

УДК 519.178

## ГРАНИЧНЫЕ КЛАССЫ ГРАФОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ

Д. С. Малышев

**Аннотация.** Рассматриваются класс всех графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем 3 листьями, и класс рёберных графов к графам этого класса. Известен ряд задач, для которых эти классы являются граничными. В работе исследуются общие свойства таких задач. Именно, доказывается достаточное условие граничности рассматриваемых классов. При помощи полученного инструмента к известным случаям граничности данных классов добавляется восемь новых.

**Ключевые слова:** экстремальные задачи на графах, вычислительная сложность, граничный класс.

### Введение

Данная работа является продолжением работы [1], в которой исследовалась граница между «простыми» и «сложными» классами для различных задач на графах в семействе *наследственных классов графов*, т. е. классов графов, замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс  $X$  определяется множеством своих запрещённых порождённых подграфов  $S$ , при этом принята запись  $X = \text{Free}(S)$ . Для любого наследственного класса  $X$  минимальное по включению множество запрещённых порождённых подграфов является единственным и обозначается  $\text{Forb}(X)$ . Если  $\text{Forb}(X)$  конечно, то класс  $X$  называется *конечно определённым*.

Рассматриваемый в [1] подход к исследованию указанной границы основан на понятиях П-простого, П-сложного и П-граничного классов графов. Наследственный класс графов называется П-*простым*, если задача П в этом классе полиномиально разрешима. Под П-*сложным* понимается наследственный класс графов, не являющийся П-простым. Наследственный класс графов  $X$  называется П-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность  $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$  П-сложных классов графов, что  $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ . Минимальный по включению П-предельный

класс называется *Π-граничным*. Значение понятия граничного класса графов раскрывает теорема 1, доказанная в работе [3].

**Теорема 1.** *Если  $P \neq NP$ , то конечно определённый класс графов  $X$  является  $\Pi$ -сложным тогда и только тогда, когда  $X$  содержит какой-нибудь  $\Pi$ -граничный класс.*

Утверждения данной работы и некоторые цитируемые результаты других работ также справедливы при выполнении гипотезы  $P \neq NP$ . В статье всегда предполагается справедливость этого неравенства, поэтому далее оно не будет включаться явно в формулировки соответствующих результатов.

В [1] получен критерий граничности произвольного класса графов, а также условия граничности некоторого конкретного класса. Это класс  $T$  — класс графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем тремя листьями. Интерес к исследованию случаев граничности именно этого класса был подсказан результатами работы [3], из которых следует его граничность для девяти задач на графах. К этим девяти случаям в [1] было добавлено три новых.

В настоящей работе помимо класса  $T$  рассматривается класс  $D$  — класс графов, каждая компонента связности которых является либо простым путём, либо получается биективным отождествлением трёх концевых вершин трёх простых путей с вершинами треугольника. Внимание к этому классу вызвано тем обстоятельством, что  $D$  является граничным для четырёх задач на графах [3].

Данная работа продолжает начатое в [1] исследование по изучению общих черт задач, для которых классы  $T$  и  $D$  являются граничными. В работе доказывается достаточное условие граничности классов  $T$  и  $D$ , а также показывается полезность этого инструмента при поиске новых случаев граничности указанных классов. Именно, доказывается, что класс  $T$  является граничным для пяти задач, а класс  $D$  — для трёх задач.

Граф  $G$  называется *рёберным к графу  $H$* , если множество вершин  $G$  соответствует рёбрам  $H$ , причём любые две вершины графа  $G$  являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра в  $H$  являются смежными. Если граф  $G$  является рёберным к графу  $H$ , то пишем  $G = L(H)$ . Множество рёберных графов к графам класса  $X$  обозначается через  $L(X)$ .

