^* допустимо, из определения значений F_μ^* следует невозможность строгих неравенств $\widetilde{F}_\mu(S^*) < F_\mu^*$ ни для одного из $\mu = 1, \ldots, n+1$. (Действительно, $(F_1^*, \ldots, F_n^*)$ — лексикографический минимум вектор-функции $(\widetilde{F}_1(S), \ldots, \widetilde{F}_n(S))$ по всем допустимым расписаниям, а F_{n+1}^* — точная нижняя граница значений функции $\widetilde{F}_{n+1}(S)$ по всем $S \in \mathcal{S}_n^*$.) Это завершает доказательство (6) и обоснование индукционного шага. Теорема 2 доказана.

3. Теоремы о рациональной структуре

В этом разделе будут доказаны две теоремы о рациональной структуре для задач **GP**$'$, **GP**$''$, базирующихся на той же общей модели, что и задача **GP**, но сформулированных для более специальных критериев. Прежде всего, вместо лексикографической минимизации нескольких функций будет рассматриваться случай минимизации единственной целевой функции ($K = 1$). В качестве таковой будут рассматриваться функции не от моментов окончания операций (как это было в предыдущих разделах), а от моментов окончания заданных подмножеств операций.

Определение 13. Для заданного расписания S определяем *момент окончания подмножества операций* $B \in 2^{\mathcal{O}}$ как $\widehat{C}(B,S) = \max\limits_{o_j \in B} C_j(S)$.

Постановки задач с подобными критериями являются довольно типичными для раздела теории расписаний, изучающего *многостадийные системы*, где в качестве подмножеств операций чаще всего рассматриваются множества операций отдельных работ. Кроме того, при наличии в системе нескольких машин целевая функция может зависеть от моментов завершения работы отдельных машин, определяемых на множествах операций каждой машины.

Следует заметить, что само по себе различие между функциями, зависящими от моментов окончания подмножеств операций, и функциями, зависящими от моментов окончания операций, не ограничивает общности, поскольку всякая функция $F(\widehat{C}(S)) = F(\widehat{C}_1(S), \ldots, \widehat{C}_N(S))$ от моментов окончания подмножеств операций $B_1, \ldots, B_N$ после подстановки $\widehat{C}_i(S) = \max\limits_{o_j \in B_i} C_j(S)$ становится функцией $F'(C_1(S), \ldots, C_\xi(S))$ от моментов окончания операций. (Более того, если $F(x),\ x \in \mathbb{R}^N$, регулярна, то и функция $F'(y),\ y \in \mathbb{R}^\xi$, будет регулярной — неубывающей и непрерывной слева.) Более существенным ограничением общности наших результатов является то, что будут рассматриваться специальные классы функций $F(\widehat{C}(S))$. В первой теореме это будут функции вида

$$F(\widehat{C}(S)) = \sum_{i=1}^{N} f_i(\widehat{C}_i(S)), \tag{10}$$

а во второй теореме — функции вида

$$F(\widehat{C}(S)) = \max_{i=1,\ldots,N} f_i(\widehat{C}_i(S)). \tag{11}$$

В обоих случаях в качестве функций $f_i(x)$ рассматриваются неубывающие кусочно-линейные функции на отрезке $[\tau_1, \tau_D]$, определяемые соотношениями

$$f_i(x) = \begin{cases} \alpha_{i0} & \text{при } x = \tau_1, \\ \alpha_{ik} + \beta_{ik} x & \text{при } x \in (\tau_k, \tau_{k+1}],\ k = 1, \ldots, D-1. \end{cases} \tag{12}$$

Неубываемость функций $f_i(x)$ обеспечивается соотношениями

$$\alpha_{i1} \geqslant \alpha_{i0} \quad \text{для всех } i,$$

$$\beta_{ik} \geqslant 0, \quad \alpha_{ik} - \alpha_{i,\,k+1} \leqslant (\beta_{i,\,k+1} - \beta_{i,\,k})\tau_{k+1} \quad \text{для всех } i, k.$$

