ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2009. Том 16, № 2. С. 16–20

УДК 519.172.2

ПОЧТИ ПРАВИЛЬНЫЕ 2-РАСКРАСКИ ВЕРШИН РАЗРЕЖЕННЫХ ГРАФОВ*)

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Граф G называется $(2,1)$-*раскрашиваемым*, если множество его вершин можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 так, что в $G[V_1]$ любая компонента содержит не более двух вершин, а в $G[V_2]$ нет рёбер. Доказано, что любой граф G с максимальной средней степенью $\mathrm{mad}(G)$ меньшей $7/3$ является $(2,1)$-раскрашиваемым. Отсюда следует, что каждый плоский граф с обхватом не менее 14 является $(2,1)$-раскрашиваемым. Построен плоский граф G_n с $\mathrm{mad}(G_n) = (18n-2)/(7n-1)$, не являющийся $(2,1)$-раскрашиваемым.

Ключевые слова: планарный граф, обхват, раскраска, разбиение.

Введение

Граф G называется $(2,1)$-*раскрашиваемым*, если множество его вершин можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 так, что в $G[V_1]$ любая компонента содержит не более двух вершин, а в $G[V_2]$ нет рёбер.

Через $g(G)$ обозначим обхват графа G (длину кратчайшего цикла в G), и пусть $\mathrm{mad}(G)$ — максимальная средняя степень по подграфам графа G. Через $\delta(G)$ обозначим минимальную степень G.

А. Н. Глебов и Д. Ж. Замбалаева [2] доказали, что каждый плоский граф G является $(2,1)$-раскрашиваемым, если $g(G) \geqslant 16$. Целью данной заметки является распространение этого результата на не обязательно планарные разреженные графы следующим образом.

Теорема 1. *Любой граф G является $(2,1)$-раскрашиваемым, если $\mathrm{mad}(G) < \frac{7}{3}$.*

*)Исследование первого и второго авторов выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06–01–00694 и 08–01–00673), кроме того, исследование второго автора ещё при поддержке гранта президента России для молодых учёных МК–2302.2008.1.

Известно, что для любого планарного графа G справедливо неравенство

$$\mathrm{mad}(G) < \frac{2g(G)}{g(G)-2}.$$

Следствие 1. *Любой планарный граф G обхвата $g(G) \geqslant 14$ является $(2,1)$-раскрашиваемым.*

Приведём конструкцию плоского $(2,1)$-раскрашиваемого графа G_n такого, что $\mathrm{mad}(G_n) = (18n-2)/(7n-1)$ и $g(G_n) = 4$. Возьмём цикл $C_{2n-1} = b_1 b_2 \dots b_{2n-1}$. К каждой из n его вершин с нечётным номером i присоединим пять вершин и семь рёбер: (b_i, a_i), (b_i, c_i), (a_i, y_i), (x_i, y_i), (z_i, y_i), (x_i, c_i) и (z_i, c_i).

Предположим, что G_n имеет $(2,1)$-раскраску цветами 0 и 1 такую, что вершины цвета 0 попарно не смежны, а каждая вершина цвета 1 смежна не более одной вершине цвета 1. Тогда найдутся две последовательные вершины цикла C_{2n-1}, окрашенные в цвет 1. Хотя бы одна из этих двух вершин имеет нечётный индекс, пусть i. Доказывать нечего, если хотя бы одна из вершин a_i, c_i окрашена в 1. Но если обе они окрашены в 0, то все вершины x_i, y_i и z_i вынуждены быть окрашены в 1, противоречие.

Ключевыми в доказательстве теоремы 1 являются понятия мягкой компоненты и зоны питания. Эти понятия развивают идею мягкого цикла и цепи питания, введённых О. В. Бородиным, А. О. Ивановой и А. В. Косточкой в [1] и использованных в [1, 3] для улучшения результатов из [4, 5] о гомоморфизмах разреженных графов на циркулянт $C(5;1,2)$ и цикл C_5. Новая особенность перераспределения зарядов в [1, 3] заключается в том, что заряды могут передаваться по так называемым цепям питания на неограниченно большие расстояния, тогда как почти во всех предшествующих работах по строению и раскраскам плоских графов перераспределение зарядов носило локальный характер.

