ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2009. Том 16, № 2. С. 61–73

УДК 519.172, 519.176

О ЧИСЛЕ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ В ДЕРЕВЬЯХ ФИКСИРОВАННОГО ДИАМЕТРА*)

А. Б. Дайняк

Аннотация. Получены нижние оценки числа независимых множеств в деревьях диаметра 6, 7, 8, 9 и дана характеристика экстремальных деревьев произвольного диаметра.

Ключевые слова: дерево, диаметр, независимое множество, нижние оценки.

Введение

Подмножество вершин графа называется *независимым*, если никакие две вершины из этого подмножества не смежны. Обозначим через $i(G)$ число независимых множеств в графе G, а через $n(G)$ — число вершин в G. Величину $c(G) = (i(G))^{1/n(G)}$ будем называть *ёмкостью* графа G. Через $V(G)$, $E(G)$ соответственно обозначим множества вершин и рёбер графа G; ∂v — множество всех вершин, смежных с v; $G \setminus S$ — подграф графа G, порождённый множеством вершин $V(G) \setminus S$; F_T — лес, полученный удалением всех центральных вершин из дерева T. Будем писать $G' \simeq G''$, если графы G' и G'' изоморфны. *Длиной* цепи называется число рёбер в ней, *диаметром* дерева T — наибольшая длина $\mathrm{diam}(T)$ цепи в дереве T. Пусть d, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $d < n$. Любое n-вершинное дерево диаметра d, имеющее минимальное (максимальное) число независимых множеств среди всех деревьев с данным числом вершин и диаметром, будем называть (n,d)-*минимальным* ((n,d)-*максимальным*).

В [3] получена верхняя оценка числа независимых множеств в деревьях с заданными числом вершин и диаметром, при этом полностью описаны (n,d)-максимальные деревья. В той же статье поставлена задача получения нижних оценок и описания структуры (n,d)-минимальных деревьев. В [2] получены нижние оценки числа независимых множеств в n-вершинных деревьях диаметра d при $d \leqslant 5$. Структура (n,d)-минимальных деревьев описана полностью при $d \leqslant 4$ для всех n (см. теорему 3), а при $d = 5$ — для всех достаточно больших n.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–01–00444).

Цель данной статьи — получить нижние оценки числа независимых множеств в деревьях диаметра d при $6 \leqslant d \leqslant 9$ (теоремы 4, 5), а также дать описание структуры (n,d)-минимальных деревьев при произвольном d (теорема 2). Мы сводим проблему описания конкретного вида компонент леса F_T для (n,d)-минимальных деревьев T к поиску деревьев диаметра d, имеющих минимальную ёмкость. При этом в общем случае вид таких деревьев неизвестен. Отметим, что вопрос, аналогичный рассматриваемому в данной статье, но касающийся числа *максимальных по включению* независимых множеств (м. н. м.) в деревьях фиксированного диаметра, полностью решён в [1]: приведены достижимые верхние и нижние оценки числа м. н. м. в деревьях с заданным числом вершин и диаметром и описаны все деревья, на которых эти оценки достигаются.

Пусть последовательность ψ_n задана рекуррентным соотношением $\psi_n = \psi_{n-2} + \psi_{n-3}$ и начальными условиями $\psi_0 = \psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$. Справедлива

Теорема 1 [1]. *Для любого n-вершинного дерева T диаметра d, $d \geqslant 8$, $n \geqslant d+3$, число $i_M(T)$ м. н. м. в T удовлетворяет неравенствам*

$$\psi_{d+1} \leqslant i_M(T) \leqslant M(n,d),$$

где

$$M(n,d) = \begin{cases} \psi_{d-1} + (2^{(n-d+1)/2} - 1)\psi_{d-2} & \text{при } n-d = 2k+1, \\ 2^{(n-d)/2}\psi_{d-1} & \text{при } n-d = 2k. \end{cases}$$

Введём еще несколько определений и обозначений. Пусть T — произвольное дерево, а T' — его поддерево. Пусть $v \in V(T) \setminus V(T')$, $u \in V(T')$. Будем говорить, что дерево T' *примыкает* вершиной u к вершине v в T, если $\{u,v\} \in E(T)$ и дерево T' является компонентой связности леса, получающегося из T удалением вершины v и инцидентных ей рёбер. Например, можно сказать, что в любой цепи чётного диаметра $2d$ к центральной вершине примыкают своими концевыми вершинами две цепи диаметра $d-1$.

