ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2009. Том 16, № 1. С. 80–92

УДК 519.87

О ЦИРКУЛЯРНЫХ СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСКАХ В ДВА ЦВЕТА

Д. Б. Хорошилова

Аннотация. Исследуются совершенные раскраски семейства бесконечных графов, называемых циркулярными. Показано, что каждая такая раскраска порождает совершенную раскраску n-мерной бесконечной решётки с теми же параметрами, что и у исходной раскраски. Предложена конструкция для построения совершенных раскрасок циркулярных графов в два цвета, и перечислены все параметры совершенных раскрасок, которые могут быть получены с помощью этой конструкции.

Ключевые слова: совершенная раскраска, циркулярный граф, равномерное разбиение.

Введение

Данная работа связана с исследованием совершенных раскрасок (определение совершенной раскраски см. ниже) графа n-мерной бесконечной решётки (т. е. графа минимальных расстояний на множестве $\mathbb{Z}^n$, или, коротко, графа $\mathbb{Z}^n$). К настоящему моменту в этой области имеются результаты для малых n. Для $n = 2$ М. А. Аксенович [9] полностью охарактеризовала все раскраски в два цвета, а С. А. Пузынина [4, 5] доказала, что для любой совершенной раскраски графа $\mathbb{Z}^2$ существует периодическая раскраска с теми же параметрами, и перечислила все допустимые параметры совершенных раскрасок этого графа в три цвета. Д. С. Кротов [12] перечислил все допустимые параметры совершенных раскрасок графа $\mathbb{Z}^2$ в число цветов, не превышающее девяти. Е. М. Ефремова и Е. А. Молодых [3] перечислили все допустимые матрицы раскрасок графа $\mathbb{Z}^3$ в два цвета. Однако в общем случае задача ещё далека от полного решения.

Определение 1. Раскраска вершин графа называется *совершенной*, если для любых двух вершин одного цвета цветовые составы их окружения совпадают. Более формально, раскраска вершин произвольного графа в цвета из множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ называется *совершенной*

с матрицей параметров $M = (m_{ij})$ размера $n \times n$, если число вершин цвета j, смежных с вершиной x цвета i, не зависит от выбора вершины x и равно m_{ij}.

Очевидно, что если существует совершенная раскраска графа G с матрицей параметров M и граф G — регулярный степени d, то выполняется равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} = d$.

Приведённое определение совершенной раскраски даётся для обыкновенного графа. В работе также используется понятие совершенной раскраски псевдографа (т. е. графа с кратными рёбрами и петлями).

Определение 2. Раскраска вершин произвольного псевдографа в цвета из множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется *совершенной с матрицей параметров* $M = (m_{ij})$ размера $n \times n$, если число рёбер, соединяющих вершину x цвета i с вершинами цвета j, не зависит от выбора вершины x и равно m_{ij}. При подсчёте числа рёбер петли учитываются, т. е. если вершине x цвета i инцидентна петля кратности k, то такая петля вносит вклад k в элемент m_{ii}.

Далее в тексте под раскраской графа (или псевдографа) всегда подразумевается раскраска его вершин.

1. Гомоморфизмы графов и их применение для построения совершенных раскрасок

Основным инструментом исследования совершенных раскрасок является понятие гомоморфизма.

Определение 3. *Гомоморфизмом* графа G_1 на граф G_2 называется сюръективное отображение $h : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$, взаимно однозначно переводящее единичную окрестность вершины в единичную окрестность её образа.

Утверждение 1. *Если существует гомоморфизм графа G_1 на граф G_2, то совершенная раскраска графа G_2 с матрицей параметров M порождает совершенную раскраску графа G_1 с той же матрицей параметров.*

Доказательство. Покрасим каждую вершину графа G_1 цветом, которым покрашен её образ в графе G_2. По определению гомоморфизма полученная раскраска графа G_1 совершенная с той же матрицей параметров, что и у исходной раскраски графа G_2.