1. Доказательство теоремы 1

Пусть G — минимальный контрпример к теореме 1. Очевидно, G связный и $\delta(G) \geqslant 2$. По определению мы можем записать

$$\sum_{v \in V} (6d(v) - 14) < 0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v.

Положим *заряд* $\mu(v)$ каждой вершины v графа G равным $6d(v) - 14$. Поскольку $\delta(G) \geqslant 2$, только 2-вершины в G имеют отрицательный заряд.

Опишем несколько структурных свойств графа G, опираясь на которые, перераспределим заряды вершин так, чтобы их новые заряды μ^* стали неотрицательными. Поскольку сумма зарядов вершин при перераспределении сохраняется, получим противоречие с (1), что и завершит доказательство теоремы 1.

Под *k-цепью* далее будем понимать цепь, состоящую из в точности k вершин степени 2, а под *$(k_1, k_2, \ldots)$-вершиной* — вершину, инцидентную k_1-, k_2-, … цепям.

Лемма 1. *В G нет 2-вершин, смежных двум 2-вершинам.*

Доказательство. Можем считать, что $G \neq C_3$. Удалим 2-вершину v_2, смежную с 2-вершинами v_1, v_3. В силу минимальности G полученный граф может быть раскрашен цветами 0 и 1 так, что окрашенные в 0 вершины являются независимыми, а окрашенные в 1 индуцируют подграф степени не более 1. Чтобы продолжить эту раскраску на весь G, сначала перекрасим v_1 и v_3 в цвета, отличные от цветов их окрашенных соседей. Затем покрасим v_2 в 0, если и только если $c(v_1) = c(v_3) = 1$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В G нет $(2, 2, 2)$-вершин.*

Доказательство. Удалим такую вершину v и все 2-вершины инцидентных ей 2-цепей. Чтобы продолжить раскраску c полученного графа на удалённые вершины, положим $c(v) = 0$, всех соседей v покрасим в 1, а 2-вершины, смежные с ними, — в цвета, отличные от цветов их не удаляемых соседей. Лемма 2 доказана.

Под *зоной питания FA* понимаем максимальный (по включению) подграф, состоящий из (2,2,1)-, (2,1,1)- и (1,1,1)-вершин (называемых *мягкими вершинами*), взаимно достижимых друг из друга по 1-цепям, а также таких 2-вершин, которые смежны только с вершинами из FA. По определению множество мягких 3-вершин графа G разбивается на независимые зоны питания.

Под *мягкой компонентой* понимаем такую зону питания FA, что все рёбра из FA в $G \setminus FA$ ведут в 2-цепи.

Лемма 3. *В G нет мягких компонент.*

Доказательство. Пусть FA — мягкая компонента. (Не исключено, что $FA = G$.) Возьмём сначала раскраску c подграфа $G \setminus FA$. Для каждой 2-цепи $wxyz$ такой, что $w \in FA$ и $z \notin FA$, перекрасим y, полагая $c(y) \neq c(z)$. Затем покрасим каждую 3-вершину из FA в 0. Наконец, можем легко раскрасить все 2-вершины, смежные с 3-вершинами из FA,

для получения желаемой раскраски всего G. Лемма 3 доказана.

Под *жёсткой вершиной* понимаем 3-вершину, инцидентную хотя бы одной 0-цепи.

Следствие 2. *Для каждой зоны питания FA графа G существует 1-цепь xyz такая, что $x \in FA$ и $z \notin FA$, где либо вершина z жёсткая, либо $d(z) \geqslant 4$.*

Лемма 4. *Пусть n_{221} — число $(2,2,1)$-вершин в зоне питания FA, n_{111} — число $(1,1,1)$-вершин в FA, а b — число 1-цепей, ведущих из FA в жёсткие или $\geqslant 4$-вершины. Тогда $n_{221} \leqslant n_{111} + b$.*

Доказательство. Если в FA есть цикл из (1,1,1)-вершин, то заменим одну из его 1-цепей на 2-цепь. Заметим, что связность по 1-цепям не нарушается и статус (тип) всех вершин при этом сохраняется, как и при всех последующих преобразованиях. Тем самым получим зону питания на том же множестве вершин, но имеющую меньше (1,1,1)-вершин.

