ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2009. Том 16, № 1. С. 64–79

УДК 519.87

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕДЕЛИМОГО РЕСУРСА*)

Э. О. Рапопорт

Аннотация. Изучается динамическая экономическая система с дискретным временем, состояния которой в каждый момент времени характеризуются целыми неотрицательными точками двумерного векторного пространства. Имеется два продукта и два различных производства, в каждом из которых состояние системы может изменяться на некоторый случайный вектор с целыми компонентами с различными наборами вероятностей. Под управлением понимается вложение единичного ресурса в одно из производств, т. е. выбор в каждый момент времени одного из имеющихся наборов вероятностей. Цель управления — минимизация вероятности выхода из положительного квадранта. Доказано существование оптимального управления, получена двустороняя асимптотическая оценка этой вероятности.

Ключевые слова: управление, оптимальное управление, математическая экономика, марковская цепь.

Введение

Одна из стандартных задач динамического управления экономикой — распределение в каждый момент времени ограниченного ресурса между конкурирующими производствами. Особо рассматривается эта задача в случае, когда ресурс неделим, т. е. когда имеющийся ресурс необходимо целиком отдавать только одному производству (например, направление опытного управляющего, использование уникального оборудования и т. п.). Ясно, что нехватка ресурса в тех производствах, для которых ресурс не выделяется, должна вести к ухудшению состояния, характеризующего результаты этого производства, в то время как выделение ресурса — к улучшению состояния. Такие задачи обычно решаются методами целочисленного программирования, методами динамического программирования и т. п. Наличие стохастических факторов, влияющих на выпуск

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–06–00363) и Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ–4113.2008.6).

продукции в каждом из производств, существенно усложняет задачу. Методы стохастического программирования, методы теории управляемых марковских процессов, применяемые в этом случае, обычно имеют дело с целевыми функциями, аддитивно зависящими от состояний на каждом шаге изучаемого динамического процесса (см., например, [6]).

Интересный подход предложен Раднером и Ротшильдом [8, 9]. В рассматриваемых авторами моделях необходимо распределить единичный неделимый ресурс между k различными производствами, каждое из которых производит k видов продуктов. Выделение ресурса какому-либо производству приводит к увеличению запаса одних продуктов и уменьшению запаса других (увеличение и уменьшение зависят от случайных факторов).

Считается, что система функционирует (живёт) до тех пор, пока количество каждого продукта неотрицательно и хотя бы для одного — строго положительно. При этом ищется управление, которое максимизирует вероятность выживания, т. е. минимизирует вероятность выхода из положительного ортанта. Здесь возникает задача управления марковскими цепями на счётном множестве состояний. В [9] сформулированы условия, при которых существует управление с положительной вероятностью выживания и найдено простое управление, при котором вероятность выживания положительна. В [8] эта модель использовалась для изучения предельных цен на производимые продукты.

Вопрос о существовании оптимального управления, его характеристики и поведение вероятности выживания при таком управлении оставался открытым.

Вариации подобных моделей изучались автором в [3, 4]. Изучался класс управлений, для которого управление, введённое в [9], является частным случаем, и исследовались асимптотические свойства вероятности вырождения при таких управлениях. В [5] для случая $k = 2$ при разных предположениях о природе стохастических объектов удалось описать асимптотическое поведение вероятности вырождения при оптимальном управлении (если оно существует). Для некоторых частных случаев оптимальное управление и вероятность выживания при таком управлении были выписаны явно.

Настоящая работа является продолжением работы [5]. Доказано существование оптимального управления и ослаблены некоторые ограничения, при которых ранее было получено асимптотическое описание вероятности вырождения.

1. Основная модель

Имеется два продукта и два способа производства. Состояние системы (количество произведённого продукта) характеризуется целочисленными точками неотрицательного квадранта плоскости. Множество таких точек будем обозначать через N_+^2. В каждый дискретный момент времени инвестор может вкладывать неделимый единичный ресурс в одно из двух производств. Опишем процесс функционирования при таком вложении.

Пусть задан набор целочисленных векторов (a_i, b_i), $1 \leqslant i \leqslant k$. При вложении в первое производство система переходит из целочисленной точки (x, y) первого квадранта в одну из точек $(x + a_i, y + b_i)$ с вероятностями p_i, при вложении во второе производство — с вероятностями q_i. Некоторые из вероятностей могут быть равны нулю, $\sum\limits_i p_i = \sum\limits_i q_i = 1$. Через ξ и η будем обозначать двумерные случайные величины, принимающие значения (a_i, b_i) с вероятностями p_i и q_i соответственно.

Вырождением системы будем называть выход её из первого квадранта.