Приведённое утверждение полезно тем, что оно даёт метод построения совершенных раскрасок исследуемого графа по известным совер-

шенным раскраскам других, обычно проще устроенных графов (являющихся гомоморфными образами исходного графа). Этот метод активно используется при изучении совершенных раскрасок n-мерной бесконечной решётки. Несложно строятся гомоморфизмы графа $\mathbb{Z}^n$ на прямое произведение простых циклов $C_{k_1} \times \ldots \times C_{k_n}$. Действительно, если отождествить вершины простого цикла C_{k_i} с элементами циклической группы Z_{k_i}, то отображение $h: \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}_{k_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{k_n}$, действующее по правилу $h(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \bmod k_1, \ldots, x_n \bmod k_n)$, будет требуемым гомоморфизмом. В частности, так строится гомоморфизм графа $\mathbb{Z}^n$ на граф C_4^n. Последний интересен тем, что он изоморфен $2n$-мерному булеву кубу. Соответствующий изоморфизм $\varphi : \mathbb{Z}_4^n \longleftrightarrow \{0,1\}^{2n}$ строится следующим образом: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (g(x_1) \ \ldots \ g(x_n))$, где $x_i \in \{0,1,2,3\}$, g — *отображение Грея*, действующее по правилу:

$$g: \ 0 \mapsto 00, \ 1 \mapsto 01, \ 2 \mapsto 11, \ 3 \mapsto 10.$$

Существование гомоморфизма графа $\mathbb{Z}^n$ на граф C_4^n позволяет получить представление о сложности задачи полной характеризации совершенных раскрасок графа n-мерной бесконечной решётки, так как совершенные раскраски гиперкуба исследовались ранее и для раскрасок в два цвета Д. Г. Фон-дер-Флаасс построил рекурсивные конструкции, дающие все известные матрицы параметров [6, 7]. Однако даже в случае двух цветов пока не перечислены все допустимые матрицы параметров совершенных раскрасок гиперкуба.

2. Циркулярные графы и их совершенные раскраски

Гомоморфными образами графа $\mathbb{Z}^n$ являются, помимо прочих, циркулярные графы с n дистанциями. В этой главе и далее речь будет идти об этих графах и их совершенных раскрасках.

Определение 4. *Бесконечным циркулярным графом с дистанциями* $d_1, \ldots, d_n$, $d_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, называется граф $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$, множество вершин которого совпадает с множеством элементов группы $\mathbb{Z}$, и для любой вершины v множество инцидентных ей рёбер имеет вид

$$\{\{v, v \pm d_i\} \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Далее везде считается, что дистанции упорядочены по возрастанию.

Рассмотрим гомоморфизм h графа $\mathbb{Z}^n$ на граф $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$, действующий по правилу:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot d_i.$$

Совершенную раскраску графа $\mathbb{Z}^n$, которая может быть порождена совершенной раскраской некоторого бесконечного циркулярного графа, и соответствующую ей матрицу параметров назовём *циркулярными*.

Приведём несколько фактов о совершенных раскрасках бесконечных циркулярных графов.

Утверждение 2. *Любая совершенная раскраска графа $C_\infty(d_1,\ldots, d_n)$ является периодической.*

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из того, что для известной матрицы раскраски сама раскраска однозначно восстанавливается по участку длины $2d_n$.

Заметим, что раскраска графа $G = (V, E)$ в цвета из множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ есть сюръективная функция $c : V \longrightarrow N$, следовательно, она является также раскраской любого другого графа G' с тем же множеством вершин V. При этом раскраска c может быть совершенной раскраской графа G, но не быть совершенной раскраской графа G'. В частности, раскраска элементов множества $\mathbb{Z}$ является раскраской любого циркулярного графа. Для графов с подходящими наборами дистанций эта раскраска может оказаться совершенной.

Очевидно, что верно следующее

Утверждение 3. *Если имеется совершенная раскраска графа $C_\infty(d_1,\ldots,d_n)$ с минимальной длиной периода t и матрицей параметров M, то для любого целого k такого, что $|d_i + k \cdot t|$ не принадлежит множеству $\{d_1,\ldots,d_n\}$, указанная раскраска является также совершенной раскраской графа $C_\infty(d_1,\ldots,|d_i + k \cdot t|,\ldots,d_n)$ с той же матрицей параметров.*

Определение 5. *Циркулярным графом длины t с дистанциями* $d_1,\ldots,d_n$ называется псевдограф $C_t(d_1,\ldots,d_n)$, множество вершин которого совпадает с множеством элементов группы $\mathbb{Z}_t$, и для любой вершины v мультимножество инцидентных ей рёбер имеет вид $\{\{v, v \pm d_i \bmod t\} \mid i = 1,\ldots,n\}$.

Очевидно, что любой совершенной раскраске графа $C_\infty(d_1,\ldots,d_n)$ с минимальной длиной периода t можно естественным образом поставить в соответствие совершенную раскраску графа $C_t(d_1,\ldots,d_n)$.