В дальнейшем без особых пояснений используется тот факт, что для произвольного графа G и любой вершины $v \in V(G)$ выполнено соотношение

$$i(G) = i(G \setminus \{v\}) + i(G \setminus (\{v\} \cup \partial v)).$$

Через $T_{p,q,r}$ обозначим такое корневое дерево, что к корню v в нём примыкают ровно p, q и r цепей, содержащих три, две и одну вершину

соответственно, причём трёхвершинные цепи примыкают к v своими центральными вершинами. Мы пишем $T_{p,q}$ вместо $T_{p,q,0}$. Легко проверить, что $n(T_{p,q,r}) = 3p + 2q + r + 1$ и $i(T_{p,q,r}) = 5^p 3^q 2^r + 4^p 2^q$. Через P_t обозначим t-вершиную цепь с выделенным корнем; при $t \in \{4, 5\}$ корнем будем считать центральную вершину, а при $t \in \{1, 2, 3\}$ — концевую. Через φ_n обозначим $(n + 2)$-е число Фибоначчи ($\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = 2$, $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$ при $n \geqslant 2$). *Объединением графов* G_1 и G_2 называется граф G такой, что $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Далее подразумевается, что множества вершин графов, входящих в объединение, не пересекаются.

1. Структура (n, d)-минимальных деревьев

Для натурального d определим величину

$$\widehat{c}(d) = \inf_{\substack{T \text{ — дерево,} \\ \operatorname{diam}(T)=d}} c(T). \tag{1}$$

Лемма 1. *Для любых графов G_1, G_2 справедливо неравенство*

$$c(G_1 \cup G_2) \geqslant \min\{c(G_1),\, c(G_2)\}.$$

Доказательство. Воспользуемся элементарным неравенством, верным для любых положительных чисел a, b, c, d:

$$(ab)^{1/(c+d)} \geqslant \min\{a^{1/c},\, b^{1/d}\}.$$

Имеем

$$c(G_1 \cup G_2) = (i(G_1 \cup G_2))^{1/n(G_1 \cup G_2)} = (i(G_1) i(G_2))^{1/(n(G_1)+n(G_2))}.$$

Осталось применить указанное неравенство, положив

$$a = i(G'), \quad b = i(G''), \quad c = n(G'), \quad d = n(G'').$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть T — дерево диаметра d. Тогда если d чётно (нечётно), то любое дерево в лесе F_T имеет диаметр не больше $d - 2$ $(d - 3)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай чётного d, рассуждение в случае нечётного d аналогично. Пусть T — дерево диаметра d, и пусть v — центр в T. Пусть $u_1 \dots u_{d/2} v w_1 \dots w_{d/2}$ — диаметральная цепь в T. Допустим, в F_T есть компонента связности T' диаметра d', $d' > d - 2$. Без

ограничения общности можно считать, что $V(T') \cap \{u_1, \ldots, u_{d/2}\} = \varnothing$. Пусть s — вершина T', смежная с v в T. Если s' и s'' — концы какой-либо диаметральной цепи в T', то одна из цепей $s' \ldots s$ и $s'' \ldots s$ содержит не меньше $\lfloor (d'+1)/2 \rfloor \geqslant d/2$ рёбер. Пусть это $s' \ldots s$, тогда цепь $u_1 \ldots u_{d/2} v s \ldots s'$ в T содержит не меньше $d+1$ рёбер — противоречие с тем, что $\operatorname{diam}(T) = d$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любых n, d таких, что $2 \leqslant d < n$, и любого n-вершинного дерева T диаметра d справедливо неравенство*

$$i(T) > \begin{cases} (\min\limits_{m \leqslant d-2} \widehat{c}(m))^{n-1}, & \text{\textit{если} } d \text{ \textit{чётно},} \\ (\min\limits_{m \leqslant d-3} \widehat{c}(m))^{n-2}, & \text{\textit{если} } d \text{ \textit{нечётно.}} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть T — n-вершинное дерево чётного диаметра d. Пусть v — центр в T. По лемме 2 каждое дерево из леса F_T имеет диаметр не больше $d-2$. Тогда с учётом леммы 1 имеем

$$i(T) > i(F_T) = (c(F_T))^{n-1} \geqslant (\min_{m \leqslant d-2} \widehat{c}(m))^{n-1}.$$

Случай нечётного d рассматривается аналогично. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть d — чётное число, и пусть найдётся дерево T диаметра d или $d-1$ такое, что $c(T) = \min\limits_{m \leqslant d} \widehat{c}(m)$.*

1. *Найдётся дерево $\widehat{T}'$ диаметра $d+2$, для которого $c(\widehat{T}') < c(T)$. Кроме того, найдутся такие числа $N' \in \mathbb{N}$ и $\theta' \in \mathbb{R}$, $\theta' > 1$, что для любого дерева T' диаметра $d+2$ с числом вершин, превосходящим N', выполнено неравенство $c(T') > \theta' \cdot \widehat{c}(d+2)$.*

2. *Найдётся дерево $\widehat{T}''$ диаметра $d+3$, для которого $c(\widehat{T}'') < c(T)$. Кроме того, найдутся такие числа $N'' \in \mathbb{N}$ и $\theta'' \in \mathbb{R}$, $\theta'' > 1$, что для любого дерева T'' диаметра $d+3$ с числом вершин, превосходящим N'', выполнено неравенство $c(T') > \theta'' \cdot \widehat{c}(d+3)$.*

