ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2009. Том 16, № 2. С. 74–84

УДК 519.8

О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ МИНИСУММНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ

В. А. Емеличев, О. В. Карелкина

Аннотация. Рассматривается многокритериальный вариант известной комбинаторной экстремальной задачи размещения медиан с последовательной минимизацией минисуммных критериев. Найдены необходимые и достаточные условия квазиустойчивости задачи, т. е. условия, при выполнении которых достаточно малые изменения исходных данных сохраняют все лексикографические оптимумы задачи и допускают появление новых. Приведены числовые примеры.

Ключевые слова: векторная минисуммная задача размещения, лексикографическое множество, возмущающая матрица, квазиустойчивость, бинарные отношения.

Введение

В работе [3] исследована квазиустойчивость векторной минимаксной задачи размещения центров обслуживания, состоящей в поиске множества Парето. В настоящей статье рассматривается векторный вариант другой известной задачи размещения — задачи о медианах, т. е. комбинаторной минисуммной задачи. При этом в качестве принципа оптимальности выбрано лексикографическое отношение доминирования. В терминах бинарных отношений получено необходимое и одновременно достаточное условие квазиустойчивости задачи, т. е. того типа устойчивости, который является дискретным аналогом полунепрерывности снизу по Хаусдорфу многозначного отображения, задающего лексикографическую функцию выбора. Эти результаты частично анонсированы в [6].

1. Постановка задачи, определения и свойства

В классической задаче о медианах моделируется ситуация, состоящая в поиске такого размещения пунктов обслуживания (медиан), чтобы сумма кратчайших расстояний до пунктов потребления была минимальной. Эти задачи в различных формах встречаются на практике: при выборе места расположения подстанций в электросетях, баз снабжения (складов) в сети дорог и многих других служб и предприятий. При наличии нескольких видов затрат, которые желательно минимизировать, возникает векторный вариант задачи о медианах. Для математической постановки такой задачи введём следующие обозначения:

$N_m = \{1, 2, \dots, m\}$ — места возможного расположения предприятий;

N_n — места расположения клиентов (потребителей);

a_{ijk} — затраты предприятия i при обслуживании клиента j по критерию k.

Для трёхиндексной матрицы размера $m \times n \times s$ с элементами a_{ijk} из $\mathbb{R}$ будем использовать обозначение A.

Пусть на множестве непустых подмножеств (траекторий) $T \subset 2^{N_m}$, $|T| \geqslant 2$, задана вектор-функция

$$f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_s(t, A))$$

с минисуммными критериями

$$f_k(t, A) = \sum_{j \in N_n} \min_{i \in t} a_{ijk} \to \min_{t \in T}, \ k \in N_s.$$

Под *лексикографической* (s-критериальной) *задачей размещения* $Z^s(A)$, $s \geqslant 1$, будем понимать задачу поиска *лексикографического множества* (*множества лексикографических оптимумов*):

$$L^s(A) = \{t \in T \mid \forall t' \in T \quad (t \underset{A}{\not\succ} t')\},$$

где

$$t \underset{A}{\succ} t' \iff \exists p \in N_s$$
$$(f_p(t, A) > f_p(t', A) \ \& \ p = \min\{k \in N_s \mid f_k(t, A) \neq f_k(t', A)\}),$$

а знак $\underset{A}{\not\succ}$ означает отрицание отношения $\underset{A}{\succ}$. Очевидно, что множество $L^s(A)$, являясь подмножеством множества Парето, непусто при любой матрице $A \in \mathbb{R}^{n \times m \times s}$.

Если $s = 1$ и $|t| = p$, где p — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $p \leqslant m - 1$ для любой траектории $t \in T$, то рассматриваемая задача превращается в популярную среди специалистов в области дискретной оптимизации задачу о p-медиане (p-median problem) (см., например, [1, 8, 10, 13]).

Далее будем использовать обозначение $\overline{L^s}(A) = T \setminus L^s(A)$.

Следующие свойства очевидны.

Свойство 1. *Если* $t \underset{A}{\succ} t'$, *то* $t \in \overline{L^s}(A)$.