Замечание. Кратные рёбра и кратные петли в графе $C_t(d_1,\ldots,d_n)$ могут возникнуть, если некоторые из d_i больше чем $\lfloor t/2 \rfloor$. Поскольку $v+d_i = v \bmod t$ тогда и только тогда, когда $v-d_i = v \bmod t$, то кратность петли всегда чётна. Кроме того, если t чётно, то $v + d_i = v + t/2 \bmod t$ тогда и только тогда, когда $v - d_i = v + t/2 \bmod t$, следовательно, при

чётном t кратность рёбер вида $\{v, v+t/2\}$ также чётна.

Считая t фиксированным, определим для целых k величину

$$\langle k\rangle = \min\{k \bmod t, (t-k) \bmod t\}.$$

Целые числа разбиваются по значению $\langle k\rangle$ на $\lfloor t/2\rfloor + 1$ классов эквивалентности с представителями $0, 1, \ldots, \lfloor t/2\rfloor$.

Заметим, что если дан граф $C_t(d_1, \ldots, d_n)$, то $\langle d_i\rangle = \langle d_j\rangle$ тогда и только тогда, когда этим дистанциям в графе $C_t(d_1, \ldots, d_n)$ соответствуют рёбра, соединяющие одни и те же пары вершин. Указанному графу мы можем таким образом сопоставить вектор $(\kappa(0), \ldots, \kappa(\lfloor t/2\rfloor))$, где $\kappa(d)$ — кратность рёбер, соответствующих дистанции d, или, коротко, *кратность дистанции* d определяется по правилу:

$$\kappa(d) = \begin{cases} |\{d_i \mid i = 1, \ldots, n,\ \langle d_i\rangle = d\}|, & \text{если } 0 < d < t/2;\\ 2 \cdot |\{d_i \mid i = 1, \ldots, n,\ \langle d_i\rangle = d\}|, & \text{если } d = 0 \text{ или } d = t/2,\\ & t \text{ чётно.}\end{cases}$$

3. Раскраски в два цвета. Сплошные раскраски

Далее речь будет идти только о совершенных раскрасках бесконечных циркулярных графов в два цвета.

Утверждение 4. *Пусть дана совершенная раскраска графа* $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ *в два цвета с матрицей параметров* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *и пусть* ν_1 *и* ν_2 *— число вершин цвета* 1 *и* 2 *соответственно в периоде минимальной длины. Тогда* $\nu_1/\nu_2 = c/b$.

Доказательство. Очевидно, что минимальная длина периода данной совершенной раскраски равна $\nu_1+\nu_2$. Рассмотрим соответствующую совершенную раскраску графа $C_{\nu_1+\nu_2}(d_1, \ldots, d_n)$. Число рёбер этого графа, у которых один конец покрашен цветом 1, а другой — цветом 2, обозначим через E_{12}. Указанное число можно посчитать двумя способами: $E_{12} = b\nu_1 = c\nu_2$, откуда $\nu_1/\nu_2 = c/b$.

Определение 6. Раскраска графа $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ в два цвета называется *сплошной* (ν_1, ν_2)*-раскраской*, если она периодическая с минимальной длиной периода $\nu_1 + \nu_2$ и минимальный период с точностью до циклического сдвига имеет следующий вид: сначала подряд идут ν_1 вершин цвета 1, потом ν_2 вершин цвета 2. Далее везде считаем, что $\nu_1 \geqslant \nu_2$.

Определение 7. Раскраска графа $C_t(d_1, \ldots, d_n)$ в два цвета называется *сплошной* (ν_1, ν_2)*-раскраской*, если $t = \nu_1+\nu_2$ и существует вершина

v такая, что вершины $v, v+1, \ldots, v+\nu_1-1$ покрашены цветом 1, а остальные вершины — цветом 2.

Очевидно, что сплошная (ν_1, ν_2)-раскраска графа $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ является совершенной тогда и только тогда, когда сплошная (ν_1, ν_2)-раскраска графа $C_{\nu_1+\nu_2}(d_1, \ldots, d_n)$ является совершенной.

Легко понять, что верно

Утверждение 5. *Если сплошная (ν_1, ν_2)-раскраска графа $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ является совершенной с матрицей параметров M, то сплошная $(k \cdot \nu_1, k \cdot \nu_2)$-раскраска графа $C_\infty(k \cdot d_1, \ldots, k \cdot d_n)$ является совершенной с той же матрицей параметров для любого натурального k.*

Так как граф $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ является регулярным степени $2n$, матрица любой его совершенной раскраски в два цвета однозначно восстанавливается по тройке (b, c, n) по правилу: $M = \begin{pmatrix} 2n-b & b \\ c & 2n-c \end{pmatrix}$, где b и c — внешние степени первого и второго цветов соответственно. Тройка (b, c, n) называется *допустимой*, если для некоторого набора дистанций $d_1, \ldots, d_n$ существует совершенная раскраска графа $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ в два цвета с соответствующей матрицей параметров. Если в качестве такой совершенной раскраски можно выбрать сплошную (ν_1, ν_2)-раскраску для некоторых ν_1 и ν_2, то тройка (b, c, n) называется *S-допустимой*. В этом случае по утверждению 4 выполняется равенство $\nu_1/\nu_2 = c/b$.