Под управлением системой будем понимать выбор в каждый момент времени вложения в первое или второе производство, т. е. выбор одной из двух случайных величин ξ или η, определяющих следующее состояние системы. Цель управления — минимизация вероятности вырождения системы, т. е. минимизация вероятности выхода из первого квадранта.

Естественно потребовать, чтобы первое управление (вложение ресурса в первое производство) было «лучше» для первого продукта, а второе управление — «лучше» для второго продукта. Формально это предположение будем записывать так:

$$\begin{gathered} \sum_i p_i b_i < 0, \quad \sum_i p_i (a_i + b_i) > 0, \\ \sum_i q_i a_i < 0, \quad \sum_i q_i (a_i + b_i) > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Заметим, что из этих неравенств следует выполнение условий теоремы существования управления с отличной от единицы вероятностью вырождения [8]. В принятых обозначениях эти условия сводятся к неравенству

$$\sum_i p_i b_i \cdot \sum_i q_i a_i < \sum_i p_i a_i \cdot \sum_i q_i b_i. \tag{2}$$

Управлением в точке (x, y) будем называть функцию $\gamma(x, y)$, принимающую значения 1, если выбирается вложение в первый ресурс, и 0,

если выбирается вложение во второй ресурс. Через γ будем обозначать функцию, определённую на N_+^2, в каждой точке (x,y) принимающую значение $\gamma(x,y), \gamma = \{\gamma(x,y)\}$.

Множество всех допустимых управлений обозначим через

$$\Gamma = \{\gamma \mid \gamma(x,y) \in \{0,1\}\, \forall (x,y) \in N_+^2\}.$$

Тогда при фиксированном управлении γ получаем марковский процесс $Z(t) = (X(t), Y(t))$, матрица переходов которого определяется следующим образом: из точки (x,y) можно попасть в точки $(x+a_i, y+b_i)$ с вероятностями $s_i = \gamma(x,y)p_i + (1-\gamma(x,y))q_i$. Таким образом, марковский процесс в каждый момент t определяется рекуррентными соотношениями

$$Z(t+1) = Z(t) + \gamma(X(t), Y(t))\xi + (1-\gamma(X(t), Y(t)))\eta,$$

причём $Z(0) = (x,y)$.

Оператор переходов этого марковского процесса обозначим через Φ_γ. Тогда $Z(t+1) = \Phi_\gamma(Z(t))$.

Как уже говорилось, для каждой точки $(x,y) \in N_+^2$ нужно выбрать управление $\gamma = \{\gamma(x,y)\}$, принимающее значения 0 или 1. При таком управлении вероятность вырождения $g_\gamma(x,y)$ (выхода из первого квадранта) будет минимальным решением системы уравнений [1, стр. 100]

$$g_\gamma(x,y) = \gamma \sum_i p_i g_\gamma(x+a_i, y+b_i) + (1-\gamma) \sum_i q_i g_\gamma(x+a_i, y+b_i)$$

с граничными условиями $g_\gamma(x,y) = 1$ при $(x,y) \notin N_+^2$.

Напомним [1, стр. 78], что неотрицательная функция f называется *регулярной* (*гармонической*) для марковского процесса с оператором перехода Φ, если $f(Z) = Mf(\Phi(Z))$, *суперрегулярной* (*супергармонической*, или *эксцессивной*), если $f(Z) \geqslant Mf(\Phi(Z))$ и *субрегулярной* (*субгармонической*), если $f(Z) \leqslant Mf(\Phi(Z))$.

Легко проверить, что g_γ — субрегулярная функция.

Положим $g(x,y) = \inf\{g_\gamma(x,y) \mid \forall\, \gamma \in \Gamma\}$. Заметим, что g — субрегулярная функция при любом управлении γ.

Теорема 1. *Существует такое управление $\widehat{\gamma}$, что $g(x,y) = g_{\widehat{\gamma}}(x,y)$.*

Доказательство. Поскольку $g(x,y) = \inf\{g_\gamma(x,y)\}$, для каждого n и для каждой точки (x,y) существуют $\gamma_n(x,y)$ и $g_n(x,y) (\equiv g_{\gamma_n}(x,y))$ такие, что

$$0 \leqslant g_n(x,y) - g(x,y) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Так как N_+^2 счётно, то каждое управление γ можно рассматривать как последовательность, состоящую из 0 и 1, т. е. как элемент нормированного пространства ограниченных последовательностей l_∞. Известно, что l_∞ — пространство, сопряжённое к l_1, которое является сепарабельным. Поэтому (см., например, [2, стр. 254]) из любой последовательности функционалов из l_∞ с ограниченными нормами можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому функционалу. Используя этот факт для последовательности γ_n, получаем, что существует подпоследовательность γ_{n_k}, слабо сходящаяся к некоторому $\widehat{\gamma}$, при котором и выполняется равенство $g(x,y) = g_{\widehat{\gamma}}(x,y)$. Теорема 1 доказана.