Следует заметить, что несмотря на специальный вид целевых функций задач $\mathbf{GP}'$ и $\mathbf{GP}''$, определяемых соотношениями (10), (12) и (11), (12), они, тем не менее, покрывают значительную часть классических целевых функций, рассматриваемых в теории расписаний. Так, например, класс аддитивных функций вида (10), (12) включает в себя взвешенные суммы таких параметров расписания как: *временное смещение* работы J_j (*lateness* L_j), *запаздывание* (*tardiness* T_j), *время нахождения в системе* (*flow time* F_j) и даже представляемый разрывной функцией параметр *опоздание* U_j. Кроме того, такая классическая целевая функция как *длина расписания* (*makespan* $C_{\max}$) легко представляется в виде единственной функции $f_1(\widehat{C}_1(S))$, где $f_1(x) = x$, а единственное множество операций B_1 совпадает со всем множеством операций.

В то же время класс функций, определяемых соотношениями (11), (12), покрывает такие целевые функции как максимальное временное смещение $L_{\max}$, максимальное запаздывание $T_{\max}$, максимальное время нахождения в системе $F_{\max}$, а также их обобщения на случай максимального взвешенного временного смещения $WL_{\max} = \max\limits_j w_j L_j$, максимального взвешенного запаздывания $WT_{\max} = \max\limits_j w_j T_j$, максимального взвешенного времени нахождения в системе $WF_{\max} = \max\limits_j w_j F_j$, максимального штрафа за опоздание $WU_{\max} = \max\limits_j w_j U_j$ и максимального взвешенного времени завершения работы $WC_{\max} = \max\limits_j w_j C_j$.

В совокупности оба класса покрывают практически всё множество классических целевых функций, зависящих от моментов завершения работ.

В теореме 3 рассматривается задача $\mathbf{GP}'$ с целевой функцией из класса неубывающих аддитивных кусочно-линейных функций вида (10), (12), зависящих от вектора $\widehat{C} = (\widehat{C}_1(S), \ldots, \widehat{C}_N(S))$ моментов завершения заданных подмножеств операций. Как уже упоминалось во введении, данная теорема обобщает результаты из [10, 11] для параллельных машин с ограничениями предшествования.

Теорема 3 (о рациональной структуре I)**.** *Пусть рассматривается задача* $\mathbf{GP}'$ *с* ξ *операциями,* D *фиксированными датами и аддитивной целевой функцией* $F(\widehat{C}(S)) = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(\widehat{C}_i(S))$ *от моментов завершения подмножеств операций* $B_1, \ldots, B_N$*, где* $f_i(x)$ *— неубывающие кусочно-линейные функции, определяемые согласно* (12)*. Тогда для любого примера этой задачи, имеющего непустое множество допустимых решений,*

существует оптимальное расписание S' со следующими свойствами.

1. *Расписание содержит не более $\xi^2 + \xi + D - 1$ положительных слайсов. Если во всех ограничениях предшествования* (1) *выполнено $p_{ij} = 0$, т. е. между последовательно выполняемыми операциями нет ни положительных, ни отрицательных задержек, то имеется не более $\xi + D - 1$ положительных слайсов.*

2. *Если все длительности операций, величины скоростей и все фиксированные даты являются целыми числами, то существует рациональное число δ, длина записи которого ограничена полиномом от длины записи входа, и такое, что каждая точка переключения g_ν в расписании S' кратна δ.*

3. *Если, дополнительно, все коэффициенты $\{\alpha_{ik}, \beta_{ik}\}$ целевой функции* (10), (12) *целые, то оптимум целевой функции также кратен δ.*

Доказательство. Предположим, что задан пример задачи $\mathbf{GP}'$ с непустым множеством допустимых расписаний. Как отмечалось выше, целевая функция нашей задачи, рассматриваемая как функция от моментов завершения операций, является регулярной, что позволяет применить теорему 2 и сделать вывод о существовании оптимального расписания S_0. Согласно теореме 1 мы можем предполагать, что это расписание имеет конечное (не более $(2\xi + D - 1)H + \xi$) число слайсов, обозначаемое далее через $\theta(S_0)$. Мы также можем предполагать, что S_0 обладает *специальным свойством*. А именно, оно не содержит несущественных нулевых слайсов (см. определение 7). Действительно, удаление такого слайса может изменить моменты начала каких-то операций лишь в сторону увеличения, а моменты завершения — в сторону уменьшения. И то, и другое не приводит к нарушению ограничений предшествования между операциями. Удаление несущественного слайса также не приведёт к возрастанию значения целевой функции ввиду регулярности штрафных функций f_i, рассматриваемых как функции от моментов завершения операций.