Утверждение 6. *Если тройка (b, c, n) допустима (S-допустима), то тройки $(b, c, n+1)$ и (kb, kc, kn) также являются допустимыми (S-допустимыми).*

Доказательство. Действительно, пусть имеется совершенная раскраска вершин графа $C_\infty(d_1, \ldots, d_n)$ с параметрами (b, c, n) и минимальной длиной периода t. Тогда для любого l такого, что $l \cdot t > d_n$ (чтобы избежать совпадения дистанций), она является также совершенной раскраской вершин графа $C_\infty(d_1, \ldots, d_n, l \cdot t)$ с параметрами $(b, c, n+1)$ и совершенной раскраской вершин графа

$$C_\infty(d_1, \ldots, d_n, l \cdot t + d_1, \ldots, l \cdot t + d_n, \ldots, k \cdot l \cdot t + d_n)$$

с параметрами (kb, kc, kn). В случае, когда тройка (b, c, n) является S-допустимой, указанную раскраску можно выбрать сплошной.

В свете только что доказанного утверждения представляется важным научиться по данным b и c вычислять наименьшее n, для которого тройка (b, c, n) является S-допустимой, и наименьшее n, для которого названная тройка является допустимой.

Утверждение 7. *Если тройки (b_1, c_1, n_1) и (b_2, c_2, n_2) являются S-допустимыми и $c_1/b_1 = c_2/b_2$, то тройка $(b_1 + b_2, c_1 + c_2, n_1 + n_2)$ также является S-допустимой.*

Доказательство. Действительно, пусть сплошная (ν_1, ν_2)-раскраска вершин графа $C_\infty(d_1, \ldots, d_{n_1})$ совершенна с параметрами (b_1, c_1, n_1) и сплошная (μ_1, μ_2)-раскраска вершин графа $C_\infty(e_1, \ldots, e_{n_2})$ совершенна с параметрами (b_2, c_2, n_2). По утверждению 5 сплошная $(\mu_1 \cdot \nu_1, \mu_1 \cdot \nu_2)$ раскраска графа $C_\infty(\mu_1 \cdot d_1, \ldots, \mu_1 \cdot d_{n_1})$ и сплошная $(\nu_1 \cdot \mu_1, \nu_1 \cdot \mu_2)$ раскраска графа $C_\infty(\nu_1 \cdot e_1, \ldots, \nu_1 \cdot e_{n_2})$ совершенны. Кроме того, поскольку по условию $c_1/b_1 = c_2/b_2$, из утверждения 4 следует, что $\nu_1 \cdot \mu_2 = \nu_2 \cdot \mu_1$. С учётом вышесказанного нетрудно понять, что для любого достаточно большого l сплошная $(\mu_1 \cdot \nu_1, \mu_1 \cdot \nu_2)$-раскраска графа

$$C_\infty(\mu_1 \cdot d_1, \ldots, \mu_1 \cdot d_{n_1}, l \cdot \mu_1 \cdot (\nu_1 + \nu_2) + \nu_1 \cdot e_1, \ldots, l \cdot \mu_1 \cdot (\nu_1 + \nu_2) + \nu_1 \cdot e_{n_2})$$

является совершенной и имеет параметры $(b_1 + b_2, c_1 + c_2, n_1 + n_2)$.