Приведём простой алгоритм, приводящий к оптимальному управлению.

Зафиксируем сначала произвольное управление γ_0 и положим

$$g_0(x,y) = \gamma_0 \sum_i p_i g_0(x+a_i, y+b_i) + (1-\gamma_0) \sum_i q_i g_0(x+a_i, y+b_i)).$$

Рассмотрим теперь последовательности γ_n и g_n, определяемые следующим образом:

$$g_{n+1}(x,y) = \min_{\tau \in \{0,1\}} \Big(\tau \sum_i p_i g_n(x+a_i, y+b_i) + (1-\tau) \sum_i q_i g_n(x+a_i, y+b_i) \Big).$$

Пусть этот минимум достигается при некотором $\tau_n \in \{0,1\}$. Тогда в каждой точке (x,y) положим $\gamma_{n+1}(x,y) = \tau_n$.

Последовательности g_n и γ_n принадлежат пространству ограниченных последовательностей, причём g_n монотонно убывает в каждой точке и тем самым $g_n(x,y)$ сходится для каждой точки (x,y) к некоторой функции $\widehat{g}(x,y)$.

Как и выше, из последовательности γ_n можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому $\widehat{\gamma}$, при котором и выполняется равенство $g(x,y) = g_{\widehat{\gamma}}(x,y)$. Очевидно, что для всех x, y справедлив предельный переход $g_n(x,y) \to g(x,y)$ при $n \to \infty$.

Замечание. В слабо сходящейся последовательности γ_n в каждой точке (x,y), начиная с некоторого места, значения $\gamma_n(x,y)$ постоянны, поскольку $\gamma_n(x,y)$ может принимать лишь два значения.

Управление $\widehat{\gamma}$, существование которого утверждается в теореме 1, будем называть *оптимальным* управлением.

Управление γ естественно выбирать таким, что из любой точки за конечное число шагов можно с ненулевой вероятностью попасть в точку, в которой это управление меняет значение.

Отметим, что оптимальное управление должно удовлетворять этому условию.

Действительно, если управление постоянно на какой-либо бесконечной последовательности состояний, то вложения производятся только в одно из производств, при этом координата, соответствующая второму производству, изменяется по случайному закону с отрицательным математическим ожиданием.

2. Ассоциированная система и её свойства

Для исследования свойств марковской цепи, возникающей при оптимальном управлении, оказывается полезным рассмотрение системы уравнений, впервые введённой в [4], которую здесь запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_i p_i e^{-(\alpha a_i + \beta b_i)} & = & 1, \\ \sum\limits_i q_i e^{-(\alpha a_i + \beta b_i)} & = & 1. \end{cases} \tag{3}$$

Эту систему будем называть системой, ассоциированной с рассматриваемой марковской цепью, или просто *ассоциированной системой*. Очевидно, что пара $(0, 0)$ является решением этой системы.

Лемма 1. *При выполнении условий* (1) *система* (3) *может иметь ещё только положительные решения* (β^*, α^*).

Доказательство. Действительно, в окрестности точки (0,0) уравнения системы (3) порождают функции $\alpha_p(\beta)$ и $\alpha_q(\beta)$, причём (как вытекает из условий (1))

$$\alpha_p'(0) = -\frac{\sum p_i b_i}{\sum p_i a_i} > 0, \;\; \alpha_q'(0) = -\frac{\sum q_i b_i}{\sum q_i a_i} > 0, \;\; \alpha_p'(0) \; < \; \alpha_q'(0),$$

$$\alpha_p''(0) = \frac{-\sum p_i (a_i \alpha_p'(0) + b_i)^2}{\sum p_i a_i} < 0, \; \alpha_q''(0) = \frac{-\sum q_i (a_i \alpha_q'(0) + b_i)^2}{\sum q_i a_i} > 0,$$

т. е. около точки (0,0) функция α_p возрастающая и вогнутая, а функция α_q возрастающая и выпуклая. Поэтому при $\beta > 0$, достаточно близких к нулю, в силу условия (2) справедливо неравенство

$$\alpha_p(\beta) < \alpha_q(\beta).$$

Значит, обе координаты дополнительных точек пересечения (если они существуют) должны быть больше нуля.