Свойство 2. *Если* $t \underset{A}{\succ} t'$, *то* $t' \underset{A}{\overline{\succ}} t$.

Известно (см., например, [9, 11]), что лексикографическое множество $L^s(A)$ может быть определено и как результат решения последовательности s скалярных задач

$$L^s_k(A) = \operatorname{Arg\,min}\big\{f_k(t,A) \mid t \in L^s_{k-1}(A)\big\}, \qquad k \in N_s, \tag{1}$$

где $L^s_0(A) = T$, $\operatorname{Arg\,min}\{\cdot\}$ — множество всех оптимальных траекторий соответствующей скалярной задачи минимизации. Отсюда вытекает справедливость следующей цепочки включений:

$$T \supseteq L^s_1(A) \supseteq L^s_2(A) \supseteq \ldots \supseteq L^s_s(A) = L^s(A). \tag{2}$$

Следуя [3, 4, 7, 12], задачу $Z^s(A)$ назовём *квазиустойчивой*, если верна формула

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (L^s(A) \subseteq L^s(A + A')).$$

Здесь $\Omega(\varepsilon) = \{A' \in \mathbb{R}^{m\times n\times s} \mid ||A'|| < \varepsilon\}$ — множество *возмущающих матриц* с нормой

$$||A'|| = \max\{|a'_{ijk}| \mid (i,j,k) \in N_m \times N_n \times N_s\}, \ \ A' = (a'_{ijk}).$$

Тем самым квазиустойчивость характеризует случай, когда все лексикографические оптимумы задачи не теряют своей оптимальности при достаточно малых возмущениях исходных данных задачи. Поэтому квазиустойчивость задачи $Z^s(A)$ можно трактовать как дискретный аналог свойства полунепрерывности снизу по Хаусдорфу [2, 14] в точке A многозначного отображения

$$L^s : \mathbb{R}^{m\times n\times s} \to 2^T.$$

Для любого непустого подмножества $I \subseteq N_s$ на множестве траекторий T задачи $Z^s(A)$ введём бинарные отношения:

$$t \underset{I,A}{\geqslant} t' \iff \forall k \in I \ (f_k(t,A) \geqslant f_k(t',A)),$$

$$t \underset{I,A}{>} t' \iff \forall k \in I \ (f_k(t,A) > f_k(t',A)),$$

$$t \underset{I,A}{\vdash} t' \iff \forall k \in I \ \ \forall j \in N_n \ (N_{jk}(t,A) \supseteq N_{jk}(t',A)),$$

где $N_{jk}(t,A) = \{r \in t \mid \min\limits_{i \in t} a_{ijk} = a_{rjk}\}$.

В частности, имеем

$$t \underset{k,A}{\vdash} t' \iff \forall j \in N_n \ (N_{jk}(t,A) \supseteq N_{jk}(t',A)).$$

Очевидно, что отношения $\underset{I,A}{\geqslant}$ и $\underset{I,A}{\vdash}$ рефлексивны. Кроме того, легко убедиться в справедливости следующих двух свойств.

Свойство 3. *Если* $t \underset{I,A}{\vdash} t'$*, то существует такое число* $\varepsilon > 0$*, что для любой возмущающей матрицы* $A' \in \Omega(\varepsilon)$ *верно отношение*

$$t' \underset{I,A+A'}{\geqslant} t.$$

Свойство 4. *Если* $t \underset{N_s,A}{\geqslant} t'$*, то* $t' \underset{A}{\overline{\succ}} t$.

Последовательно применяя свойства 3, 4 и учитывая непрерывность в $\mathbb{R}^{m \times n}$ функций $f_k(t,A)$ при любом $k \in N_s$, убеждаемся в справедливости следующих двух свойств.