Как и ранее в разд. 2.2, будем отождествлять расписание S с его полной конфигурацией $(\pi(S), \Theta(S), L(S))$. По краткой конфигурации (π, Θ) расписания S_0 определим систему $LS(\pi, \Theta)$ (см. разд. 2.2), являющуюся системой линейных ограничений относительно компонент вектора $L(S) = (l_1, \ldots, l_{\theta(S_0)})$.

Определим оптимизационную задачу $\mathbf{P}'$. Множество допустимых решений этой задачи составляют расписания (π, Θ, L) по всевозможным векторам $L = (l_1, \ldots, l_{\theta(S_0)})$, допустимым относительно системы ограничений $LS(\pi, \Theta)$, а в качестве целевой функции возьмём функцию $F(\widehat{C}(S))$

задачи $\mathbf{GP}'$.

Из утверждения 2 следует, что все допустимые решения задачи $\mathbf{P}'$ являются допустимыми решениями задачи $\mathbf{GP}'$. При этом из утверждения 1 следует, что среди допустимых решений задачи $\mathbf{P}'$ имеется решение S_0 с конечным числом слайсов, оптимальное для задачи $\mathbf{GP}'$. Отсюда следует, что S_0 также оптимально и для задачи $\mathbf{P}'$, что позволяет сформулировать следующее

Утверждение 3. *Все допустимые решения задачи $\mathbf{P}'$ допустимы для задачи $\mathbf{GP}'$, а все оптимальные решения задачи $\mathbf{P}'$ оптимальны и для задачи $\mathbf{GP}'$. Расписание S_0, обладающее специальным свойством и составленное из конечного числа слайсов, оптимально для обеих задач.*

В дальнейшем процессе поиска оптимального решения задачи $\mathbf{GP}'$ с искомыми свойствами будем использовать только такие расписания, которые оптимальны для задачи $\mathbf{P}'$. Все эти расписания будут иметь одну и ту же краткую конфигурацию (π, Θ), в которой порядок используемых шаблонов считается заданным перестановкой $\pi = (P_1, \ldots, P_{\theta(S_0)})$.

Далее $c_i = \max\limits_{o_j \in B_i} c(o_j)$ будет обозначать номер последнего слайса, где выполняются операции из множества B_i. Через $\widehat{C}_i(S)$ будем обозначать момент окончания этого слайса в расписании S.

Наряду с каждой кусочно-линейной функцией $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, N)$ будем рассматривать линейную функцию $f_i'(x) = \alpha_{ik_i} + \beta_{ik_i} x$, где индекс k_i определяется из включения

$$\widehat{C}_i(S_0) \in (\tau_{k_i}, \tau_{k_i+1}]. \tag{13}$$

(В дальнейшем функции $f_i'(x)$ будут использоваться для линеаризации целевой функции.) Из определения функций $f_i(x)$ и $f_i'(x)$ следует их совпадение на отрезке $(\tau_{k_i}, \tau_{k_i+1}]$, а из включения (13) следуют равенства

$$f_i(\widehat{C}_i(S_0)) = f_i'(\widehat{C}_i(S_0)),\ i = 1, \ldots, N. \tag{14}$$

Кроме того, из монотонного неубывания функции f_i вытекают неравенства

$$f_i(\tau_{k_i}) \leqslant f_i'(\tau_{k_i}),\ i = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Утверждение 4. *Для любого допустимого расписания S'' задачи $\mathbf{P}'$ и для любого $i = 1, \ldots, N$ выполняется неравенство*

$$f_i(\widehat{C}_i(S'')) \leqslant f_i'(\widehat{C}_i(S'')). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть S'' — допустимое решение задачи $\mathbf{P}'$, а i — некоторый индекс из $\{1,\ldots,N\}$. Если $\widehat{C}_i(S'') = \tau_{k_i}$, то (16) следует из (15).