Таких точек может быть несколько. Кроме того, у ассоциированной системы может и не быть решений, отличных от (0,0). Лемма 1 доказана.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} 0{,}8e^{-\alpha} + 0{,}15e^{\alpha} + 0{,}05e^{\beta} & = & 1, \\ 0{,}05e^{\alpha} + 0{,}8e^{-\beta} + 0{,}15e^{\beta} & = & 1 \end{cases}$$

имеет четыре решения:

$$(0,0); (\ln 4, \ln 4); \left(\ln\frac{10+2\sqrt{7}}{3}, \ln\frac{10-2\sqrt{7}}{3}\right); \left(\ln\frac{10-2\sqrt{7}}{3}, \ln\frac{10+2\sqrt{7}}{3}\right).$$

Пример 2. Система

$$\begin{cases} 0{,}7e^{-2\alpha+\beta} & + & 0{,}3e^{-\beta} & = & 1, \\ 0{,}2e^{-\alpha} & + & 0{,}8e^{-2\beta+\alpha} & = & 1 \end{cases}$$

не имеет решений, кроме (0,0).

В [4, 5] предполагалось, что ассоциированная система (помимо (0,0)) имеет только одно решение. Были приведены некоторые достаточные для этого условия [5]. В настоящей работе будет предполагаться, что кроме (0,0) существуют ещё решения ассоциированной системы, предположение о единственности снимается.

Замечание 1. Производные (по β) функций α_p и α_q в каждой точке, в которой они существуют, определяются по формулам

$$\alpha'_p = -\frac{\sum p_i b_i e^{-(\alpha_p a_i + \beta b_i)}}{\sum p_i a_i e^{-(\alpha_p a_i + \beta b_i)}}, \qquad \alpha'_q = -\frac{\sum q_i b_i e^{-(\alpha_q a_i + \beta b_i)}}{\sum q_i a_i e^{-(\alpha_q a_i + \beta b_i)}}. \tag{4}$$

Рассмотрим множества Ω_p и Ω_q, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \Big\{(\beta,\alpha)\varepsilon R^2_+ \mid \sum_i p_i e^{-(\alpha a_i + \beta b_i)} \leqslant 1\Big\}, \\ \Omega_q &= \Big\{(\beta,\alpha)\varepsilon R^2_+ \mid \sum_i q_i e^{-(\alpha a_i + \beta b_i)} \leqslant 1\Big\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Очевидно, что эти множества выпуклые.

Исследуем некоторые свойства их границ — кривых α_p и α_q, определяемых уравнениями системы (3), в некоторой точке их пересечения K (отличной от точки (0,0)).

Предположим сначала, что множества Ω_p и Ω_q ограничены. Тогда их выпуклость означает, что границу каждого из них можно описать

верхней (с верхним индексом t) и нижней (с верхним индексом l) функциями, причём верхние функции вогнутые, а нижние — выпуклые. В итоге имеем две пары функций $\alpha_p^t(\beta), \alpha_p^l(\beta)$ и $\alpha_q^t(\beta), \alpha_q^l(\beta)$, причём точка $(0,0)$ лежит на возрастающих частях графиков функций α_p^t и α_q^l и, как следует из (2), $(\alpha_q^l)'(0) > (\alpha_p^t)'(0)$.

Ясно, что эти функции непрерывны по β, причём часть границы множества Ω_p, соответствующая значениям $\beta > 0$ и лежащая между точками $(0,0)$ и $K = (\beta^*, \alpha^*)$, принадлежит множеству Ω_q. Кроме того (как вытекает из формул (4)), производные этих функций меняют знак при переходе от возрастающих частей к убывающим за счёт смены знака числителей и при переходе от функции с индексом t к функции с индексом l за счёт смены знака знаменателей. При этом в точке (0,0) знаки числителей и знаменателей определяются из (1). Это замечание позволяет оценить знаки числителей и знаменателей производных рассматриваемых функций в точке K.

Рассмотрим различные случаи в зависимости от того, на графиках какой из функций (t или l) и на возрастающей или убывающей частях этих графиков лежит точка K. Поскольку в точке (0,0) функция α_p вогнутая, а α_q выпуклая, возможны следующие случаи.

Точка K может принадлежать возрастающим частям графиков функций α_q^t, α_q^l и убывающей части графика функции α_q^t. Аналогично, точка K может принадлежать возрастающим частям графиков функций α_p^t, α_p^l и убывающей части графика функции α_p^t.

Невозможен случай, когда точка K принадлежит убывающей части графика функции α_p^l, поскольку этот кусок графика лежит ниже оси $\alpha = 0$. Аналогично, невозможен случай, когда точка K принадлежит возрастающей части графика функции α_q^l, поскольку этот кусок графика лежит левее оси $\beta = 0$.

Условия (1) показывают, что в некоторой окрестности точки (0,0) функция α_p возрастающая и вогнутая, а функция α_q возрастающая и выпуклая.