Свойство 5. *Если* $t \underset{N_s,A}{\vdash} t'$*, то*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \ (t \underset{A+A'}{\overline{\succ}} t').$$

Свойство 6. *Если для траекторий* t *и* t' *выполняется любое из условий*

$$\text{(i) } t \underset{1,A}{>} t', \quad \text{(ii) } \exists k \in N_{s-1} \ (t' \underset{N_k,A}{\vdash} t \ \& \ t \underset{k+1,A}{>} t'),$$

то справедлива формула

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \ (t \underset{A+A'}{\succ} t').$$

Введём множество

$$U^s(A) = \big\{t \in L^s(A) \mid \forall k \in N_s \ \ \forall t' \in L^s_k(A) \ (t \underset{k,A}{\vdash} t')\big\}.$$

Свойство 7. *Если* $t \in U^s(A)$ *и* $t' \in L^s(A)$*, то* $t \underset{N_s,A}{\vdash} t'$.

2. Леммы

Для вывода критерия квазиустойчивости задачи понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Если* $t \in U^s(A)$ *и* $t' \in T$, *то*

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \;\; (t \underset{A+A'}{\overline{\succ}} t'). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $t \in U^s(A)$. Для траектории t' рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $t' \in L_1^s(A)$. Пусть сначала $t' \in L^s(A)$. Тогда в силу свойства 7 справедливо отношение $t \underset{N_s,A}{\vdash} t'$. Отсюда благодаря свойству 5 получаем (3).

Пусть теперь $t' \in L_1^s(A) \setminus L^s(A)$. Тогда существует $p = p(t') \in N_s \setminus \{1\}$ такой, что $t' \notin L_p^s(A)$ и $t' \in L_k^s(A)$ при $k \in N_{p-1}$. Поэтому имеем

$$t \underset{N_{p-1},A}{\vdash} t' \;\; \text{и} \;\; t' \underset{p,A}{>} t.$$

Пользуясь этими фактами и свойством 6(ii), заключаем, что верна формула

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \;\; (t' \underset{A+A'}{\succ} t),$$

которая ввиду свойства 2 даёт (3).

Случай 2. $t' \in T \setminus L_1^s(A)$. Тогда имеет место отношение $t' \underset{1,A}{>} t$. Поэтому из свойств 2 и 6(i) вытекает формула (3). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $t \in L^s(A) \setminus U^s(A)$, *то*

$$\exists t^0 \in T \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A^0 \in \Omega(\varepsilon) \; (t \underset{A+A^0}{\succ} t^0). \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку $t \notin U^s(A)$, существуют такие индексы $p \in N_s$, $q \in N_n$ и траектория $t^0 \in L_p^s(A)$, что $N_{pq}(t, A) \not\supseteq N_{pq}(t^0, A)$ и $t \in L_p^s(A)$ (ввиду $t \in L^s(A)$). Отсюда вытекает, что $f_k(t, A) = f_k(t^0, A)$ для любого $k \in N_p$ и найдётся индекс $r \in N_{pq}(t^0, A) \setminus N_{pq}(t, A)$. Поэтому, положив $\varepsilon > 0$ и построив элементы возмущающей матрицы $A^0 = \left(a_{ijk}^0\right) \in \Omega(\varepsilon)$ размера $m \times n \times s$ по правилу

$$a_{ijk}^0 = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } i = r, \; j = q, \; k = p, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \alpha < \varepsilon$, ввиду $r \in N_{pq}(t^0, A) \setminus N_{pq}(t, A)$ получаем

$$f_p(t^0, A + A^0) = \sum_{j \in N_n} \min_{i \in t^0} \left(a_{ijp} + a^0_{ijp}\right) = a_{rqp} - \alpha + \sum_{j \neq q} \min_{i \in t^0} a_{ijp}$$

$$= \sum_{j \in N_n} \min_{i \in t^0} a_{ijp} - \alpha = f_p(t^0, A) - \alpha < f_p(t^0, A) = f_p(t, A) = f_p(t, A + A^0),$$

$$f_k(t^0, A + A^0) = f_k(t^0, A) = f_k(t, A) = f_k(t, A + A^0), \ i \in N_{p-1}.$$

Поэтому $t \underset{A+A^0}{\succ} t^0$, т. е. верна формула (4). Лемма 2 доказана.