Если $\widehat{C}_i(S'') \in (\tau_{k_i}, \tau_{k_i+1}]$, то из совпадения функций $f_i(x)$ и $f_i'(x)$ в этом отрезке в (16) будем иметь равенство. Покажем, что случай

$$\widehat{C}_i(S'') \notin [\tau_{k_i}, \tau_{k_i+1}] \tag{17}$$

невозможен. Возьмём индекс k_i', однозначно определяемый из соотношений $\theta_{k_i'} < c_i \leqslant \theta_{k_i'+1}$. Тогда из (3) следует, что слайс под номером c_i в любом допустимом расписании задачи $\mathbf{P}'$ целиком содержится в интервале $[\tau_{k_i'}, \tau_{k_i'+1}]$, откуда, в частности, следует

$$\widehat{C}_i(S''), \widehat{C}_i(S_0) \in [\tau_{k_i'}, \tau_{k_i'+1}]. \tag{18}$$

Из (17), (18) имеем $k_i \neq k_i'$. В то же время, из (13), (18) следует, что интервалы $(\tau_{k_i}, \tau_{k_i+1}]$ и $[\tau_{k_i'}, \tau_{k_i'+1}]$ имеют непустое пересечение, в котором лежит точка $\widehat{C}_i(S_0)$. Это возможно лишь в том случае, когда $\widehat{C}_i(S_0) = \tau_{k_i+1} = \tau_{k_i'}$, и при этом все слайсы с номерами от $\theta_{k_i'}+1$ до c_i в расписании S_0 — нулевые. Поскольку расписание S_0, как было условлено выше, не содержит несущественных нулевых слайсов, то все вышеупомянутые нулевые слайсы являются существенными, т. е. каждый из них содержит хотя бы одну нулевую операцию, что препятствует их «раздуванию» (т. е. превращению в ненулевые слайсы) в любом допустимом расписании S'' (ввиду ограничений (4)). Отсюда $\widehat{C}_i(S'') = \tau_{k_i+1}$, что противоречит (17). Утверждение 4 доказано.

Вместе с задачей $\mathbf{P}'$ рассмотрим её линеаризацию — задачу $\mathbf{LP}'$, которая получается из $\mathbf{P}'$ заменой целевой функции $F(\widehat{C}(S)) \doteq \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(\widehat{C}_i(S))$ на функцию $F'(\widehat{C}(S)) \doteq \sum\limits_{i=1}^{N} f_i'(\widehat{C}_i(S))$. При решении задачи $\mathbf{LP}'$ мы фиксируем параметры краткой конфигурации (π, Θ) допустимых расписаний, оставляя переменными лишь компоненты вектора L. Относительно этих переменных $(l_\nu,\ \nu = 1,\ldots,\theta(S_0))$ все ограничения задачи $\mathbf{LP}'$ являются линейными. При этом целевая функция $F'(\widehat{C}(S))$ линейна относительно параметров $\widehat{C}_i(S)$ $(i = 1,\ldots,N)$, которые, ввиду полноты рассматриваемых расписаний, линейным образом выражаются через переменные $\{l_\nu\}$. Таким образом, задача $\mathbf{LP}'$ представляется как задача линейного программирования относительно переменных $\{l_\nu\}$ (будем обозначать её $\mathbf{LP}^*$).

Лемма 2. *Множество оптимальных решений задачи* $\mathbf{LP}'$ *непусто. Всякое оптимальное решение задачи* $\mathbf{LP}'$ *является оптимальным решением задачи* $\mathbf{P}'$.