Доказательство. Пусть T — дерево из условия леммы, $n(T) = n$, $i(T) = i$. Пусть u — центральная вершина в T. Будем считать её корневой вершиной T. Положим $i_0 = i(T \setminus \{u\})$. Пусть $k \geqslant 2$, $T_1, \ldots, T_k$ — копии дерева T, и пусть $v \notin \bigcup\limits_j V(T_j)$. Соединив корни деревьев $T_1, \ldots, T_k$ с вершиной v, получим дерево $\widehat{T}'$, имеющее диаметр $d+2$. Можно проверить, что при $k > \log_{i_0/i} \left(i^{1/n} - 1\right)$ выполнено неравенство $c(\widehat{T}') < c(T)$.

Рассмотрим произвольное n'-вершинное дерево T' диаметра $d+2$. По лемме 3 выполнено неравенство $c(T') > i^{(n'-1)/n}$. Следовательно,

$c(T') > i^{(n'-1)/(n'n)}$. Положим $\varepsilon = \frac{c(T)-c(\widehat{T}')}{2c(T)}$. Так как $i^{(n'-1)/(n'n)} \to c(T)$ при $n' \to \infty$, найдётся такое N', что при $n' > N'$ выполнены неравенства $c(T') > i^{(n'-1)/(n'n)} \geqslant (1-\varepsilon)c(T) = \theta' c(\widehat{T}') \geqslant \theta' \widehat{c}(d+2)$, где $\theta' = \frac{c(\widehat{T}')+c(T)}{2c(\widehat{T}')} > 1$.

Аналогично доказывается вторая часть леммы, касающаяся деревьев диаметра $d+3$. Лемма 4 доказана.

Индукцией по d (базис $d = 0$) с использованием леммы 4 доказывается

Лемма 5. *Нижняя грань в правой части (1) достигается на конечном множестве деревьев $\mathcal{M}_d$. Для любого d существует такая константа $\theta_d > 1$, что для любого дерева T диаметра d, не изоморфного ни одному из деревьев в $\mathcal{M}_d$, выполнено неравенство $c(T) \geqslant \theta_d \widehat{c}(d)$. Для любого чётного d минимум величины $\widehat{c}_m$ по множеству $\{m \mid m \leqslant d\}$ достигается на подмножестве $\{d-1, d\}$.*

Следствие 1. *Для каждого фиксированного d оценка, даваемая леммой 3, асимптотически достижима на некоторой бесконечной последовательности значений n и оптимальна по порядку при всех n.*

Доказательство. Пусть d чётно. По лемме 5 найдётся дерево T' диаметра $d-2$ или $d-3$ такое, что $c(T') = \min\limits_{m \leqslant d-2} \widehat{c}(m)$. Пусть u — центральная вершина в T'. Положим $n_0 = n(T')$. Для каждого n, $n > 2n_0$, рассмотрим n-вершинное дерево T_n диаметра d такое, что к центральной вершине в нём примыкают $\lfloor (n-1)/n_0 \rfloor$ копий дерева T' своими центрами, а также $(n-1-n_0 \cdot \lfloor (n-1)/n_0 \rfloor)$ листьев. Для T_n имеем

$$i(T_n) = 2^{n-1-n_0 \cdot \lfloor (n-1)/n_0 \rfloor} \cdot (i(T'))^{\lfloor (n-1)/n_0 \rfloor} + (i(T' \setminus \{u\}))^{\lfloor (n-1)/n_0 \rfloor}.$$

Отсюда следует, что $i(T_n) = \Theta\left((c(T'))^{n-1}\right)$ при всех n и $i(T_n) \sim (c(T'))^{n-1}$ при $n = kn_0 + 1$, $k \to \infty$. В случае нечётного d строятся аналогичные последовательности деревьев. Отличие состоит лишь в том, что при нечётных d деревья T_n имеют две центральные вершины и число копий дерева T' (листьев), примыкающих к одному из центров, отличается от числа копий дерева T' (листьев), примыкающих к другому центру, не более чем на единицу. Следствие 1 доказано.

Лемма 6. *Пусть в дереве T к вершине v примыкают деревья $T_1, \ldots, T_k$ вершинами $v_1, \ldots, v_k$ соответственно. Пусть деревья $\widehat{T}_1, \ldots, \widehat{T}_m$ и вершины $u_1, \ldots, u_m$ таковы, что $u_i \in V(\widehat{T}_i)$, $V(T) \cap \bigcup\limits_i V(\widehat{T}_i) = \varnothing$, и $V(\widehat{T}_i) \cap V(\widehat{T}_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Пусть $\widehat{T}$ — дерево, полученное из T удале-*

нием поддеревьев $T_1, \ldots, T_s$ *и добавлением поддеревьев* $\widehat{T}_1, \ldots, \widehat{T}_m$ *так, что в* $\widehat{T}$ *деревья* $\widehat{T}_1, \ldots, \widehat{T}_m$ *примыкают к* v *вершинами* $u_1, \ldots, u_m$ *соответственно. Пусть выполнено неравенство* $i(\widehat{T}_1)\cdot\ldots\cdot i(\widehat{T}_m) < i(T_1)\cdot\ldots\cdot i(T_s)$.