3. Необходимые и достаточные условия

Теперь сформулируем критерий квазиустойчивости рассматриваемой задачи.

Теорема. *Векторная задача $Z^s(A)$, $s \geqslant 1$, квазиустойчива тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$L^s(A) = U^s(A). \tag{5}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть верно равенство (5) и t — лексикографический оптимум задачи $Z^s(A)$. Тогда $t \in U^s(A)$ и поэтому в силу леммы 1

$$\forall t' \in T \ \ \exists \varepsilon(t') > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon(t')) \ (t \underset{A+A'}{\overline{\succ}} t').$$

Отсюда следует, что всякая траектория $t \in L^s(A)$ остаётся лексикографическим оптимумом задачи $Z^s(A + A')$ при любой возмущающей матрице $A' \in \Omega(\varepsilon(t))$, если $\varepsilon(t) = \min\{\varepsilon(t') \mid t' \neq t\}$. Поэтому выполняется формула

$$\exists \varepsilon^* > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon^*) \ \ (L^s(A) \subseteq L^s(A + A'))$$

при $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(t) : t \in L^s(A)\}$.

Следовательно, задача $Z^s(A)$ квазиустойчива.

Необходимость. Пусть задача $Z^s(A)$ квазиустойчива. Предположим, что равенство (5) не выполняется. Тогда найдётся траектория $t \in L^s(A) \setminus U^s(A)$, для которой в силу леммы 2 и свойства 1 верна формула

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists A^0 \in \Omega(\varepsilon) \ (t \in \overline{L^s}(A + A^0)).$$

Отсюда $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists A^0 \in \Omega(\varepsilon) \ (L^s(A) \not\subseteq L^s(A + A^0))$, что противоречит квазиустойчивости задачи $Z^s(A)$. Теорема доказана.

4. Следствия

Следствие 1. *Если $U^s(A) = \varnothing$, то задача не является квазиустойчивой.*

Следствие 2. *Равенство $\left|L_1^s(A)\right| = 1$ является достаточным условием квазиустойчивости задачи $Z^s(A)$.*

Заметим, что в случае, когда первый критерий $f_1(t, A)$ линейный, указанное в следствии 2 равенство является не только достаточным, но и необходимым условием квазиустойчивости лексикографической задачи [4].

Ввиду свойства 7 из теоремы вытекает также

Следствие 3. *Выполнимость формулы*

$$\forall t, t' \in L^s(A) \ \ \forall k \in N_s \ \ \forall j \in N_n \ \ (N_{jk}(t, A) = N_{jk}(t', A)) \tag{6}$$

является необходимым условием квазиустойчивости задачи $Z^s(A)$, $s \geqslant 1$.

Очевидно, что в скалярном случае ($s = 1$) формула (6) в силу следствия 2 является одновременно и достаточным условием квазиустойчивости задачи $Z^1(A)$.

Напомним, что *ядром устойчивости* $\mathrm{Ker}^s(A)$ *задачи* $Z^s(A)$ называется (см., например, [5]) множество всех устойчивых лексикографических оптимумов задачи, т. е. тех траекторий $t \in L^s(A)$, для которых

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (t \in L^s(A + A')).$$

Следствие 4. $\mathrm{Ker}^s(A) = U^s(A)$.

Наконец, отметим, что в частном случае, когда $n = 1$, наша задача превращается в задачу с критериями вида MINMIN. Тем самым решается одновременно и вопрос о квазиустойчивости лексикографической комбинаторной (траекторной) задачи с указанными критериями.

5. Примеры

Приведём несколько примеров, иллюстрирующих изложенные выше результаты. Сначала рассмотрим пример, в котором множества $L^s(A)$ и $U^s(A)$ совпадают.