4. Основная теорема

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Обозначим через (b, c) наибольший общий делитель чисел b и c. Тройка (b, c, n) является S-допустимой тогда и только тогда, когда $n \geqslant \lceil (b + c - (b, c))/2 \rceil$.*

Для удобства доказательства представим b и c в следующем виде: $b = lq,\ c = lp$, где $l = (b, c)$. В этом случае верны равенства:

$$\lceil (b + c - (b, c))/2 \rceil = l \cdot (p + q - 1)/2, \text{ если } p + q \text{ нечётно},$$
$$\lceil (b + c - (b, c))/2 \rceil = l \cdot (p + q)/2 - \lfloor l/2 \rfloor, \text{ если } p + q \text{ чётно}.$$

Для доказательства основной теоремы потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть p и q взаимно просты, l и m — произвольные целые неотрицательные числа. Тогда тройки следующих видов являются S-допустимыми:*

1) тройки $(lq, lp, l \cdot (p + q - 1)/2 + m)$ являются S-допустимыми при нечётных $p + q$,

2) тройки $(lq, lp, l \cdot (p + q)/2 - l/2 + m)$ являются S-допустимыми при чётных $p + q$ и чётных l,

3) тройки $(lq, lp, l \cdot (p + q)/2 - (l - 1)/2 + m)$ являются S-допустимыми при чётных $p + q$ и нечётных l.

Доказательство. Для доказательства достаточно построить примеры совершенных сплошных раскрасок с указанными b, c и n.

В силу утверждения 6 для доказательства S-допустимости троек вида 1 достаточно показать S-допустимость тройки $\left(q, p, \frac{p+q-1}{2}\right)$. Названные параметры реализуются сплошной (p,q)-раскраской в графе с набором дистанций $\left\{1, 2, \ldots, \frac{p+q-1}{2}\right\}$. Действительно, циркулярный граф длины $p+q$ с таким набором дистанций есть не что иное, как полный граф на $p+q$ вершинах. Покрасив p его вершин цветом 1, а оставшиеся q вершин — цветом 2, мы получим совершенную раскраску с матрицей параметров $\begin{pmatrix} p-1 & q \\ p & q-1 \end{pmatrix}$.

Из утверждения 6 следует, что достаточным условием S-допустимости троек вида 2 является S-допустимость тройки $(2q, 2p, p+q-1)$. Нетрудно понять, что сплошная (p,q)-раскраска в графе с дистанциями $\{1, 2, \ldots, p+q-1\}$ имеет параметры $(2q, 2p, p+q-1)$. Действительно, названный циркулярный граф изоморфен полному $(p+q)$-вершинному графу, в котором все рёбра взяты с кратностью два. Раскраска такого графа, в которой p вершин покрашены цветом 1, а оставшиеся q вершин — цветом 2, является совершенной с матрицей $\begin{pmatrix} 2p-2 & 2q \\ 2p & 2q-2 \end{pmatrix}$.

По утверждению 7 чтобы доказать, что все тройки вида 3 S-допустимы, достаточно показать S-допустимость троек

$$((l-1)q, (l-1)p, (l-1)(p+q)/2 - (l-1)/2 + m) \text{ и } (q, p, (p+q)/2).$$

Поскольку $(l-1)$ чётно, первая из этих двух троек имеет вид 2, и следовательно, является S-допустимой. Покажем S-допустимость тройки $(q, p, (p+q)/2)$, доказав, что сплошная $(2p, 2q)$-раскраска в графе с набором дистанций $\{1, 3, \ldots, p+q-1\}$ имеет названные параметры. Действительно, указанный циркулярный граф является полным двудольным графом, каждая доля которого образована вершинами одной чётности. Иначе говоря, каждая чётная вершина графа смежна со всеми его нечётными вершинами, а каждая нечётная — со всеми чётными. Поскольку раскраска циркулярного графа сплошная и как число белых, так и число чёрных вершин чётно, то в каждой доле графа содержится ровно по половине всех белых и чёрных вершин. Следовательно, описанная раскраска является совершенной с матрицей $\begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть сплошная* (ν_1, ν_2)*-раскраска графа* $C_t(d_1, \ldots, d_n)$, $t = \nu_1 + \nu_2$, *является совершенной. Тогда для любого целого* i *при* $\langle i \rangle \neq 0$