1. *Если*

$$i(\widehat{T}_1 \setminus \{u_1\}) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m \setminus \{u_m\}) - i(T_1 \setminus \{v_1\}) \cdot \ldots \cdot i(T_s \setminus \{v_s\}) \\ < i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m),$$

то $i(\widehat{T}) < i(T)$.

2. *Если*

$$i(\widehat{T}_1 \setminus \{u_1\}) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m \setminus \{u_m\}) - i(T_1 \setminus \{v_1\}) \cdot \ldots \cdot i(T_s \setminus \{v_s\}) \\ = i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m)$$

и $s < k$, *то* $i(\widehat{T}) < i(T)$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} i(T) - i(\widehat{T}) &= i(T \setminus \{v\}) + i(T \setminus (\{v\} \cup \partial v)) \\ &\quad - (i(\widehat{T} \setminus \{v\}) + i(\widehat{T} \setminus (\{v\} \cup \partial v))) = i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_k) \\ &\quad + i(T_1 \setminus \{v_1\}) \cdot \ldots \cdot i(T_k \setminus \{v_k\}) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots i(\widehat{T}_m) \cdot i(T_{s+1}) \cdot \ldots \cdot i(T_k) \\ &\quad - i(\widehat{T}_1 \setminus \{u_1\}) \cdot \ldots i(\widehat{T}_m \setminus \{u_m\}) \cdot i(T_{s+1} \setminus \{v_{s+1}\}) \cdot \ldots \cdot i(T_k \setminus \{v_k\}) \\ &= (i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m)) \cdot i(T_{s+1}) \cdot \ldots \cdot i(T_k) \\ &\quad \times \Bigg(1 - \frac{i(T_{s+1} \setminus \{v_{s+1}\}) \cdot \ldots \cdot i(T_k \setminus \{v_k\})}{i(T_{s+1}) \cdot \ldots \cdot i(T_k)} \\ &\quad \times \frac{i(\widehat{T}_1 \setminus \{u_1\}) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m \setminus \{u_m\}) - i(T_1 \setminus \{v_1\}) \cdot \ldots \cdot i(T_s \setminus \{v_s\})}{i(T_1) \cdot \ldots \cdot i(T_s) - i(\widehat{T}_1) \cdot \ldots \cdot i(\widehat{T}_m)}\Bigg). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий леммы каждый из сомножителей в последнем произведении положителен. Лемма 6 доказана.

Следующая теорема описывает структуру (n, d)-минимальных деревьев.

Теорема 2. *Пусть* d *— чётное число,* $\mathcal{M}_d$ *— множество всех попарно не изоморфных деревьев* T', *для которых* $c(T') = \min\limits_{m \leqslant d} \widehat{c}(m)$. *Тогда найдётся такое* N, *что для* $d' \in \{d+2,\, d+3\}$, *произвольного натурального числа* n *и произвольного* (n, d')*-минимального дерева* T *суммарное количество вершин в компонентах связности* F_T, *не изоморфных деревьям из* $\mathcal{M}_d$, *не превосходит* N.

Доказательство. Докажем теорему для случая $d' = d + 2$, случай $d' = d+3$ может быть рассмотрен аналогично. Рассмотрим произвольное дерево T' из множества $\mathcal{M}_d$. Положим $n_0 = n(T')$. Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — компоненты леса F_T, не изоморфные деревьям из $\mathcal{M}_d$. Из леммы 5 следует, что существует константа $\theta > 1$ такая, что $c(T_j) \geqslant \theta c(T')$ при всех j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Положим $N = \lceil 2n_0 \log_\theta 2 \rceil$. Пусть T — произвольное $(n, d + 2)$-минимальное дерево. Положим $r = \sum\limits_{j=1}^{k} |V(T_j)|$. Допустим, что $r > N$. Тогда, заменив в дереве T все поддеревья $T_1, \ldots, T_k$ на $\lfloor r/n_0 \rfloor$ копий дерева T_j и $r - n_0 \cdot \lfloor r/n_0 \rfloor$ висячих вершин, получим дерево $\widetilde{T}$, для которого в силу леммы 6 выполнено $i(\widetilde{T}) < i(T)$, а это противоречит выбору T. Следовательно, $r \leqslant N$. Теорема 2 доказана.

2. Число независимых множеств в деревьях малого диаметра

В дальнейшем понадобятся два следующих утверждения из [2].