Доказательство. Расписание $S_0 = (\pi, \Theta, L_0)$ является допустимым решением задачи $\mathbf{LP}'$, а его компонента L_0 — допустимым решением задачи $\mathbf{LP}^*$. Так как многогранник допустимых решений задачи $\mathbf{LP}^*$ непуст и замкнут, а целевая функция ограничена снизу (например, значением в нуле, ввиду неубывания целевой функции задачи $\mathbf{LP}^*$ и неотрицательности переменных l_ν), то существуют оптимальные решения задач $\mathbf{LP}^*$ и $\mathbf{LP}'$.

Для доказательства второго утверждения леммы рассмотрим произвольное оптимальное решение S' задачи $\mathbf{LP}'$. Из (14) и утверждения 4 получаем соотношения

$$F(\widehat{C}(S_0)) = F'(\widehat{C}(S_0)), \tag{19}$$

$$F(\widehat{C}(S')) \leqslant F'(\widehat{C}(S')). \tag{20}$$

Из оптимальности решений S_0 и S' задач $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{LP}'$ с функционалами $F(\widehat{C}(S))$ и $F'(\widehat{C}(S))$ соответственно имеем:

$$F(\widehat{C}(S_0)) \leqslant F(\widehat{C}(S')), \tag{21}$$

$$F'(\widehat{C}(S')) \leqslant F'(\widehat{C}(S_0)). \tag{22}$$

Из (21), (20), (22), (19) вытекает цепочка соотношений

$$F(\widehat{C}(S_0)) \leqslant F(\widehat{C}(S')) \leqslant F'(\widehat{C}(S')) \leqslant F'(\widehat{C}(S_0)) = F(\widehat{C}(S_0)),$$

доказывающая равенство $F(\widehat{C}(S')) = F(\widehat{C}(S_0))$. Таким образом, расписание S' оптимально для задачи $\mathbf{P}'$. Лемма 2 доказана.

Из утверждения 3 и леммы 2 следует, что всякое оптимальное решение задачи $\mathbf{LP}'$ является оптимальным для исходной задачи $\mathbf{GP}'$. При этом множество допустимых решений задачи $\mathbf{LP}'$ совпадает с множеством допустимых решений задачи $\mathbf{P}'$, которое непусто (оно содержит расписание S_0). Остаётся показать, что среди оптимальных решений задачи $\mathbf{LP}'$ найдётся решение со свойствами, сформулированными в теореме 3.

Отыскиваем базисное оптимальное решение $L^* = (l_1^*, \ldots, l_{\theta(S_0)}^*)$ задачи $\mathbf{LP}^*$. Тогда расписание (π, Θ, L^*) будет оптимальным для задачи $\mathbf{LP}'$. Согласно утверждению 3 и лемме 2, оно также оптимально для

исходного примера задачи $\mathbf{GP}'$. Покажем, что это расписание обладает свойствами, сформулированными в теореме 3.

Как известно [12], число положительных переменных $\{l_\nu^*\}$ в базисном оптимальном решении задачи $\mathbf{LP}^*$ ограничено рангом $r(A)$ матрицы A коэффициентов левой части соотношений (3)–(5). В свою очередь, ранг $r(A)$ ограничен числом $m + \xi + D - 1$ ограничений (3)–(5), где m — число дуг в графе G (т. е. число неравенств вида (5)). Поскольку граф G допускает встречные дуги (o_i, o_j), (o_j, o_i) для любых двух операций $\{o_i, o_j\}$, так же как петли (o_i, o_i), m может достигать величины ξ^2. Если все $p_{ij} = 0$, то мы можем опустить все ограничения (5), поскольку в этом случае все ограничения предшествования могут быть удовлетворены подходящей последовательностью слайсов. (Например, такую последовательность слайсов можно заимствовать из расписания S_0.) В этом случае ранг $r(A)$ оценивается величиной $\xi + D - 1$.

Второе и третье утверждения теоремы следуют из стандартных теорем линейного программирования с целыми коэффициентами [12]. Теорема 3 доказана.

Аналогичная теорема имеет место для задачи $\mathbf{GP}''$ с целевой функцией, определяемой соотношениями (11), (12).