и $\langle i+\nu_2\rangle \neq 0$ *верно* $\kappa(\langle i+\nu_2\rangle) = \kappa(\langle i\rangle)$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что вершины $0, 1, \ldots, \nu_2 - 1$ графа $C_t(d_1, \ldots, d_n)$ покрашены цветом 2, а остальные вершины покрашены цветом 1, и пусть $u = t - \langle i\rangle$. Сравним цветовые составы окружения вершин u и $u-1$. Поскольку $\langle i\rangle \neq 0$, $\langle i+\nu_2\rangle \neq 0$, то верно $u \neq 0$, $u \neq \nu_2$, т. е. вершины u и $u-1$ покрашены одним цветом. Следовательно, по определению совершенной раскраски h вершины u и $u-1$ должны видеть одинаковое число вершин цвета 2. Есть только две дистанции, по которым вершины u и $u-1$ видят соседей разного цвета. По дистанции $\langle i\rangle$ вершина u видит с кратностью $\kappa(\langle i\rangle)$ вершину 0 цвета 2, а вершина $u-1$ — вершину $t-1$ цвета 1. Дистанция $\langle i+\nu_2\rangle$ кратности $\kappa(\langle i+\nu_2\rangle)$ соединяет вершину u с вершиной ν_2 цвета 1, а вершину $u-1$ — с вершиной $\nu_2 - 1$ цвета 2. Поскольку раскраска является совершенной, должно выполняться равенство $\kappa(\langle i+\nu_2\rangle) = \kappa(\langle i\rangle)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть сплошная* (ν_1, ν_2)*-раскраска графа* $C_t(d_1, \ldots, d_n)$, $t = \nu_1 + \nu_2$, *является совершенной, и пусть* $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ *(наибольший общий делитель* ν_1 *и* ν_2*). Тогда для любого целого* i *кратности всех дистанций из множества* $D_i = \{\langle i + k\cdot\nu\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0\}$ *в графе* $C_t(d_1, \ldots, d_n)$ *совпадают, множества* $\{0\}, D_0, \ldots, D_{\lfloor \nu/2\rfloor}$ *попарно не пересекаются и в объединении дают множество* $\{0, \ldots, \lfloor t/2\rfloor\}$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что для любого i кратность всех дистанций, лежащих в множестве $\{\langle i + k\cdot\nu_2\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0\}$, одинакова. Покажем, что указанное множество совпадает с множеством D_i. Поскольку ν — наибольший общий делитель ν_1 и ν_2 и $t = \nu_1 + \nu_2$, то ν является также наибольшим общим делителем ν_2 и t. Следовательно, существуют целые числа k_1 и k_2 такие, что $\nu = k_1\cdot\nu_2 + k_2\cdot t$. Отсюда $\langle i + k\cdot\nu\rangle = \langle i + kk_1\cdot\nu_2 + kk_2\cdot t\rangle$, что по определению операции $\langle\cdot\rangle$ равно $\langle i + kk_1\cdot\nu_2\rangle$. Таким образом, $D_i \subseteq \{\langle i + k\cdot\nu_2\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0\}$. С другой стороны, $\nu_2 = q\nu$ для некоторого q, поэтому $\langle i + k\cdot\nu_2\rangle = \langle i + kq\cdot\nu\rangle$, т. е. верно и обратное включение. Следовательно, множество D_i совпадает с множеством $\{\langle i + k\cdot\nu_2\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0\}$, все дистанции из которого имеют одинаковую кратность.

Теперь докажем, что множества $\{0\}, D_0, \ldots, D_{\lfloor \nu/2\rfloor}$ образуют разбиение множества $\{0, \ldots, \lfloor t/2\rfloor\}$. Поскольку t кратно ν, по определению операции $\langle\cdot\rangle$ имеем $D_i = \{k \mid k = \pm i \bmod \nu,\ \ 0 < k \leqslant \lfloor t/2\rfloor\}$. Из такого представления D_i с очевидностью следует, что множества $\{0\}, D_0, \ldots, D_{\lfloor \nu/2\rfloor}$ попарно не пересекаются и в объединении дают множество $\{0, \ldots, \lfloor t/2\rfloor\}$. Лемма 3 доказана.

Кратность дистанций, принадлежащих множеству D_i, будем в дальнейшем обозначать $\kappa(D_i)$. Также для удобства будем полагать $\kappa(D_{\nu/2})$ равным 0 для нечётных ν.

Лемма 4. *Пусть сплошная (ν_1, ν_2)-раскраска графа $C_t(d_1, \ldots, d_n)$, $t = \nu_1 + \nu_2$, является совершенной, $\nu_1 = p\nu$, $\nu_2 = q\nu$, где p и q взаимно просты. Пусть, как и прежде, $D_i = \{\langle i + k \cdot \nu\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0\}$. Тогда выполняются следующие ограничения на кратности дистанций*:

1) $\kappa(0)$ *чётно;*
2) *если $(p + q)$ чётно, то $\kappa(D_0)$ чётно;*
3) *если $(p + q)$ нечётно, то $\kappa(D_{\nu/2})$ чётно.*