Лемма 7 [2, лемма 2]. *Пусть n и d таковы, что $4 \leqslant d < n$, и пусть T — произвольное (n, d)-минимальное дерево. Тогда никакая вершина в T не смежна более чем с двумя висячими вершинами. Если вершина смежна с двумя висячими вершинами, то каждая из них должна лежать на некоторой диаметральной цепи в T.*

Теорема 3 [2, теорема 1]. *Пусть T_n является $(n, 4)$-минимальным деревом. Тогда $T_5 \simeq P_5$, $T_6 \simeq T_{0,2,1}$. При $n > 6$ выполнено $T_n \simeq T_{p,q}$, где $q = 2n + 1 \pmod 3$ при $n \geqslant 26$, а при $7 \leqslant n \leqslant 25$ величина q определяется из табл. 1.*

Таблица 1

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
q	3	2	4	3	5	4	6	5	4	3	5	4	3	2	4	3	2	1	3

Лемма 8. *При $d \leqslant 3$ справедливо равенство $\widehat{c}(d) = \varphi_{d+1}^{1/(d+1)}$ и $\widehat{c}(4) = 35^{1/7}$. Среди деревьев диаметра 4 ёмкость, равную $\widehat{c}(4)$, имеет только дерево $T_{0,3}$.*

Доказательство. Любая $(d + 1)$-вершинная цепь имеет φ_{d+1} независимых множеств, откуда $\widehat{c}(d) \leqslant \varphi_{d+1}^{1/(d+1)}$ при любом d. При $d = 4$ можно указать дерево $T_{0,3}$ диаметра 4, имеющее семь вершин и тридцать пять независимых множеств, поэтому $\widehat{c}(4) \leqslant 35^{1/7}$. Отметим, что

$$\varphi_1 > \varphi_2^{1/2} > \varphi_3^{1/3} > \varphi_4^{1/4} > 35^{1/7}.$$

Для завершения доказательства покажем, что для любого n-вершинного дерева T диаметра d при $d = 4$ выполнено $i(T) \geqslant 35^{n/7}$, а при $d \leqslant 3$ выполнено $i(T) \geqslant \varphi_{d+1}^{n/(d+1)}$. Для деревьев диаметра 0 и 1 это верно. Также утверждение выполнено для деревьев, в которых $n \leqslant d+1$, поскольку в этом случае $i(T) \geqslant \varphi_n \geqslant \varphi_{d+1}^{n/(d+1)}$. Будем считать, что $n \geqslant d+2$ и дерево T является (n,d)-минимальным деревом.

1. $d = 2$. Тогда T — звезда и $i(T) = 2^{n-1} + 1 > 5^{n/3}$ при $n \geqslant 4$.

2. $d = 3$. В этом случае $i(T) \geqslant 2^{n-2} + 2^{\lfloor n/2-1 \rfloor} + 2^{\lceil n/2-1 \rceil} > 8^{1/4}$ (при $5 \leqslant n \leqslant 8$ неравенство $i(T) > 8^{1/4}$ проверяется непосредственно, а при $n \geqslant 9$ выполнено $2^{(n-2)/n} > 8^{1/4}$).

3. $d = 4$. Проведём индукцию по n. Тот факт, что при $6 \leqslant n \leqslant 13$ любое n-вершинное дерево диаметра 4, не изоморфное $T_{0,3}$, имеет ёмкость больше $35^{1/7}$, проверяется непосредственно с учётом теоремы 3 (это составляет базис индукции). Пусть $n \geqslant 14$ и все деревья T' диаметра d на $n' < n$ вершинах содержат не меньше $35^{n'/7}$ независимых множеств. Так как $n \geqslant 14$, то из теоремы 3 следует, что дерево, на котором достигается минимум числа независимых множеств при заданном n и $d = 4$, содержит две висячие вершины w и w', имеющие общего соседа v. Воспользовавшись предположением индукции, получаем

$$\begin{aligned} i(T) = i(T \setminus \{w\}) + 2i(T \setminus \{w, w', v\}) \geqslant 35^{(n-1)/7} + 2 \cdot 35^{(n-3)/7} \\ = 35^{n/7}(35^{-1/7} + 2 \cdot 35^{-3/7}) > 35^{n/7}, \end{aligned}$$

что завершает индуктивный переход. Лемма 8 доказана.

Теорема 4. 1. *Любое n-вершинное дерево диаметра 6 содержит не меньше $35^{(n-1)/7}$ независимых множеств.*

2. *Число независимых множеств в любом n-вершинном дереве диаметра 7 не меньше $35^{(n-2)/7}$.*

3. *Существует такая константа N, что при $d \in \{6, 7\}$ для любого (n,d)-минимального дерева T число вершин в компонентах леса F_T, не изоморфных $T_{0,3}$, меньше N.*

Оценки пп. 1 и 2 при $n \equiv 1 \pmod 7$ и $n \equiv 2 \pmod 7$ соответственно асимптотически точны.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 3, 8 и теоремы 2.