Введём обозначения:  $G[U]$  — подграф графа  $G = (V, E)$ , порождённый подмножеством вершин  $U \subseteq V$ ;  $K_4 - e$  — граф, получаемый удалением любого ребра из графа  $K_4$ ;  $T_{i,j,k}$  — дерево с тремя листьями, находящи-

мися от вершины степени 3 на расстояниях  $i, j, k$  соответственно;  $D_{i,j,k}$  — рёберный граф к графу  $T_{i+1,j+1,k+1}$ ; мост  $B_k$  — граф, получаемый соединением вершин степени 2 у двух копий графа  $K_{1,2}$  путём длины  $k$ ;  $X^c$  — множество связных графов из класса  $X$ ;  $\text{Deg}(d)$  — класс графов, степени вершин которых не превосходят  $d$ ;  $U(k)$  — класс  $\text{Free}(C_3, \dots, C_{3+k}, B_1, \dots, B_k) \cap \text{Deg}(3)$ .

### 1. Условие граничности

В работе [1] доказан следующий критерий граничности произвольного класса графов.

**Теорема 2.** *П-предельный класс  $A$  является П-граничным тогда и только тогда, когда для каждого  $G \in A$  существует такое конечное множество графов  $X \subseteq \text{Forb}(A)$ , что класс  $\text{Free}(X \cup \{G\})$  является П-простым.*

**Лемма 1** [2]. *Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — связные графы, причём графы  $L(G_1)$  и  $L(G_2)$  изоморфны. Тогда графы  $G_1$  и  $G_2$  будут изоморфны всегда, за исключением случая, когда один из них  $K_{1,3}$ , а другой  $K_3$ .*

*Древесной шириной* графа  $G$  называется такое минимальное  $k$ , при котором  $G$  является подграфом некоторого  $k$ -дерева [5].

**Лемма 2** [7]. *Для любых графов  $G_1 \in T$  и  $G_2 \in D$  существует такое число  $t$ , что древесная ширина графов класса  $\text{Free}(G_1, G_2) \cap \text{Deg}(3)$  ограничена числом  $t$ .*

**Лемма 3** [6]. *Пусть для некоторого числа  $d$  выполнено включение  $X \subseteq \text{Deg}(d)$ . Тогда древесная ширина графов этого класса ограничена некоторым числом  $t_1$  в том и только том случае, когда древесная ширина графов класса  $L(X)$  ограничена некоторым числом  $t_2$ .*

Обозначим через  $\text{TW}(3, t)$  множество графов из  $\text{Deg}(3)$ , древесная ширина которых не превосходит  $t$ .

**Лемма 4.** *Если класс  $T$  является П-предельным и для любого  $t$  задача П полиномиально разрешима в классе  $\text{TW}(3, t) \cap \text{Free}(\{C_3\})$ , то класс  $T$  является П-граничным. Если класс  $D$  является П-предельным и для любого  $t$  задача П полиномиально разрешима в классе  $L(\text{TW}(3, t)) \cap \text{Deg}(3)$ , то класс  $D$  является П-граничным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольный граф  $G \in T$ . Графы  $K_{1,4}$  и  $C_3$  принадлежат множеству  $\text{Forb}(T)$ . Так как  $C_3 \in D$  и

$$\text{Free}(\{G, K_{1,4}, C_3\}) = \text{Free}(\{G, C_3\}) \cap \text{Deg}(3),$$

по лемме 2 древесная ширина графов из  $\text{Free}(\{G, K_{1,4}, C_3\})$  ограничена числом  $t$ , поэтому  $\text{Free}(\{G, K_{1,4}, C_3\}) \subseteq \text{TW}(3, t) \cap \text{Free}(\{C_3\})$ . Из теоремы 2 следует, что  $T$  является  $\Pi$ -граничным.

Рассмотрим произвольный граф  $G \in D$ . Графы  $K_{1,3}$ ,  $K_4$ ,  $K_4 - e$ ,  $L(B_1)$  принадлежат множеству  $\text{Forb}(D)$ . Поскольку  $K_{1,3} \in T$  и

$$X = \text{Free}(\{G, K_{1,3}, K_4, K_4 - e, L(B_1)\}) \subseteq \text{Free}(\{G, C_3\}) \cap \text{Deg}(3),$$