Пример 1. Пусть $m = 3$, $n = 4$, $s = 2$, $T = \{t^1, t^2\}$, $t^1 = \{1, 2\}$, $t^2 = \{1, 2, 3\}$, и пусть матрица затрат $A \in \mathbb{R}^{3\times4\times2}$ задана двумерными сечениями, соответствующими критериям:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(t^1, A) = (5, 6)$, $f(t^2, A) = (5, 4)$. Поэтому $L^2_1(A) = \{t^1, t^2\} = T$, $L^2(A) = L^2_2(A) = \{t^2\}$. Далее, найдя множества

$$N_{11}(t^1, A) = N_{11}(t^2, A) = \{1, 2\},$$

$$\{1, 2\} = N_{21}(t^1, A) \subset N_{21}(t^2, A) = \{1, 2, 3\},$$

$$\{1\} = N_{31}(t^1, A) \subset N_{31}(t^2, A) = \{1, 3\},$$

$$\{2\} = N_{41}(t^1, A) \subset N_{41}(t^2, A) = \{2, 3\},$$

убеждаемся, что

$$\forall k \in N_2 \;\; \forall t \in L^2_k(A) \;\; (t^2 \underset{k,A}{\vdash} t),$$

т. е. $t^2 \in U^2(A)$. Поэтому $L^2(A) = U^2(A)$. Следовательно, в силу теоремы задача $Z^2(A)$ квазиустойчива.

Следующие два примера иллюстрируют ситуацию, когда задача не является квазиустойчивой, поскольку множества $L^s(A)$ и $U^s(A)$ не совпадают.

Пример 2. Пусть $m = 2$, $n = 3$, $s = 2$, $T = \{t^1, t^2\}$, $t^1 = \{1, 2\}$, $t^2 = \{1\}$, и пусть матрица затрат $A \in \mathbb{R}^{2\times3\times2}$ задана двумерными сечениями:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(t^1, A) = f(t^2, A) = (4, 3)$, поэтому $L^2(A) = L^2_1(A) = \{t^1, t^2\}$. Далее, найдя множества

$$\{2, 3\} = N_{12}(t^1, A) \supset N_{12}(t^2, A) = \{2\},$$

$$\{2, 3\} = N_{22}(t^1, A) \supset N_{22}(t^2, A) = \{2\},$$

$$\{2\} = N_{32}(t^1, A) = N_{32}(t^2, A) = \{2\},$$

убеждаемся, что

$$t^2 \underset{2,A}{\overline{\vdash}} t^1,$$

$$\forall k \in N_2 \;\; \forall t \in L^2_k \; (t^1 \underset{k,A}{\vdash} t).$$

Отсюда получаем $t^1 \in U^2(A)$, $t^2 \notin U^2(A)$, т. е. $L^2(A) \neq U^2(A) \neq \varnothing$. Поэтому согласно теореме задача $Z^2(A)$ не является квазиустойчивой.

Пример 3. Пусть $m = 3$, $n = 3$, $s = 2$, $T = \{t^1, t^2\}$, $t^1 = \{1, 2\}$, $t^2 = \{2, 3\}$, и пусть матрица затрат $A \in \mathbb{R}^{3\times3\times2}$ задана двумерными сечениями:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(t^1, A) = f(t^2, A) = (4, 3)$. Поэтому $L^2(A) = L^2_1(A) = \{t^1, t^2\}$,

$$N_{22}(t^1, A) = \{1\}, \quad N_{22}(t^2, A) = \{3\},$$

т. е. $L^2(A) \neq U^2(A) = \varnothing$. Следовательно, согласно следствию 1 задача $Z^2(A)$ не является квазиустойчивой.

Приведём пример, когда равенство $|L^s_1(A)| = 1$ не является необходимым условием квазиустойчивости задачи $Z^s(A)$.

Пример 4. Пусть $m = 3$, $n = 2$, $s = 2$, $T = \{t^1, t^2, t^3\}$, $t^1 = \{1, 2\}$, $t^2 = \{2\}$, $t^3 = \{1, 3\}$, и пусть матрица затрат $A \in \mathbb{R}^{3\times3\times2}$ задана двумерными сечениями:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(t^1, A) = f(t^2, A) = (2, 2)$, $f(t^3, A) = (3, 4)$. Поэтому $L^2_1(A) = L^2_2(A) = L^2(A) = \{t^1, t^2\}$. Легко видеть, что для каждой пары индексов $(j, k) \in N_2 \times N_2$ справедливо равенство

$$N_{jk}(t^1, A) = N_{jk}(t^2, A) = \{2\}.$$

Это значит, что $L^2(A) = U^2(A)$. Следовательно, согласно теореме задача $Z^2(A)$ квазиустойчива, хотя $\left|L^2_1(A)\right| = 2$. Легко также видеть, что и в скалярном случае ($A = A_1$) равенство $\left|L^1_1(A)\right| = 1$ не является необходимым условием квазиустойчивости задачи.