Обозначим через $\check{T}$ такое дерево диаметра 6, что лес $F_{\check{T}}$ состоит из четырёх 5-вершинных цепей. Имеем $n(\check{T}) = 21$, $i(\check{T}) = 35122$, откуда $c(\check{T}) = 35122^{1/21}$. По определению отсюда следует, что $\widehat{c}(6) \leqslant 35122^{1/21}$.

Лемма 9. *При $j \leqslant 5$ справедливо неравенство $\widehat{c}(j) > \widehat{c}(6)$.*

Доказательство. Неравенства $\widehat{c}(j) > \widehat{c}(6)$ при $j \leqslant 4$ следуют из леммы 8 и неравенств $35^{1/7} > 35122^{1/21} \geqslant \widehat{c}(6)$. Докажем, что $\widehat{c}(5) > \widehat{c}(6)$. Пусть T — произвольное $(n,5)$-минимальное дерево. Рассмотрим два случая.

1. Пусть дерево T имеет следующий вид: при удалении из T двух центральных вершин u, v и инцидентных им рёбер получившийся лес состоит из 2-вершинных цепей, причём вершина u смежна с концами p цепей, а вершина v — с концами q цепей, $p, q \geqslant 1$, $p+q = n/2-1$. Тогда $c(T) = (i(T))^{1/n(T)} = (3^{p+q} + 2^p 3^q + 3^p 2^q)^{\frac{1}{2(p+q+1)}}$. Минимум выражения $3^{p+q} + 2^p 3^q + 3^p 2^q$ при ограничении $p+q = A$, $p, q \geqslant 1$ достигается при $p = q = A/2$. Отсюда

$$c(T) \geqslant \inf_{n\in\mathbb{N},\, n\geqslant 6} (3^{n/2-1} + 2\cdot 6^{n/4-1/2})^{1/n}.$$

Неравенство $(3^{n/2-1} + 2\cdot 6^{n/4-1/2})^{1/n} > 35122^{1/21}$ при $6 \leqslant n \leqslant 21$ проверяется непосредственно, а при $n \geqslant 22$ выполнено неравенство

$$(3^{n/2-1} + 2\cdot 6^{n/4-1/2})^{1/n} > 3^{5/11} > 35122^{1/21}.$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда дерево T имеет вид, отличный от рассмотренного в п. 1. Заметим, что в этом случае в T найдётся вершина, к которой примыкают концевыми вершинами две цепи, одна из которых содержит 1 вершину, а другая — p вершин, где $p \in \{1,2\}$. Заменим их одной $(p+1)$-вершинной цепью. Из п. 1 леммы 6 вытекает, что для полученного дерева $\widehat{T}$ выполнено $i(\widehat{T}) < i(T)$ и $n(\widehat{T}) = n(T)$. Кроме того, $\mathrm{diam}(\widehat{T}) \in \{5,6\}$. Если $\mathrm{diam}(\widehat{T}) = 5$, то дерево T не является (n,d)-минимальным — противоречие с выбором T. Если же $\mathrm{diam}(\widehat{T}) = 6$, то $c(T) > i(\widehat{T}) > \widehat{c}(6)$. Лемма 9 доказана.

3. Оценка величины $\widehat{c}(6)$

Пусть T — какое-нибудь $(n,6)$-минимальное дерево. Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — деревья, примыкающие к центральной вершине v дерева T вершинами $v_1, \ldots, v_k$ соответственно. Будем считать $T_1, \ldots, T_k$ корневыми деревьями с корнями $v_1, \ldots, v_k$. Говоря о замене в дереве T поддерева T_i корневым деревом $\widehat{T}_i$, будем считать, что замена производится так, что в получившемся дереве поддерево $\widehat{T}_i$ примыкает к вершине v своим корнем. Замену назовём *уменьшающей*, если выполнены условия леммы 6, т. е. при такой замене число независимых множеств в результирующем

дереве строго меньше, чем в исходном. В табл. 2 приведены возможные замены и указаны условия, при которых они являются уменьшающими.

Т а б л и ц а 2

№	T_i	$\widehat{T}_i$	Условия
S1	$T_{0,q,1}$	$T_{1,q-1,0}$	$q \geqslant 3$
S2	$T_{p,q,1}$	$T_{p-1,q+2,0}$	$p \geqslant 1,\ q \geqslant 0$
S3	$T_{p,q},\ P_1$	$T_{p,q-1},\ P_3$	$p\geqslant 0,\ q\geqslant 2$ $p\geqslant 1,\ q=1$
S4	$T_{p,0},\ P_1$	$T_{p-2,2},\ P_3$	$p \geqslant 2$
S5	$P_2,\ P_1$	P_3	всегда
S6	$P_3,\ P_1$	$P_2,\ P_2$	всегда
S7	$P_4,\ P_1$	$P_3,\ P_2$	всегда
S8	$T_{0,2,1},\ P_1$	$T_{0,3}$	всегда
S9	$T_{1,0}$	P_4	всегда
S10	$T_{0,q}$	$T_{2,q-3}$	$q \geqslant 7$
S11	$T_{0,6}$	$T_{0,3},\ T_{0,2,1}$	всегда
S12	$P_2,\ P_2,\ P_3$	$P_2,\ P_5$	всегда
S13	$P_2,\ P_2,\ P_2$	$P_3,\ P_3$	всегда