по лемме 2 древесная ширина графов из  $X$  ограничена числом  $t$ . Хотя бы один из графов множества  $\{K_{1,3}, K_4 - e\}$  является порождённым подграфом в любом из девяти запрещённых подграфов класса рёберных графов, список которых можно найти в теореме 8.4 монографии [2]. Поэтому класс  $X$  состоит из рёберных графов, т. е. для некоторого класса  $Y$  справедливо равенство  $X = L(Y)$ . Так как  $K_4 \notin X$ , то  $Y \subseteq \text{Deg}(3)$ . Из леммы 3 следует, что древесная ширина графов класса  $Y$  ограничена некоторым числом  $t^*$ , поэтому  $X \subseteq L(\text{TW}(3, t^*)) \cap \text{Deg}(3)$ . Отсюда и из теоремы 2 следует, что  $D$  является  $\Pi$ -граничным. Лемма 4 доказана.

## 2. Задача о наибольшем подграфе

Пусть  $X$  — некоторый класс графов. Будем предполагать, что существует алгоритм (не обязательно полиномиальный), распознающий принадлежность графа этому классу. Подграф некоторого графа, принадлежащий  $X$ , будем называть  $X$ -подграфом.  $X$ -подграф некоторого графа будем называть *рёберно наибольшим*, если он содержит наибольшее число рёбер, и *вершинно наибольшим*, если этот подграф является порождённым и содержит наибольшее количество вершин. Число рёбер в рёберно наибольшем  $X$ -подграфе графа  $G$  обозначим через  $m_X(G)$ , а количество вершин в вершинно наибольшем  $X$ -подграфе графа  $G$  обозначим через  $n_X(G)$ . В дальнейшем всегда будем считать, что  $K_1 \in X$ , тогда  $m_X(G)$  определено для любого графа  $G$ . Если  $G$  не содержит ни одного порождённого  $X$ -подграфа, то положим  $n_X(G) = 0$ .

Задача о рёберно наибольшем  $X$ -подграфе, называемая далее задачей  $\text{SUBGRAPH}[X]$ , состоит в том, чтобы по данным графу  $G$  и числу  $k$  определить, верно ли, что  $m_X(G) \geq k$ . Задача о вершинно наибольшем  $X$ -подграфе, называемая в дальнейшем задачей  $\text{ISUBGRAPH}[X]$ , состоит в том, чтобы по задаваемым графу  $G$  и числу  $k$  определить, выполняется ли неравенство  $n_X(G) \geq k$ .

**Лемма 5.** Пусть класс  $X$  состоит из связных графов. Тогда в любом классе графов  $Y$  задача  $\text{SUBGRAPH}[X]$  полиномиально эквивалентна задаче  $\text{ISUBGRAPH}[L(X)]$  в классе  $L(Y)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $H \in Y$ , причём  $G = L(H)$ . Графы  $G$  и  $H$  можно считать связными. Ясно, что задача SUBGRAPH[ $X$ ] для графов  $K_3$ ,  $K_{1,3}$  и задача ISUBGRAPH[ $L(X)$ ] для графа  $K_3$  решается за  $O(1)$  время. Поэтому можно предполагать, что  $G \neq K_3$ ,  $H \neq K_3$ ,  $H \neq K_{1,3}$ . Тогда из леммы 1 следует, что один из графов множества  $\{G, H\}$  однозначно определяет другой. Понятно, что граф  $G$  может быть построен из  $H$  за полиномиальное время. Обратно, граф  $H$  может быть построен из  $G$  за полиномиальное время [9].

Очевидно, что рёберный граф к любому  $X$ -подграфу графа  $H$  является порождённым  $L(X)$ -подграфом графа  $G$ , поэтому  $n_{L(X)}(G) \geq m_X(H)$ . Рассмотрим два случая. Если  $n_{L(X)}(G) \leq 3$ , то  $m_X(H) \leq 3$ . Понятно, что этом случае число  $m_X(H)$  вычисляется за  $O(1)$  время. Если  $n_{L(X)}(G) > 3$ , то любой вершинно наибольший  $L(X)$ -подграф графа  $G$  отличен от графа  $C_3$ . Тогда из леммы 1 следует, что  $H$  содержит некоторый  $X$ -подграф, число рёбер которого не менее  $n_{L(X)}(G)$ . Таким образом, если  $n_{L(X)}(G) > 3$ , то  $m_X(H) = n_{L(X)}(G)$ .