Приведённые выше соображения показывают, что справедливо следующее утверждение, в формулировке которого все неравенства выписываются в точке $K = (\beta^*, \alpha^*)$.

Для упрощения обозначений индекс $*$ у координат точки K будем опускать.

Лемма 2. *Для точек пересечения кривых α_p и α_q возможны только следующие девять вариантов расположения.*

1. *Точка K лежит на восходящей ветви графика функции α_q^l и на*

восходящей ветви графика функции α_p^l. *Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0.$$

2. *Точка* K *лежит на восходящей ветви графика функции* α_q^l *и на нисходящей ветви графика функции* α_p^t. *Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0.$$

3. *Точка* K *лежит на восходящей ветви графика функции* α_q^l *и на восходящей ветви графика функции* α_p^t. *Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0.$$

4. *Точка* K *лежит на нисходящей ветви графика функции* α_q^t *и на восходящей ветви графика функции* α_p^l. *Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0.$$

5. *Точка* K *лежит на нисходящей ветви графика функции* α_q^t *и на нисходящей ветви графика функции* α_p^t. *Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0.$$

6. *Точка* K *лежит на нисходящей ветви графика функции* α_q^t *и на восходящей ветви графика функции* α_p^t. *Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0.$$

7. *Точка K лежит на восходящей ветви графика функции α_q^t и на восходящей ветви графика функции α_p^l. Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0.$$

8. *Точка K лежит на восходящей ветви графика функции α_q^t и на нисходящей ветви графика функции α_p^t. Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0.$$

9. *Точка K лежит на восходящей ветви графика функции α_q^t и на восходящей ветви графика функции α_p^t. Тогда*

$$\sum q_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0, \quad \sum p_i a_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \leqslant 0,$$

$$\sum q_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0, \quad \sum p_i b_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} \geqslant 0.$$

Если одно из множеств Ω_p и Ω_q (или оба одновременно) является неограниченным, то вместо двух функций с верхними индексами l и t возникает только одна или же отсутствуют возрастающие или убывающие части графиков этих функций. При этом ситуация упрощается и точки пересечения, соответствующие этим частям графиков, исчезают.

Как было показано в [5], если точка пересечения единственная (помимо (0,0)), то исчезают варианты 2, 3 и 6. Отметим, что в приведённых выше неравенствах леммы точные равенства возможны только тогда, когда в точке K либо числители, либо знаменатели производной какой-либо из функций обращаются в 0. Не сильно ограничивая общность, можно считать, что такие случаи не реализуются, т. е. все неравенства выполняются как строгие.

3. Оценка вероятности вырождения

Пусть, как и выше, $g(x,y)$ — вероятность вырождения при оптимальном управлении, если система находится в точке (x,y). Тогда

$$g(x,y) = \min\Big(\sum_i p_i g(x+a_i, y+b_i), \sum_i q_i g(x+a_i, y+b_i)\Big).$$

Эти равенства выполняются для всех точек (x, y) таких, что при любых i точка $(x+a_i, y+b_i)$ лежит в неотрицательном квадранте. Если же для некоторого i либо $x+a_i<0$, либо $y+b_i<0$, то $g(x+a_i, y+b_i)=1$.

Покажем, что введённая функция g является субрегулярной при любом управлении $\gamma \in \Gamma$ для всех целочисленных точек первого квадранта.

Действительно, $Mg(\Phi_\gamma(x,y)) = \sum\limits_i p_i g(x+a_i, y+b_i)$, если $\gamma(x,y)=1$, и $Mg(\Phi_\gamma(x,y)) = \sum\limits_i q_i g(x+a_i, y+b_i)$, если $\gamma(x,y)=0$. Поэтому $g(x,y) \leqslant Mg(\Phi(x,y))$.

Отметим, что $1-g$ является суперрегулярной и неотрицательной. По теореме о представлении неотрицательной суперрегулярной функции [1, стр. 99, 100] минимальная субрегулярная функция единственна.

Пусть (α, β) — некоторое решение ассоциированной системы, отличное от (0,0).

Положим $h(x,y) = g(x,y)e^{\alpha x+\beta y}$.

Для каждой точки (x,y) обозначим через $I(x,y)$ совокупность таких индексов i, что точка $(x+a_i, y+b_i)$ не лежит в первом квадранте. Отметим, что это множество конечное. Положим

$$A_p(x,y) = \sum_{i \notin I(x,y)} p_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} h(x+a_i, y+b_i) + \sum_{i \in I(x,y)} p_i e^{\alpha x+\beta y},$$

$$A_q(x,y) = \sum_{i \notin I(x,y)} q_i e^{-(\alpha a_i+\beta b_i)} h(x+a_i, y+b_i) + \sum_{i \in I(x,y)} q_i e^{\alpha x+\beta y}.$$

Тогда

$$h(x,y) = \min(A_p(x,y), A_q(x,y)). \tag{6}$$

Замечание 2. Если в формулах, определяющих $A_p(x,y)$ и $A_q(x,y)$, слагаемые, в которых суммирование производится по $i \in I(x,y)$ (не зависящие от h), увеличивать или уменьшать, то решение системы (6) также будет соответственно увеличиваться либо уменьшаться.