Отметим, что в дереве T нельзя провести ни одной из указанных уменьшающих замен (иное противоречило бы (n, d)-минимальности T). Из лемм 2 и 7 вытекает

Утверждение 1. *Каждое из деревьев $T_1, \ldots, T_k$ либо имеет диаметр не больше 3, либо имеет вид $T_{p,q,r}$, где $r \leqslant 1$.*

Из невозможности проведения замен S1 и S2 вытекает

Утверждение 2. *Среди поддеревьев $T_1, \ldots, T_k$ дерева T при $r > 0$ не может быть деревьев вида $T_{p,q,r}$, отличных от P_2, P_4 и $T_{0,2,1}$.*

Из утверждения 2, леммы 7 и невозможности проведения замен S3–S9 следует

Утверждение 3. *Среди поддеревьев $T_1, \ldots, T_k$ дерева T, имеющих диаметр меньше 4, могут быть только деревья P_2, P_3, P_4.*

Невозможность проведения замен S10 и S11 влечёт

Утверждение 4. *Среди поддеревьев $T_1, \ldots, T_k$ дерева T не может быть деревьев $T_{0,q}$ при $q \geqslant 6$.*

Из невозможности проведения замен S12 и S13 вытекает

Утверждение 5. *Среди поддеревьев* $T_1, \ldots, T_k$ *дерева* T *не может быть больше двух деревьев вида* P_2*. Если среди* $T_1, \ldots, T_k$ *есть дерево* P_3*, то среди* $T_1, \ldots, T_k$ *имеется не больше одного дерева вида* P_2*.*

Напомним, что через $\check{T}$ обозначается дерево диаметра 6 такое, что $F_{\check{T}}$ — объединение четырёх пятивершинных цепей.

Лемма 10. *Любое* n*-вершинное дерево диаметра* 6 *содержит не менее* $35122^{n/21}$ *независимых множеств. Ёмкость любого дерева диаметра* 6*, не изоморфного* $\check{T}$*, строго больше* $35122^{1/21}$*.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по n. При $n = 7$ имеем $i(T) = 34 > 35122^{1/3}$ и утверждение леммы выполнено. Пусть $n > 7$ и утверждение выполнено при всех n', $n' < n$. Пусть T является $(n, 6)$-минимальным деревом. Если $n \geqslant 54$, то из теоремы 4 следует, что $c(T) \geqslant 35^{\frac{n-1}{7n}} \geqslant 35^{53/378} > 35122^{1/21}$. Далее считаем $n \leqslant 53$. Если в T есть две висячие вершины u, v, имеющие общего соседа w, то, воспользовавшись предположением индукции и неравенством $\widehat{c}(j) \geqslant 35122^{1/21}$, $j \leqslant 5$, получаем

$$\begin{aligned} i(T) = i(T \setminus \{u\}) + i(T \setminus \{u, w\}) &\geqslant 35122^{(n-1)/21} + 2 \cdot 35122^{(n-3)/21} \\ &= 35122^{n/21}(35122^{-1/21} + 2 \cdot 35122^{-1/7}) > 35122^{n/21}. \end{aligned}$$

Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — деревья, примыкающие к центральной вершине v дерева T. Если среди деревьев $T_1, \ldots, T_k$ есть дерево P_4, то, пользуясь предположением индукции и разложив T по висячей вершине, примыкающей к корню в P_4, получим

$$i(T) \geqslant 35122^{n/21}(35122^{-1/21} + 3 \cdot 35122^{-4/21}) > 35122^{n/21}.$$

Аналогично, если среди $T_1, \ldots, T_k$ есть дерево $T_{0,2,1}$, то, разложив T по висячей вершине, примыкающей к корню в $T_{0,2,1}$, получаем

$$i(T) \geqslant 35122^{n/21}(35122^{-1/21} + 9 \cdot 35122^{-2/7}) > 35122^{n/21}.$$

Из утверждений 1–5 следует, что остаётся рассмотреть следующие случаи.