Если в FA имеется 2-цепь, соединяющая две вершины u, w из FA, то заменим её на две 2-цепи, одна из которых инцидентна в FA лишь с u, а другая — лишь с w. В результате построим другую зону питания на том же множестве вершин, что и FA.

Далее заменим каждую (2,1,1)-вершину v из FA, имеющую жёсткую или $\geqslant 4$-вершину концом своей 2-цепи, а вершины u, w — концами своих 1-цепей, на 1-цепь с концами u, w. Эта операция не изменяет чисел n_{221}, n_{111} и b. Она может создать цикл из (1,1,1)-вершин, но уменьшает число (2,1,1)-вершин в FA.

Будем повторять перечисленные операции до тех пор, пока все (2,1,1)-вершины, внутренние 2-цепи и циклы из (1,1,1)-вершин не исчезнут. Заметим, что в результате число 3-вершин в FA не увеличится, т. е. процесс преобразования FA конечен.

Итак, мы преобразовали FA к подразбиению кубического дерева, в котором 3-вершины соединяются между собой 1-цепями, причём на каждом шаге могли только усугубить соотношение $n_{221} \leqslant n_{111} + b$. Таким образом, доказываемое утверждение свелось к тому очевидному факту, что в подразбиении любого кубического дерева висячих вершин на две больше, чем 3-вершин. Лемма 4 доказана.

Перераспределим заряды по следующим правилам.

R1. Каждая 2-вершина, принадлежащая 1-цепи, получает заряд 1 от её концов, а каждая 2-вершина, принадлежащая 2-цепи, получает заряд 2 от своих $\geqslant 3$-соседей.

R2. Каждая (2,2,1)-вершина получает заряд 1 от своей зоны питания,

а каждая зона питания получает заряд 1 от каждой своей (1,1,1)-вершины и вдоль каждой 1-цепи, ведущей в жёсткую или $\geqslant 4$-вершину.

Проверим, что после применения правил R1–R2 заряды всех вершин становятся неотрицательными. Действительно, все 2-вершины имеют заряд 0 согласно правилу R1 и благодаря лемме 1.

По лемме 4 после применения правил R1–R2 суммарный заряд каждой зоны питания, а также всех жёстких вершин графа G неотрицателен.

Пусть теперь $d(v) \geqslant 4$. Так как v отдаёт заряд не более 2 вдоль каждого инцидентного ей ребра по правилам R1–R2, то

$$\mu^*(v) \geqslant 6d(v) - 14 - 2d(v) = 4d(v) - 14 > 0.$$

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В., Иванова А. О., Косточка А. В.** Ориентированная 5-раскраска вершин в разреженных графах // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 16–32.
2. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Путевые разбиения планарных графов // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — Т. 4. — С. 450–459. (http://semr.math.nsc.ru)
3. **Borodin O. V., Hartke S. G., Ivanova A. O., Kostochka A. V., West D. B.** $(5, 2)$-Coloring of sparse graphs // Сиб. электрон. мат. изв. — 2008. — Т. 5. — С. 417–426. (http://semr.math.nsc.ru)
4. **Borodin O. V., Kim S. J., Kostochka A. V., West D. B.** Homomorphisms of sparse graphs with large girth // J. Combin. Theory. Ser. B. — 2004. — Vol. 90. — P. 147–159.
5. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Nesetril J., Raspaud A., Sopena E.** On the maximal average degree and the oriented chromatic number of a graph // Discrete Math. — 1999. — Vol. 206. — P. 77–89.

Бородин Олег Вениаминович,
e-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна,
e-mail: shmgnanna@mail.ru

Статья поступила
9 февраля 2008 г.