Из рассуждений следует утверждение леммы. Лемма 5 доказана.

Через TO обозначим класс всех графов сравнимости, т.е. транзитивно ориентируемых графов, а через Bipartite обозначим класс всех двудольных графов. Очевидно, что оба класса графов являются наследственными.

**Лемма 6.** Для любого графа  $G \in \text{Free}(\{C_3\})$  имеет место равенство  $m_{\text{TO}} = m_{\text{Bipartite}}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $H_1$  — рёберно наибольший двудольный подграф графа  $G$ . Ясно, что граф  $H_1$  является транзитивно ориентируемым (поскольку его рёбра можно ориентировать так, что стоки окажутся в одной доле, а источники — в другой), поэтому  $m_{\text{TO}} \geq m_{\text{Bipartite}}$ .

Пусть  $H_2$  — рёберно наибольший TO-подграф графа  $G$ . Понятно, что  $H_2$  не содержит треугольников. Так как для любого  $k > 1$  цикл  $C_{2k+1}$  не принадлежит классу TO, то  $H_2$  является двудольным графом. Поэтому  $m_{\text{TO}} \leq m_{\text{Bipartite}}$ . Лемма 6 доказана.

Обозначим через Path класс всех простых путей, а через Cycle — класс всех простых циклов.

**Лемма 7.** Для любого связного рёберного графа  $G \in \text{Deg}(3)$ , отличного от простого цикла и графа  $K_4$ , выполнено неравенство  $n_{\text{Path}}(G) \geq n_{\text{Cycle}}(G)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $C$  — наибольший порождённый цикл графа  $G$ . Так как граф  $G$  отличен от цикла, то существует вершина  $x$ , не

принадлежащая  $C$  и смежная хотя бы с одной вершиной цикла  $C$ . Пусть длина цикла  $C$  равна 3, тогда вершина  $x$  не может быть смежна сразу со всеми тремя его вершинами. Следовательно, граф  $G$  содержит порождённый путь на трёх вершинах. Далее будем считать, что длина  $C$  не менее чем 4. Вершина  $x$  не может быть смежна ровно с одной вершиной цикла  $C$ , так как иначе образовался бы порождённый  $K_{1,3}$  и граф  $G$  не был бы рёберным. Рассмотрим два возможных случая.

1. Вершина  $x$  смежна ровно с двумя вершинами цикла  $C$ . Эти вершины обязательно должны быть смежными, иначе снова образуется порождённый  $K_{1,3}$ . Таким образом, вершина  $x$  смежна с двумя смежными вершинами  $v_1$  и  $v_2$ . Но тогда граф  $G$  содержит путь длины  $n_{\text{Cycle}}$ , порождённый вершиной  $x$  и всеми вершинами  $C$ , кроме  $v_1$ .

2. Вершина  $x$  смежна с тремя вершинами  $v_1, v_2, v_3$  цикла  $C$ . Понятно, что эти вершины обязательно должны быть последовательными, иначе снова образуется порождённый  $K_{1,3}$ . Будем считать, что  $(v_1, v_2) \in E(G)$  и  $(v_2, v_3) \in E(G)$ . Пусть  $a$  и  $b$  — такие вершины цикла  $C$ , что  $a \neq v_2$ ,  $b \neq v_2$  и  $(a, v_1) \in E(G)$ ,  $(b, v_3) \in E(G)$ . Тогда вершины  $x, v_1, v_2, v_3, a, b$  порождают подграф графа  $G$ , не являющийся рёберным [2]. Поэтому и сам граф  $G$  не является рёберным. Лемма 7 доказана.

Задача о рёберно наибольшем связном подграфе ограниченной степени, называемая в дальнейшем задачей BDCS, состоит в том, чтобы по задаваемому графу  $G$ , числам  $d$  и  $k$  определить, содержит ли граф  $G$  подграф из  $\text{Deg}(d)^c$ , число рёбер которого не менее чем  $k$ . Задача о вершинно наибольшем связном подграфе ограниченной степени, называемая в дальнейшем задачей BDCIS, состоит в том, чтобы по задаваемому графу  $G$ , числам  $d$  и  $k$  определить, содержит ли граф  $G$  порождённый подграф из  $\text{Deg}(d)^c$ , число вершин которого не менее чем  $k$ .