1. $T_i \simeq T_{0,q_i}$ и $1 \leqslant q_i \leqslant 5$ при $i = \overline{1, k}$. Тогда $(n-1)/11 \leqslant k \leqslant (n-1)/3$. Имеем

$$i(T) = (3^{q_1} + 2^{q_1}) \cdot \ldots \cdot (3^{q_k} + 2^{q_k}) + 3^{q_1 + \ldots + q_k}.$$

Функция

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} (3^{x_i} + 2^{x_i})$$

достигает на множестве $\left\{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{k} x_i = A\right\}$ минимума в точке $(A/k, \ldots, A/k)$. Поэтому $i(T) \geqslant (3^{\frac{n-1-k}{2k}} + 2^{\frac{n-1-k}{2k}})^k + 3^{\frac{n-1-k}{2}}$. Перебором по множеству $M_1 = \big\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in [7, 53],\, k \in \big[\frac{n-1}{11}, \frac{n-1}{3}\big]\big\}$ можно проверить, что

$$\min_{(n,k)\in M_1} \big(\big(3^{\frac{n-1-k}{2k}} + 2^{\frac{n-1-k}{2k}}\big)^k + 3^{\frac{n-1-k}{2}}\big)^{1/n} = 35122^{1/21},$$

и минимум достигается только в точке $n = 21$, $k = 4$.

2. $T_1 \simeq T_2 \simeq P_2$ и $T_j = T_{0,q_j}$, где $2 \leqslant q_j \leqslant 5$, при $j > 2$. Тогда $n \geqslant 15$ и $\frac{n+17}{11} \leqslant k \leqslant \frac{n+5}{5}$. В этом случае

$$c(T) \geqslant \big(9 \cdot \big(3^{\frac{n-3-k}{2k-4}} + 2^{\frac{n-3-k}{2k-4}}\big)^{k-2} + 4 \cdot 3^{\frac{n-3-k}{2}}\big)^{1/n}.$$

Перебором по множеству $M_2 = \big\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in [15, 53],\, k \in \big[\frac{n+17}{11}, \frac{n+5}{5}\big]\big\}$ устанавливается, что

$$\min_{(n,k)\in M_2} \big(9 \cdot \big(3^{\frac{n-3-k}{2k-4}} + 2^{\frac{n-3-k}{2k-4}}\big)^{k-2} + 4 \cdot 3^{\frac{n-3-k}{2}}\big)^{1/n} > 35122^{1/21},$$

(минимум достигается в точке $n = 22$, $k = 5$). В этом случае имеем $c(T) > 35122^{1/21}$.

3. $T_1 \simeq P_2$ и $T_j = T_{0,q_j}$, где $1 \leqslant q_j \leqslant 5$, при $j > 1$. В этом случае $n \geqslant 9$ и $(n+8)/11 \leqslant k \leqslant n/3$. Имеем $c(T) \geqslant \big(3 \cdot \big(3^{\frac{n-k}{2k-2}} + 2^{\frac{n-k}{2k-2}}\big)^{k-1} + 2 \cdot 3^{\frac{n-k}{2}}\big)^{1/n}$. Перебором по множеству $M_3 = \big\{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in [9, 53],\, k \in \big[\frac{n+8}{11}, \frac{n}{3}\big]\big\}$ можно проверить, что

$$\min_{(n,k)\in M_3} \big(3 \cdot \big(3^{\frac{n-k}{2k-2}} + 2^{\frac{n-k}{2k-2}}\big)^{k-1} + 2 \cdot 3^{\frac{n-k}{2}}\big)^{1/n} > 35122^{1/21}$$

(минимум достигается в точке $n = 53$, $k = 9$). В этом случае опять получаем $c(T) > 35122^{1/21}$. Лемма 10 доказана.

Из лемм 3, 9, 10 и теоремы 2 вытекает

Теорема 5. 1. *Любое n-вершинное дерево диаметра 8 содержит не меньше $35122^{(n-1)/21}$ независимых множеств.*

2. *Число независимых множеств в любом n-вершинном дереве диаметра 9 не меньше $35122^{(n-2)/21}$.*

3. *Существует такая константа N, что при $d \in \{8, 9\}$ для любого (n, d)-минимального дерева T число вершин в компонентах леса F_T, не изоморфных $\check{T}$, меньше N.*

Оценки пп. 1 *и* 2 *при* $n \equiv 1 \pmod{21}$ *и* $n \equiv 2 \pmod{21}$ *соответственно асимптотически точны.*

Автор выражает благодарность П. Д. Вестергарду и А. А. Сапоженко за внимание к работе и замечания, способствовавшие улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dainiak A. B.** Sharp bounds for the number of maximal independent sets in trees of fixed diameter // arXiv:0812.4948v1
2. **Frendrup A., Pedersen A. S., Sapozhenko A. A., Vestergaard P. D.** Merrifield-Simmons index and minimum number of independent sets in short trees // Department of Mathematical Sciences, Aalborg University. Research Report Series. ISSN 1399–2503. R–2009–03, January 2009. — 13 p.
3. **Pedersen A. S., Vestergaard P. D.** An upper bound on the number of independent sets in a tree // Ars Combinatoria. — 2007. — Vol. 84. — C. 85—96.

Дайняк Александр Борисович,
e-mail: dainiak@gmail.com

Статья поступила
29 января 2009 г.