Доказательство. Очевидно, что по определению $\kappa(0)$ чётно всегда. Кроме того, заметим, что если t чётно и $t/2 \in D_i$, то $\kappa(D_i) = \kappa(t/2)$ обязано быть чётным числом. Поскольку $t = (p + q)\nu$, верно либо $t/2 = 0 \bmod \nu$ (если $(p+q)$ чётно), либо $t/2 = (\nu/2) \bmod \nu$ (если $(p+q)$ нечётно, ν чётно). Следовательно, если $(p + q)$ чётно, то $t/2 \in D_0$, в противном случае при чётном ν верно $t/2 \in D_{\nu/2}$. Таким образом, $\kappa(D_0)$ чётно, если $p + q$ чётно, $\kappa(D_\nu/2)$ чётно, если $p + q$ нечётно. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $\nu_1 = p\nu$, $\nu_2 = q\nu$, где p и q взаимно просты, пусть $t = \nu_1 + \nu_2$, i — фиксированное число из множества $\{0, \ldots, \lfloor \nu/2 \rfloor\}$, $D_i = \{\langle i + k \cdot \nu\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\} \setminus \{0\}$, и пусть $\kappa(D_i)$ — целое неотрицательное число, удовлетворяющее условиям на чётность из формулировки леммы 4. Тогда сплошная (ν_1, ν_2)-раскраска циркулярного графа длины t с дистанциями из множества D_i, взятыми с кратностями $\kappa(D_i)$, является совершенной и её матрица параметров имеет вид*

$$M = \kappa(D_i) \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} p-1 & q \\ p & q-1 \end{pmatrix}, & \text{если } i = 0; \\ \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ 2p & 2q \end{pmatrix}, & \text{если } 0 < i < \nu/2; \\ \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}, & \text{если } i = \nu/2,\ \nu \text{ чётно.} \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку ν_1, ν_2 и t кратны ν, очевидно, что для любого целого i среди вершин из множества $\{i+k\cdot\nu \bmod t \mid k \in \mathbb{Z}\}$ будет p вершин цвета 1 и q вершин цвета 2. Рассмотрим произвольную вершину v графа, описанного в утверждении леммы. Её соседями по дистанциям из D_i будут вершины из множества

$$(\{v + i + k \cdot \nu \bmod t \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{v - i + k \cdot \nu \bmod t \mid k \in \mathbb{Z}\})/\{v\}.$$

Заметим, что множества $\{v+i+k\cdot\nu \bmod t \mid k\in\mathbb{Z}\}$ и $\{v-i+k\cdot\nu \bmod t \mid k\in\mathbb{Z}\}$ либо не пересекаются, либо совпадают, причём последнее верно тогда и только тогда, когда $i=0$ или $i=\nu/2$ (ν чётно). Следовательно, по дистанциям из множества D_0 каждая вершина цвета 1 смежна с $p-1$ вершиной цвета 1 и q вершинами цвета 2, а каждая вершина цвета 2 — с p вершинами цвета 1 и $q-1$ вершиной цвета 2; по дистанциям из множества D_i, $0<i<\nu/2$, каждая вершина смежна с $2p$ вершинами цвета 1 и $2q$ вершинами цвета 2; по дистанциям из $D_{\nu/2}$ (ν чётно) каждая вершина смежна с p вершинами цвета 1 и q вершинами цвета 2. Из вышесказанного очевидно следует, что сплошная (ν_1,ν_2)-раскраска циркулярного графа длины t с дистанциями из множества D_i, взятыми с кратностями $\kappa(D_i)$, является совершенной с матрицей параметров из утверждения леммы. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Любая S-допустимая тройка имеет либо вид* 1, *либо* 2:

1) $(lq, lp, l\cdot(p+q-1)/2+m)$, *где $p+q$ нечётно,*

2) $(lq, lp, l\cdot(p+q)/2-\lfloor l/2\rfloor+m)$, *где $p+q$ чётно, p и q взаимно просты, l и m — целые неотрицательные числа.*

Доказательство. Пусть дана совершенная сплошная (ν_1,ν_2)-раскраска графа $C_t(d_1,\ldots,d_n)$, $t=\nu_1+\nu_2$, $\nu_1=p\nu$, $\nu_2=q\nu$, где p и q взаимно просты. Покажем, что тройка параметров этой раскраски имеет либо вид 1, либо 2 из утверждения леммы. Зная для графа $C_t(d_1,\ldots,d_n)$ вектор кратностей его дистанций $(\kappa(0),\ldots,\kappa(\lfloor t/2\rfloor))$ и пользуясь леммами 3 и 5, мы можем записать матрицу параметров рассматриваемой раскраски:

$$M=\kappa(0)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\kappa(D_0)\cdot\begin{pmatrix}p-1&q\\p&q-1\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{\nu-1}{2}\rfloor}\kappa(D_i)\cdot\begin{pmatrix}2p&2q\\2p&2q\end{pmatrix}+\kappa(D_\nu/2)\cdot\begin{pmatrix}p&q\\p&q\end{pmatrix}.$$