**Теорема 3.** *Класс  $T$  является BDCS-граничным, а  $D$  — BDCIS-граничным. Кроме того, класс  $T$  является SUBGRAPH[TO]-граничным, а класс  $D$  — ISUBGRAPH[Path]- и ISUBGRAPH[Cycle]-граничным.*

**Доказательство.** Понятно, что  $L(\text{Path}) = \text{Path}$ ,  $L(\text{Cycle}) = \text{Cycle}$ . Класс  $U(k)$  является SUBGRAPH[Path]- и SUBGRAPH[Cycle]-сложным при любом  $k > 2$  [3]. Отсюда и из леммы 5 следует, что при любом  $k$  класс  $L(U(k))$  является ISUBGRAPH[Path]- и ISUBGRAPH[Cycle]-сложным.

Понятно, что пары задач BDCS и SUBGRAPH[ $\text{Deg}(2)^c$ ], BDCIS и ISUBGRAPH[ $\text{Deg}(2)^c$ ] в классе графов  $\text{Deg}(3)$  являются парами полиномиально эквивалентных задач. Очевидно, что для любого графа

$G \in \text{Deg}(3)$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} n_{\text{Deg}(2)^c}(G) &= \max(n_{\text{Path}}(G), n_{\text{Cycle}}(G)), \\ m_{\text{Deg}(2)^c}(G) &= \max(m_{\text{Path}}(G), m_{\text{Cycle}}(G)). \end{aligned}$$

Так как при любом  $k$  справедливо включение  $L(U(k)) \subseteq \text{Deg}(3)$ , то из леммы 7 следует, что задача  $\text{ISUBGRAPH}[\text{Path}]$  для графов класса  $L(U(k))$  полиномиально сводима к задаче  $\text{ISUBGRAPH}[\text{Deg}(2)^c]$  для графов того же класса. Отсюда следует, что при любом  $k$  класс  $L(U(k))$  является  $\text{ISUBGRAPH}[\text{Deg}(2)^c]$ -сложным. Так как  $L(\text{Deg}(2)^c) = \text{Deg}(2)^c$ , то из леммы 5 следует, что класс  $U(k)$  является  $\text{SUBGRAPH}[\text{Deg}(2)^c]$ -сложным при любом  $k$ . Таким образом, при любом  $k$  класс  $U(k)$  является BDCS-сложным, а класс  $L(U(k))$  является BDCIS-сложным.

Из леммы 6 следует, что при любом  $k$  задачи  $\text{SUBGRAPH}[\text{Bipartite}]$  и  $\text{SUBGRAPH}[\text{TO}]$  в классе  $U(k)$  полиномиально эквивалентны. При любом  $k$  класс  $U(k)$  является  $\text{SUBGRAPH}[\text{Bipartite}]$ -сложным [1], поэтому при любом  $k$  этот класс является  $\text{SUBGRAPH}[\text{TO}]$ -сложным.

Легко проверить, что при любом  $k$  классы  $U(k)$  и  $L(U(k))$  являются наследственными, выполняются включения

$$U(k) \supseteq U(k+1), \quad L(U(k)) \supseteq L(U(k+1))$$

и имеют место равенства

$$T = \bigcap_{k=1}^{\infty} U(k), \quad D = \bigcap_{k=1}^{\infty} L(U(k)).$$

Поэтому из предыдущих рассуждений следует, что класс  $T$  является BDCS- и  $\text{SUBGRAPH}[\text{TO}]$ -предельным, а класс  $D$  является BDCIS-,  $\text{ISUBGRAPH}[\text{Path}]$ - и  $\text{ISUBGRAPH}[\text{Cycle}]$ -предельным. При любом фиксированном  $t$  класс  $\text{TW}(3, t)$  является  $\text{SUBGRAPH}[\text{Bipartite}]$ -,  $\text{SUBGRAPH}[\text{Path}]$ - и  $\text{SUBGRAPH}[\text{Cycle}]$ -простым [4]. Из проделанных рассуждений и лемм 4, 5 и 6 следует BDCS- и  $\text{SUBGRAPH}[\text{TO}]$ -граничность класса  $T$  и BDCIS-,  $\text{ISUBGRAPH}[\text{Path}]$ - и  $\text{ISUBGRAPH}[\text{Cycle}]$ -граничность класса  $D$ . Теорема 3 доказана.