Теорема 4 (о рациональной структуре II)**.** *Пусть рассматривается задача* $\mathbf{GP}''$ *с* ξ *операциями,* D *фиксированными датами и целевой функцией* $F(\widehat{C}(S)) = \max\limits_{i=1,\dots,N} f_i(\widehat{C}_i(S))$ *от моментов завершения подмножеств операций* $B_1, \dots, B_N$, *где* $f_i(x)$ *— неубывающие кусочно-линейные функции, определяемые согласно* (12). *Тогда для любого примера этой задачи, имеющего непустое множество допустимых решений, существует оптимальное расписание* S'' *со следующими свойствами.*

1. *Расписание содержит не более* $\xi^2 + \xi + D + N - 2$ *положительных слайсов. Если во всех ограничениях предшествования* (1) *выполнено* $p_{ij} = 0$, *т. е. между последовательно выполняемыми операциями нет ни положительных, ни отрицательных задержек, то имеется не более* $\xi + D + N - 2$ *положительных слайсов.*

2. *Если все входные данные являются целыми числами, то существует рациональное число* δ, *длина записи которого ограничена полиномом от длины записи входа, такое, что каждая точка переключения* g_ν *в расписании* S'', *а также оптимум целевой функции кратны* δ.

Доказательство теоремы в большой степени повторяет доказательство теоремы 3.

Вновь рассматриваем оптимальное расписание $S_0 = (\pi, \Theta, L_0)$ с конечным числом слайсов и специальным свойством (с единственным отличием, что это расписание оптимально относительно другой целевой функции). Аналогичным образом определяем систему ограничений $LS(\pi, \Theta)$ и задачу $\mathbf{P}''$, множество допустимых решений которой составляют расписания (π, Θ, L) по всевозможным векторам $L = (l_1, \ldots, l_{\theta(S_0)})$, допустимым относительно системы ограничений $LS(\pi, \Theta)$. В качестве целевой функции задачи $\mathbf{P}''$ берём функцию $F(\widehat{C}(S))$ задачи $\mathbf{GP}''$, определяемую в (11).

Различие в доказательствах теорем 3 и 4 начинает проявляться при построении линеаризации $\mathbf{LP}''$ задачи $\mathbf{P}''$ и последующем доказательстве леммы 3.

Дело в том, что для линеаризации $\mathbf{LP}''$ мы не можем взять функцию (11), даже с учётом замены функций $f_i(\widehat{C}_i(S))$ на линейные функции $f'_i(\widehat{C}_i(S))$. Вместо этого в качестве целевой функции $F''(\widehat{C}(S))$ задачи $\mathbf{LP}''$ берётся функция $f'_{i^*}(\widehat{C}_{i^*}(S))$, где в качестве i^* выбирается номер i, на котором в $F(\widehat{C}(S_0)) = \max\limits_{i=1,\ldots,N} f_i(\widehat{C}_i(S_0)) \doteq F^*$ достигается максимум. При этом в систему ограничений задачи $\mathbf{LP}''$ наряду с ограничениями из $LS(\pi, \Theta)$ добавляются

$$f'_i(\widehat{C}_i(S)) \leqslant F^*, \ i \neq i^*. \tag{23}$$

Как и в теореме 3, записываем задачу $\mathbf{LP}''$ в терминах переменных $l_1, \ldots, l_{\theta(S_0)}$, подставляя выражения $\widehat{C}_i(S) = \sum\limits_{\nu=1}^{c_i} l_\nu + \tau_1$ в ограничения (23) и в целевую функцию

$$F''(\widehat{C}(S)) = f'_{i^*}(\widehat{C}_{i^*}(S)).$$

Так как суперпозиция линейных функций даёт линейную функцию, то результатом подстановки является задача линейного программирования $\mathbf{LP}^*$, зависящая от переменных $l_1, \ldots, l_{\theta(S_0)}$. Между допустимыми решениями задач $\mathbf{LP}''$ и $\mathbf{LP}^*$ (как и между оптимальными решениями) существует взаимно-однозначное соответствие, что позволяет вести рассуждения как в терминах расписаний, так и в терминах переменных l_ν.