Полученные уравнения для функции $h(x,y)$ приводят к следующим полезным построениям.

Описанные выше случайные величины ξ и η (принимающие значения (a_i, b_i) с вероятностями p_i и q_i соответственно), порождают на множестве целочисленных точек плоскости случайные блуждания, которые будем обозначать P и Q.

Одновременно с ними рассмотрим другую пару случайных блужданий, связанную с исходной: векторы, определяющие переходы, те же са-

мые, а вероятности перехода для новой пары определяются по формулам

$$p_i^* = p_i e^{-(\alpha a_i + \beta b_i)}; \quad q_i^* = q_i e^{-(\alpha a_i + \beta b_i)}.$$

Так как (α, β) является положительным решением ассоциированной системы, то новые наборы (p_i^*) и $(q_i^*)(i = 1, 2, \ldots, k)$ являются наборами вероятностей. Случайные блуждания, порождённые этими вероятностями, будем обозначать P^* и Q^*.

В новых обозначениях формулы для $A_p(x, y)$ и $A_q(x, y)$ можно записать в виде

$$A_p(x, y) = \sum_{i \notin I(x,y)} p_i^* h(x + a_i, y + b_i) + \sum_{i \in I(x,y)} p_i^* e^{\alpha(x+a_i)+\beta(y+b_i)},$$

$$A_q(x, y) = \sum_{i \notin I(x,y)} q_i^* h(x + a_i, y + b_i) + \sum_{i \in I(x,y)} q_i^* e^{\alpha(x+a_i)+\beta(y+b_i)}.$$

Отметим, что точки (0,0) и $(-\alpha, -\beta)$ суть решения ассоциированной системы для пары (P^*, Q^*), причём $-\alpha < 0$ и $-\beta < 0$.

Пусть $f(x, y)$ — вероятность выхода из первого квадранта для случайных блужданий P^* и Q^*, порождённых наборами вероятностей p_i^* и q_i^* соответственно, при оптимальном управлении.

Функция f должна удовлетворять соотношениям

$$f(x, y) = \min \Bigg\{ \sum_{i \notin I(x,y)} p_i^* f(x + a_i, y + b_i) + \sum_{i \in I(x,y)} p_i^*, \quad \sum_{i \notin I(x,y)} q_i^* f(x + a_i, y + b_i) + \sum_{i \in I(x,y)} q_i^* \Bigg\}.$$

Теорема 2. *$f(x, y) = 1$ при любых $(x, y) \in N_+^2$.*

Доказательство. Пусть $X^*(t)$ и $Y^*(t)$ — координаты точки на шаге t, определяемые при некотором фиксированном управлении γ для пары случайных блужданий P^* и Q^*, $V(t) = \min(X^*(t), Y^*(t))$.

В [5] изучался случай, когда точка пересечения границ множеств (помимо точки (0,0)) единственная. Этому случаю соответствуют варианты $1, 4, 5, 7, 8, 9$, описанные в лемме 2. Для этих вариантов утверждение теоремы там было доказано.

Докажем теорему для вариантов 2, 3 и 6.

Сначала рассмотрим случай, когда положение точки K описывается вариантом 3.

Тогда в точке K (с учётом предположения о том, что все неравенства леммы 2 выполняются как строгие) справедливы неравенства (в новых обозначениях)

$$\sum q_i^* a_i > 0, \quad \sum p_i^* a_i < 0, \quad \sum q_i^* b_i < 0, \quad \sum p_i^* b_i > 0.$$

Пусть $\kappa \in [0,1]$. Рассмотрим случайную величину $W(t) = \kappa X^*(t) + (1-\kappa)Y^*(t)$. Ясно, что для каждого t и для любого $\kappa \in [0,1]$ величина $W(t)$ является мажорантой для $V(t)$, т. е. справедливо неравенство $W(t) \geqslant V(t)$.

Выберем κ так, чтобы прирост $M(W(t+1) - W(t))$ не зависел от управления γ:

$$\kappa = \frac{\sum b_i(q_i^* - p_i^*)}{\sum (a_i - b_i)(p_i^* - q_i^*)}.$$

У дроби, определяющей параметр κ, в этом случае числитель и знаменатель отрицательны.