### 3. Новые случаи граничности класса $T$

Множество путей  $\{\text{Path}_1, \text{Path}_2, \dots, \text{Path}_k\}$  некоторого графа  $G$  будем называть  $DP(s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k)$ -системой, если любые два его



пути не имеют общих вершин и при любом  $i$  путь  $Path_i$  соединяет вершины  $s_i$  и  $t_i$  графа  $G$ . Задача о непересекающихся путях (задача DP) состоит в том, чтобы по задаваемым графу  $G$ , его вершинам  $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k$  определить, содержит ли граф  $DP(s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k)$ -систему.

**Лемма 8.** *При любом  $r$  класс  $U(r)$  является DP-сложным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $G \in \text{Deg}(3)$  и граф  $G_r$  получается из графа  $G$  заменой каждого ребра путём длины  $r + 1$ . Ясно, что для графа  $G$  и его вершин  $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k$   $DP(s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k)$ -система существует тогда и только тогда, когда такая система существует для графа  $G_r$  и его вершин  $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k$ . Поскольку  $G_r \in U(r)$ , задача DP в классе графов  $\text{Deg}(3)$  полиномиально сводима к той же задаче в классе  $U(r)$ . Отсюда следует, что при любом  $r$  класс  $U(r)$  является DP-сложным, так как класс  $\text{Deg}(3)$  является DP-сложным [8]. Лемма 8 доказана.

*Вершинным покрытием* графа называется такое подмножество его вершин, что любое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине из подмножества. Количество вершин в *наименьшем вершинном покрытии* (т.е. покрытии с минимальным числом вершин) графа  $G$  обозначим через  $\beta(G)$ . Задача о вершинном покрытии (задача VC) состоит в том, чтобы для заданных графа  $G$  и числа  $k$  определить, выполняется ли неравенство  $\beta(G) \leq k$ .

*Покрытием полными двудольными графами (CCBS)* графа  $G$  называется такая система подмножеств  $\{V_1, V_2, \dots, V_s\}$  множества  $V(G)$ , что выполняются следующие условия.

1. Для любого  $i$  подграф  $G[V_i]$  является полным двудольным графом.
2. Для любого ребра  $e$  графа  $G$  существует такое подмножество  $V_j$ , что граф  $G[V_j]$  содержит  $e$ .

Покрытие полными двудольными графами называется *наименьшим*, если оно содержит минимальное количество полных двудольных графов. Количество графов в наименьшем CCBS графа  $G$  обозначим через  $\text{ccbs}(G)$ . Задача о покрытии полными двудольными графами, называемая далее задачей CCBS, состоит в том, чтобы по заданному графу  $G$  и числу  $k$  определить, выполняется ли неравенство  $\text{ccbs}(G) \leq k$ .

**Лемма 9.** *Для любого  $k$  класс  $U(k)$  является CCBS-сложным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим граф  $G \in U(k)$ . Покажем, что  $\beta(G) = \text{ccbs}(G)$ . Пусть  $\{V_1, V_2, \dots, V_{\text{ccbs}(G)}\}$  — наименьшее CCBS графа  $G$ . Ясно, что при любом  $i$  граф  $G[V_i]$  является либо графом  $K_2$ , либо графом  $K_{1,2}$ , либо графом  $K_{1,3}$ . Для любого  $i$  в графе  $G[V_i]$  выберем вер-



шину наибольшей степени. Понятно, что построенное множество будет вершинным покрытием графа  $G$ . Таким образом,  $\beta(G) \leq \text{ccbs}(G)$ .