Напомним, что $\kappa(D_\nu/2)=0$ для нечётных ν. Тогда

$$M=k_0\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+k_1\cdot\begin{pmatrix}p-1&q\\p&q-1\end{pmatrix}+k_2\cdot\begin{pmatrix}p&q\\p&q\end{pmatrix},$$

где k_0, k_1, k_2 — целые неотрицательные, k_0 чётно, k_1 чётно, если $p+q$ чётное, k_2 чётно, если $p+q$ нечётное. Легко видеть, что в зависимости от чётности $p+q$ тройки параметров всех трёх слагаемых имеют вид 1 или 2. Также очевидно, что сумма матриц с тройками параметров вида 1 или 2 имеет тройку параметров вида 1 или 2. Лемма 6 доказана.

Утверждение теоремы 1 следует из леммы 1 и леммы 6.

Следствие 1. *Наименьшее n, для которого тройка (b, c, n) является S-допустимой, вычисляется по правилу $n(b, c) = \lceil (b + c - (b, c))/2 \rceil$.*

5. Заключение

Следует отметить, что семейство сплошных циркулярных раскрасок, исследованию которого посвящена данная работа, является достаточно богатым. Действительно, на данный момент не известно ни одного примера допустимой, но не S-допустимой тройки. Также нет ни одного набора параметров, для которого доказано, что он реализуется в $\mathbb{Z}^n$, но не является циркулярным. Наименьшая «загадочная» тройка параметров — это $(3, 5, 3)$. Нециркулярная раскраска $\mathbb{Z}^3$ с такими параметрами существует (она порождается соответствующей раскраской 6-мерного двоичного куба); $n(3, 5) = \left\lceil \frac{3+5-1}{2} \right\rceil = 4 > 3$, следовательно, тройка $(3, 5, 3)$ не является S-допустимой. Однако вопрос о существовании несплошной циркулярной раскраски с параметрами $(3, 5, 3)$ остаётся открытым.

Для дальнейшего исследования циркулярных совершенных раскрасок представляется важным доказать или опровергнуть следующие утверждения.

(i) Любая допустимая тройка S-допустима.

(ii) Для любой совершенной раскраски $\mathbb{Z}^n$ в два цвета существует циркулярная совершенная раскраска с той же матрицей параметров.

Кроме того, практически не изучены циркулярные совершенные раскраски в три и более цветов, в частности, неизвестно, можно ли в этом случае говорить о каком-либо аналоге сплошной раскраски. Также представляется интересным исследовать совершенные раскраски графов Кэли группы $\mathbb{Z}^n$, частным случаем которых являются бесконечные циркулярные графы.

Автор выражает благодарность научному руководителю С. В. Августиновичу за постановку задачи, внимание к работе и полезные обсуждения, а также С. А. Пузыниной и Д. С. Кротову за помощь в написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э.** Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 3. — С. 3–16.
2. **Визинг В. Г.** Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 3–12.

3. **Ефремова Е. М., Молодых Е. А.** Параметры совершенных раскрасок бесконечной кубической решётки в два цвета // Доклад на семинаре «Теория кодирования», ИМ СО РАН, 2003.
4. **Пузынина С. А.** Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2004. — Т. 11, № 1. — С. 79–92.
5. **Пузынина С. А.** Совершенные раскраски вершин графа $G(\mathbb{Z}^2)$ в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 37–54.
6. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 292—295.
7. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 924—931.
8. **Харари Ф.** Теория графов. — М: Мир, 1973. — 299 с.
9. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Maths. — 2003. — V. 268, N 1–3. — P. 31–49.
10. **Agustini E., Costa S. I. R., Muniz M., Palazzo R.** Graphs, tesselations, and perfect codes on flat tori // IEEE Transactions on Information Theory. — 2004. — V. 50, N. 10. — P. 2363–2377.
11. **Godsil C.** Equitable partitions // Combinatorics. Paul Erdös is Eighty. Keszthely (Hungary). — 1993. — V. 1. — P. 173–192.
12. **Krotov D. S.** Perfect 9-colorings of $\mathbb{Z}^2$ // ArXiv.org, to appear.

Хорошилова Дарья Борисовна,
e-mail: dkhor@ngs.ru

Статья поступила
16 сентября 2008 г.
Переработанный вариант —
17 ноября 2008 г.