При этом, как легко проверить, $0 \leqslant \kappa \leqslant 1$.

При выбранном таким образом параметре κ имеем

$$M(W(t+1) - W(t)) = \frac{\sum b_i q_i^* \sum a_i p_i^* - \sum b_i p_i^* \sum a_i q_i^*}{\sum (a_i - b_i)(p_i^* - q_i^*)} = h. \tag{7}$$

Как уже замечено выше, знаменатель этой дроби отрицателен. Покажем теперь, что её числитель положителен.

Действительно, проведём прямую через точки $(0,0)$ и (α, β); отрезок между этими точками лежит целиком в множествах Ω_p и Ω_q, определённых формулой (5). Угловой коэффициент k этой прямой положителен. В точке (α, β) функция α_q^t вогнутая, а функция α_p^l выпуклая, причём обе они возрастающие. Поэтому в этой точке справедливы неравенства

$$(\alpha_q^t)' = -\frac{\sum q_i^* b_i}{\sum q_i^* a_i} < k < (\alpha_p^l)' = -\frac{\sum p_i^* b_i}{\sum p_i^* a_i}.$$

Но $\sum q_i^* a_i < 0$, $\sum p_i^* a_i > 0$, поэтому $\sum b_i q_i^* \sum a_i p_i^* - \sum b_i p_i^* \sum a_i q_i^* < 0$.

Следовательно, $h < 0$.

Воспользуемся теперь усиленным законом больших чисел (теоремой Колмогорова) (см., например, [7, стр. 379]).

Пусть $\{R_t\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с конечным математическим ожиданием h, $S(t) = \sum\limits_{j=0}^{t} R_j$. Тогда $\frac{S_t}{t} \to h$ почти всюду.

Положим $MR_t = M(W(t) - W(t-1))$. Тогда $MR_t = h, S_t = W(t)$, и по усиленному закону больших чисел $W(t) \to -\infty$ почти всюду. Отсюда и следует утверждение теоремы.

В вариантах 2 и 6 леммы 2 выбранный параметр κ может не принадлежать промежутку $(0,1)$.

Однако в варианте 2 в качестве мажоранты можно выбрать $Y(t)$ ($\kappa = 0$). При этом $W(t) = Y(t)$ и $MR_t = M(W(t) - W(t-1)) < 0$, поскольку в этом варианте в точке K справедливы неравенства

$$\sum p_i^* b_i < 0 \text{ и } \sum q_i^* b_i < 0.$$

Аналогично, в варианте 6 $W(t) = X(t)(\kappa = 1)$ и $MR_t = M(W(t) - W(t-1)) < 0$, так как в точке K справедливы неравенства $\sum p_i^* a_i < 0$ и $\sum q_i^* a_i < 0$.

Применение теоремы Колмогорова приводит к тем же результатам. Теорема 2 доказана.

Теперь заметим, что если для любого $i \in I(x,y)$ справедливо неравенство $e^{\alpha(x+a_i)+\beta(y+b_i)} > 1$, то $h(x,y) \geqslant f(x,y)$. Это замечание подсказывает, как получить нижнюю оценку для $h(x,y)$.

Положим

$$c_p = \min_{x,y} \frac{\sum\limits_{i\in I(x,y)} p_i^* e^{\alpha(x+a_i)+\beta(y+b_i)}}{\sum\limits_{i\in I(x,y)} p_i^*}, \quad c_q = \min_{x,y} \frac{\sum\limits_{i\in I(x,y)} q_i^* e^{\alpha(x+a_i)+\beta(y+b_i)}}{\sum\limits_{i\in I(x,y)} q_i^*},$$

где минимум выбирается по всем (x,y) таким, что $I(x,y) \neq \varnothing$.

Пусть $c = \min(c_p, c_q)$.

Лемма 3. *$h(x,y) \geqslant c$.*

Доказательство. Рассмотрим систему, для которой $s(x,y) = c$ является решением:

$$s(x,y) = \min\Big\{ \sum_{i\in I(x,y)} p_i^* s(x+a_i, y+b_i) + c_1, \sum_{i\in I(x,y)} q_i^* s(x+a_i, y+b_i) + c_2 \Big\},$$

где

$$c_1 = c\Big(1 - \sum_{i\notin I(x,y)} p_i^*\Big), \quad c_2 = c\Big(1 - \sum_{i\notin I(x,y)} q_i^*\Big).$$

Очевидно, что

$$c_1 \leqslant \sum_{i\notin I(x,y)} p_i^* e^{\alpha(x+a_i)+\beta(y+b_i)}, \quad c_2 \leqslant \sum_{i\notin I(x,y)} q_i^* e^{\alpha(x+a_i)+\beta(y+b_i)}.$$

В итоге имеем $c \leqslant h(x,y)$. Лемма 3 доказана.