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_{\beta(G)}$  — наименьшее вершинное покрытие графа  $G$ . Для каждой вершины  $v_i$  этого множества рассмотрим  $V_i$  — множество смежных с  $v_i$  вершин. Ясно, что при любом  $i$  граф  $G[V_i \cup \{v_i\}]$  принадлежит множеству  $\{K_2, K_{1,2}, K_{1,3}\}$ . Поэтому множество

$$\{V_1 \cup \{v_1\}, V_2 \cup \{v_2\}, \dots, V_{\beta(G)} \cup \{v_{\beta(G)}\}\}$$

является *CCBS* графа  $G$ . Отсюда  $\beta(G) \geq \text{ccbs}(G)$ .

При любом  $k$  класс  $U(k)$  является ВП-сложным [3]. Отсюда и из равенства  $\beta(G) = \text{ccbs}(G)$  следует, что при любом  $k$  класс  $U(k)$  является *CCBS*-сложным. Лемма 9 доказана.

Задача о разбиении на пути длины 2 (задача *PPLT*) состоит в том, чтобы по задаваемому графу  $G$  определить, можно ли так разбить  $V(G)$  на подмножества  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , что для любого  $i$  граф  $G[V_i]$  изоморфен графу  $P_3$ .

$(B, s)$ -Разбиением на деревья графа  $G$  называется такое разбиение множества  $V(G)$  на подмножества  $V_1, V_2, \dots, V_s$ , что при любом  $i$  подграф  $G[V_i]$  является деревом и содержит не более  $B$  вершин. Задача о лесе с ограниченными компонентами, называемая далее задачей *BCF*, состоит в том, чтобы по задаваемому графу  $G$ , числам  $B$  и  $k$  определить, имеет ли граф  $(B, s)$ -разбиение на деревья для некоторого  $s \leq k$ .

**Теорема 4.** Класс  $T$  является *DP*-, *CCBS*- и *BCF*-граничным.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В работе [3] показано, что при любом  $k$  класс графов  $U(k)$  является *PPLT*-сложным. Ясно, что задача *PPLT* в любом классе графов  $X$  полиномиально сводима к задаче *BCF* для графов того же класса. Таким образом, класс  $U(k)$  является *BCF*-сложным при любом  $k$ . Отсюда и из лемм 8, 9 следует, что класс  $T$  является *DP*-, *CCBS*- и *BCF*-предельным. Известно, что при любом фиксированном  $t$  класс графов  $\text{TW}(3, t)$  является *DP*- [10], *CCBS*- и *BCF*-простым [4]. Граничность класса  $T$  для всех трёх указанных задач следует из леммы 4. Теорема 4 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. Е., Малышев Д. С. Критерий граничности и его применения // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. Т. 15, №6. — С. 3–10.
2. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 с.
3. Alekseev V. E., Boliać R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V. NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoret. Comp. Sci. — 2007. — V. 389. — P. 219–236.

4. **Bodlaender H. L.** Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Automata, languages and programming (Tampere, 1988). Proc. — Berlin: Springer-Verl., 1988. — P. 105–118. (Lect. Notes in Comp. Sci.; V. 317.)
5. **Kloks T.** Treewidth, computations and approximations // Lect. Notes in Comp. Sci. — Berlin: Springer-Verl., 1994. — V. 842. — P. 211.
6. **Lozin V. V.** Boundary classes of planar graphs // Combinatorics, Probability and Computing. — 2008. — V. 17. — P. 287–295.
7. **Lozin V. V., Rautenbach D.** On the band-, tree- and clique-width of graphs with bounded vertex degree // SIAM J. Discrete Math. — 2004. — V. 18. — P. 195–206.
8. **Middendorf M., Pfeiffer F.** On the complexity of the disjoint path problem // Combinatorica. — 1993. — V. 13, N 1. — P. 97–107.
9. **Roussopoulos N.** A  $\max\{m, n\}$  algorithm for determining the graph  $H$  from its line graph  $G$  // Information Processing Letters. — 1973. — V. 2, N 4. — P. 108–112.
10. **Scheffler P.** A practical linear algorithm for vertex disjoint path in graphs with bounded treewidth // Technical report №396, Department of Mathematics, Technische Universität Berlin, 1994. — 21 p.

Малышев Дмитрий Сергеевич,  
e-mail: ave@uic.nnov.ru

Статья поступила  
20 октября 2008 г.  
Переработанный вариант —  
9 февраля 2009 г.