Лемма 3. *Множество оптимальных решений задачи* $\mathbf{LP}''$ *непусто. Всякое оптимальное решение задачи* $\mathbf{LP}''$ *является оптимальным для задачи* $\mathbf{P}''$.

Доказательство. Первое утверждение леммы доказывается так же, как и аналогичное утверждение леммы 2 для задачи $\mathbf{LP}'$. Отличие со-

стоит лишь в том, что в лемме 3 при доказательстве допустимости расписания S_0 для задачи $\mathbf{LP}''$ требуется ещё проверить выполнение условия (23).

Действительно, из (14) имеем равенства

$$f'_i(\widehat{C}_i(S_0)) = f_i(\widehat{C}_i(S_0)), \ \ i = 1, \ldots, N,$$

а из определения величины F^* — неравенства

$$f_i(\widehat{C}_i(S_0)) \leqslant F^*, \ \ i = 1, \ldots, N,$$

откуда и вытекают неравенства (23).

Для доказательства второго утверждения рассмотрим произвольное оптимальное решение S'' задачи $\mathbf{LP}''$. Из его оптимальности для целевой функции F'' следует неравенство $f'_{i^*}(\widehat{C}_{i^*}(S'')) \leqslant f'_{i^*}(\widehat{C}_{i^*}(S_0))$, а из (14) при $i = i^*$ и из определения величины F^* — соотношения

$$f'_{i^*}(\widehat{C}_{i^*}(S_0)) = f_{i^*}(\widehat{C}_{i^*}(S_0)) = F^*,$$

откуда получаем $f'_{i^*}(\widehat{C}_{i^*}(S'')) \leqslant F^*$. С учётом (23) это даёт

$$f'_i(\widehat{C}_i(S'')) \leqslant F^*, \ \ i = 1, \ldots, N,$$

а с учётом утверждения 4 получаем

$$f_i(\widehat{C}_i(S'')) \leqslant F^*, \ \ i = 1, \ldots, N.$$

Тем самым доказано

$$F(\widehat{C}(S'')) = \max_{i=1,\ldots,N} f_i(\widehat{C}_i(S'')) \leqslant F^*.$$

Ясно, что данное неравенство не может выполняться строго, так как F^* — значение оптимума в задаче $\mathbf{P}''$. Таким образом, S'' — оптимальное решение задачи $\mathbf{P}''$. Лемма 3 доказана.

Различие в оценках на число положительных слайсов в теоремах 3 и 4 объясняется тем, что в ограничения линейной программы добавилось $N - 1$ неравенств, на эту же величину возросла верхняя оценка ранга матрицы ограничений. Это замечание завершает доказательство теоремы 4.

4. Заключительные замечания

О минимальном наборе достаточных условий существования оптимального решения. В доказательстве теоремы 2 мы использовали свойства целевых функций быть неубывающими и непрерывными слева. Как показывают приведённые во введении примеры, никакое из этих двух свойств в отдельности не является достаточным для обеспечения существования оптимального решения. Действительно, в примере 1 целевая функция была непрерывной слева, но не являлась неубывающей. В примере 2 наблюдалась обратная ситуация: функция была неубывающей, но не непрерывной слева. В обеих ситуациях даже для простейших моделей теории расписаний мы не можем гарантировать существования оптимального решения, даже если множество допустимых решений непусто.

В то же время эти два свойства, взятые вместе, обеспечивают существование оптимального расписания (конечно, при условии, что множество допустимых решений непусто). Таким образом, два указанных свойства представляют некий минимальный набор требований к целевым функциям, *достаточный* для справедливости утверждения теоремы. Однако следует подчеркнуть, что теорема 2 не влечёт *необходимости* указанных двух свойств для существования оптимального расписания и не исключает возможности существования каких-то других наборов требований к целевым функциям, достаточных для существования оптимального расписания, но не удовлетворяющих какому-либо из двух указанных требований. К примеру, можно было бы попытаться доказать аналогичное утверждение для семейства (не являющихся неубывающими) V*-образных* непрерывных целевых функций (в более общем случае — неубывающих на бесконечности непрерывных функций).