Далее покажем, что формула (6) не является достаточным условием квазиустойчивости задачи даже при $s = 2$.

Пример 5. Пусть $m = 3$, $n = 2$, $s = 2$, $T = \{t^1, t^2, t^3\}$, $t^1 = \{1, 2\}$, $t^2 = \{2, 3\}$, $t^3 = \{3\}$, и пусть матрица затрат $A \in \mathbb{R}^{3\times3\times2}$ задана двумерными сечениями:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(t^1, A) = f(t^2, A) = (3,3)$, $f(t^3, A) = (3,5)$, поэтому $L_1^2(A) = \{t^1, t^2, t^3\} = T$, $L^2(A) = L_2^2(A) = \{t^1, t^2\}$, кроме того, для любой пары индексов $(j,k) \in N_2 \times N_2$ справедливо равенство $N_{jk}(t^1, A) = N_{jk}(t^2, A)$. Тем самым формула (6) выполняется. Однако

$$\{2\} = N_{11}(t^1, A) = N_{11}(t^2, A) \not\supset N_{11}(t^3, A) = \{3\},$$

т. е.

$$t^1 \underset{1,A}{\overline{\vdash}} t^3,\ t^2 \underset{1,A}{\overline{\vdash}} t^3,$$

поэтому $U^2(A) = \varnothing$. Следовательно, согласно следствию 1 задача $Z^2(A)$ не является квазиустойчивой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агеев А. А.** Точные и приближенные алгоритмы для задач размещения: обзор последних результатов // Междунар. Сиб. конф. по исследованию операций. Материалы конференции. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН. — 1998. — С. 4–10.
2. **Белоусов Е. Г., Андронов В. Г.** Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 272 с.
3. **Воденников А. Г., Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Об одном типе устойчивости векторной комбинаторной задачи размещения // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 32–40.
4. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** Об устойчивости и квазиустойчивости траекторной задачи последовательной оптимизации // Докл. НАН Беларуси. — 1999. — Т. 43, № 3. — С. 41–44.
5. **Емеличев В. А., Гуревский Е. Е.** О ядре устойчивости многокритериальной комбинаторной минимаксной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 6–19.
6. **Емеличев В. А., Карелкина О. В.** Об одном типе устойчивости лексикографической минисуммной задачи размещения // Материалы IX Межд. конф. Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития. Т. 4. — Минск: Мин. экономики РБ. — 2008. — С. 188 — 190.
7. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2001. — Т. 8, № 1. – С. 47–69.
8. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978. — 432 с.
9. **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: Советское радио, 1975. — 192 с.
10. **Daskin M. S.** Network and discrete location: models, algorithms and applications. — New York: John Wiley and Sons, 1995. — 520 p.

11. **Ehrgott M.** Multicriteria optimization. Second edition. — Berlin-Heidelberg: Springer, 2005. — 323 p.
12. **Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P.** Stability and regularization of vector problem of integer linear programming // Optimization. — 2002. — V. 51, N 4. — P. 645–676.
13. **Mirchandani P., Francis R.** Discrete location theory. — New York: John Wiley and Sons, 1990. — 555 p.
14. **Tanino T.** Sensitivity analysis in multiobjective optimization // J. Optimiz. Theory and Appl. — 1988. — V. 56, N 3. — P. 479–499.

Емеличев Владимир Алексеевич,
e-mail: emelichev@bsu.by

Карелкина Ольга Владимировна,
e-mail: olga.karelkina@gmail.com

Статья поступила
2 декабря 2008 г.