По теореме единственности (см. [1, стр. 99]) решение функционального уравнения (6) для $h(x,y)$ существует и единственно. Поэтому справедлива следующая нижняя оценка для функции g:

$$g(x,y) \geqslant ce^{-(\alpha x+\beta y)}.$$

Поскольку эти рассуждения справедливы для любого решения ассоциированной системы (кроме решения $(0,0)$), в итоге получаем оценку

$$g(x,y) \geqslant c \max_{(\alpha,\beta)} \{e^{-(\alpha x+\beta y)}\}.$$

Максимум в этой формуле берётся по всем отличным от (0,0) решениям ассоциированной системы.

К сожалению, верхнюю оценку точно таким же образом получить не удаётся. Трудности возникают, поскольку на множестве $I(x,y)$ может быть неограниченной сверху функция $g = \sum\limits_{i\in I(x,y)} p_i^*(\lambda^*)^{-(x+a_i)}(\mu^*)^{-(y+b_i)}$, например, при отрицательном $x+a_i$ величина $y+b_i$ может быть сколь угодно большой. Тогда $e^{\alpha(x+a_i)+\beta(y+b_i)}$ нельзя ограничить сверху универсальной константой, поскольку $\beta > 0$.

Для получения верхней оценки при достаточно больших (x,y) воспользуемся понятием «пожарного» управления, введённого в [9].

Управление γ будем называть «*пожарным*», если для $x \neq y$ имеем $\gamma(x,y) = 0$ в области $\big\{(x,y) \in N_+^2 \mid x > y\big\}$ и $\gamma(x,y) = 1$ в области $\big\{(x,y) \in N_+^2 \mid x < y\big\}$. Если же $x = y$, то $\gamma(x,y)$ выбирается произвольно.

В [4] автором показано, что при использовании «пожарного» управления при дополнительном предположении — если $b_i > 0$, то $p_i = 0$, если $a_i > 0$, то $q_i = 0$ — справедлива оценка

$$\widetilde{g}(x,y) \leqslant le^{-(\alpha x+\beta y)},$$

где $\widetilde{g}(x,y)$ — вероятность вырождения при «пожарном» управлении, исходя из точки (x,y), $l > 0$ — некоторая константа.

Поскольку «пожарное» управление не является оптимальным, отсюда получается верхняя оценка вероятности вырождения.

Частный случай, при котором это предположение выполняется, рассмотрен автором в [5]. Предполагалось, что $p_i \neq 0$, только если $a_i \geqslant 0$, $0 \geqslant b_i \geqslant -1$, а $q_i \neq 0$, только если $b_i \geqslant 0$, $0 \geqslant a_i \geqslant -1$.

Было показано, что решение ассоциированной системы в этом случае единственно (помимо (0,0)), и получена точная формула вероятности вырождения $g(x,y) = Se^{-(\alpha x+\beta y)}$, где константа S легко вычисляется.

Заметим, что здесь «пожарное» управление является оптимальным. Кроме того, множество оптимальных управлений, приводящих к вероятности вырождения $g(x, y)$, определяемой этой формулой, достаточно богатое. Поэтому в таком случае можно ставить задачу о выборе конкретного оптимального управления, дающего экстремум новому функционалу.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.** Счетные цепи Маркова. — М.: Наука, 1987. — 398 с.
2. **Люстерник Л. А., Соболев В. И.** Элементы функционального анализа. — М: Наука, 1965. — 511 с.
3. **Рапопорт Э. О.** Об одной стохастической модели распределения неделимого ресурса // Тр. Сибирской конф. по прикладной и индустриальной математике. — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1997. — С. 197–206.
4. **Рапопорт Э. О.** Магистральные стратегии при распределении неделимого ресурса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 33–45.
5. **Рапопорт Э. О.** Об одной модели распределения неделимого ресурса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 55–73.
6. **Соколов Г. А., Чистякова Н. А.** Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова в экономике. — М.: Физматлит, 2005. — 248 с.
7. **Ширяев А.Н.** Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 574 с.
8. **Radner R., Rothschild M.** On the allocation of effort // J. Economic Theory. — 1975. — Vol. 10, N 3. — P. 358–376.
9. **Radner R.** A behavioral model of cost reduction // Bell J. Economics. — 1975. — Vol. 6, N 1. — P. 196–215.

Рапопорт Эрнест Ошерович,
e-mail: rapoport@math.nsc.ru

Статья поступила
16 июля 2008 г.
Переработанный вариант —
10 декабря 2008 г.