О конструктивности результатов. В разд. 3 для общей модели **GP** и широкого набора целевых функций было установлено существование оптимальных расписаний с некоторыми хорошими свойствами, при условии что для заданного примера существуют допустимые расписания. Следует подчеркнуть, что представленные доказательства (особенно доказательство первой из теорем о рациональной структуре) являются конструктивными. Действительно, для нахождения оптимального расписания с требуемыми свойствами достаточно перебрать все короткие конфигурации и для каждой из них решить соответствующую задачу линейного программирования. И хотя число коротких конфигураций заведомо велико, оно всё же конечно. Таким образом, проблема алгоритмически разрешима.

Доказательство теоремы 4 выглядит менее конструктивным (поскольку предполагает знание значения оптимума F^* при записи линейной модели LP''), однако ясно, что и здесь возможен конструктивный путь.

Открытые вопросы. Представляет интерес обобщение теоремы 2 на более общие модели, в частности, модели с переналадками машин и так называемые «групповые» модели.

Обобщение теорем о рациональной структуре на случай более общих целевых функций также является одним из перспективных направлений исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Baptiste Ph., Timkovsky V.** On preemption redundancy in scheduling unit processing time jobs on two parallel machines // Oper. Research Lett. — 2001. Vol. 28. — P. 205–212.
2. **Brucker P., Heitmann S., Hurink J.** How useful are preemptive schedules? // Oper. Res. Lett. — 2003, — Vol. 31, N 2. — P. 129–136.
3. **Du J., Leung J. Y. T.** Minimizing mean flow time in two-machine open shops and flow shops // J. Algorithms. — 1993. Vol. 14. — P. 24–44.
4. **Gonzalez T., Sahni S.** Open shop scheduling to minimize finish time // J. ACM. — 1976. — Vol. 23. — P. 665–679.
5. **Gonzalez T., Sahni S.** Preemptive scheduling of uniform processor systems // J. ACM. — 1978. — Vol. 25. — P. 92–101.
6. **Labetoulle J., Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G.** Preemptive scheduling of uniform machines subject to release dates // Progress in Combinatorial Optimization. — New York: Academic Press, 1984. — P. 245–261.
7. **Lawler E. L., Labetoulle J.** On preemptive scheduling of unrelated parallel processors by linear programming // J. ACM. — 1978. — Vol. 25. — P. 612–619.
8. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.** Sequencing and scheduling: algorithms and complexity // Logistics of Production and Inventory. Handbooks in Operations Research and Management Science. Vol. 4. — North–Holland: Elsevier, 1993. — P. 445–522.
9. **McNaughton R.** Scheduling with deadlines and loss functions // Management Science. — 1959. — Vol. 6. — P. 1–12.
10. **Sauer N., Stone M.** Preemptive scheduling // Algorithms and order (Ottawa, ON, 1987). — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989. — P. 307–323.
11. **Sauer N., Stone M.** Rational preemptive scheduling. // Order. — 1987. — Vol. 4, N 2. — P. 195–206.
12. **Schrijver A.** Theory of linear and integer programming. — Chichester: Wiley, 1986. — 470 p.

13. **Tanaev V. S., Gordon V. S., Shafransky Y. M.** Scheduling theory. Single-stage systems. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1994. — 380 p.

Baptiste Philipp (Баптист Филипп),
e-mail: baptiste@utc.fr

Carlier Janne (Карлье Жан),
e-mail: carlier@utc.fr

Кононов Александр Вениаминович,
e-mail: alvenko@math.nsc.ru

Queyranne Maurice (Керан Морис),
e-mail: Maurice.Queyranne@commerce.ubc.ca

Севастьянов Сергей Васильевич,
e-mail: seva@math.nsc.ru

Свириденко Максим Иванович,
e-mail: sviri@us.ibm.com

Статья поступила
13 октября 2008 г.
Переработанный вариант —
12 декабря 2008 г.