

УДК 519.8

## СЕНСОРНЫЕ СЕТИ И ПОКРЫТИЕ ПЛОСКОСТИ КРУГАМИ \*)

С. Н. Астраков, А. И. Ерзин, В. В. Залюбовский

**Аннотация.** Рассматривается задача энергоэффективного регулярного покрытия плоской области сенсорами с двумя выбираемыми радиусами мониторинга. В работе уточняются и усиливаются известные результаты о качестве покрытий, а также оптимизируются суммарные энергозатраты на мониторинг и передачу данных между элементами сенсорной сети. В математическом плане поставлены и решены несколько задач покрытия плоскости кругами в духе классических работ Л. Ф. Тота о расположениях на плоскости. Рассмотренные задачи, относясь к конкретным типам покрытий, дают тем не менее некоторое представление об общей ситуации. Существенно, что вариативность радиусов покрытия оказалась актуальной и перспективной в прикладном аспекте.

**Ключевые слова:** сенсорная сеть, покрытие плоскости кругами, плотность покрытия.

### Введение

Беспроводная сенсорная сеть (БСС) состоит из большого числа сенсоров, которые размещены в области мониторинга и используют беспроводную связь для обмена информацией. Основными функциями сенсора являются сбор (мониторинг), первичная обработка и передача информации. При этом область мониторинга каждого сенсора обычно представляется в виде круга определённого радиуса с центром в месте расположения сенсора, и говорится, что сенсор *покрывает* этот круг [11]. Весьма остро стоит вопрос об экономии энергии сенсоров [2–5, 10], которая в основном расходуется на мониторинг и передачу данных внутри сети [7], и поэтому её траты тесно связаны с геометрическими параметрами сети.

Эффективность покрытия плоской области характеризуется суммарным перекрытием кругов мониторинга сенсоров. Подавляющее большинство известных моделей размещения сенсоров исходит из предположения, что радиусы мониторинга  $R$  всех сенсоров одинаковы. В этом случае

---

\*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–07–91300–ИНД\_а).

минимум энергоёмкости мониторинга достигается, когда каждая тройка соседних сенсоров образует равносторонний треугольник со стороной  $R\sqrt{3}$  [6, 12] (см. рис. 1а). Появление сенсоров с регулируемым радиусом мониторинга даёт дополнительные возможности для повышения эффективности функционирования БСС.

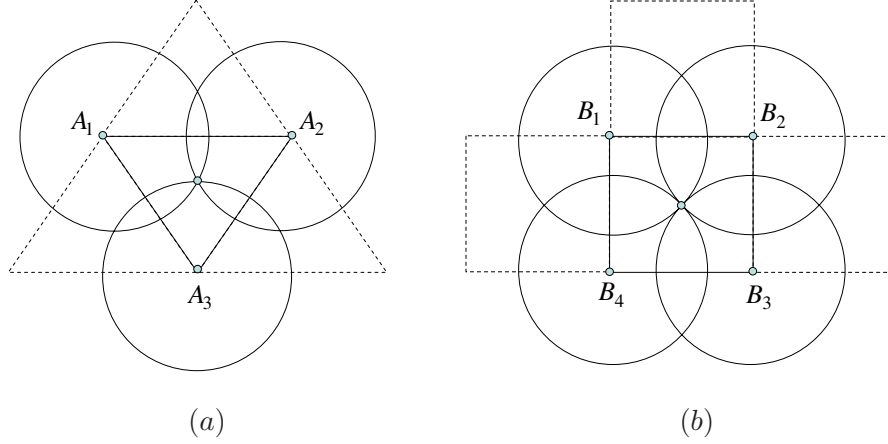


Рис. 1. (a) — покрытие  $T1$ ; (b) — покрытие  $Q1$

Назовём *покрытием* плоской области  $S$  такую совокупность кругов  $C$ , что каждая точка области принадлежит хотя бы одному из них. Определим *плотность* покрытия как отношение площади всех кругов  $C$  к площади области  $S$ . Под *регулярным покрытием*  $COV_k(p, q)$  будем понимать такое покрытие плоскости кругами, при котором вся область может быть разбита на правильные  $k$ -угольники (*плитки*), образуя бесконечную регулярную решётку. При этом все  $k$ -угольники должны покрываться одинаково  $p$  кругами  $q$  различных радиусов и каждый узел решётки (вершина  $k$ -угольника) должен быть центром одного круга. Очевидно, в случае регулярных покрытий плотность покрытия каждой плитки (отношение площадей кругов внутри плитки к площади плитки) одинакова, что даёт основание говорить о плотности покрытия всей плоскости.

Задача покрытия плоскости кругами различных радиусов исследована сравнительно мало. В [8] найдена нижняя оценка плотности покрытия кругами двух радиусов, равная приблизительно 1,0189. Однако предложенный там способ покрытия (см. рис. 2а) предполагает использование большого числа кругов малого радиуса (непокрытое пространство между тремя соседними кругами большого радиуса покрывается большим

количеством одинаковых кругов меньшего радиуса, и нижняя оценка плотности достигается в пределе, когда маленький радиус стремится к нулю). Это делает его неприемлемым для практического применения.

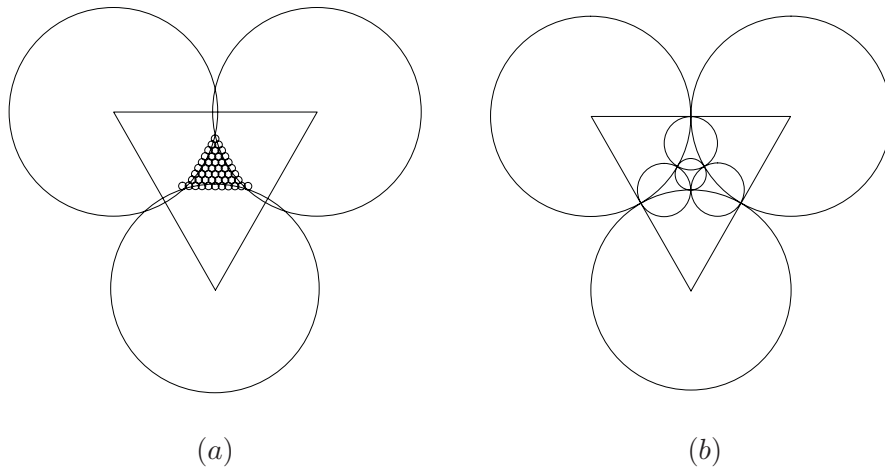


Рис. 2. (a) — покрытие кругами двух радиусов [8]; (b) — покрытие кругами трёх радиусов [11]

Существуют три типа  $T$ ,  $Q$  и  $H$  решёток, которые замощают плоскость правильными многоугольниками: треугольная ( $k = 3$ ), квадратная ( $k = 4$ ) и гексагональная ( $k = 6$ ). Поскольку третий тип либо сводится с первым, либо проигрывает ему по качеству, далее рассматриваются решётки типов  $T$  и  $Q$ .

Задача  $P_k(p, q)$  состоит в поиске регулярного покрытия  $COV_k(p, q)$  минимальной плотности. При этом для  $T$ -решёток и  $Q$ -решёток задачу  $P_k(p, q)$  условимся обозначать соответственно через  $T(p, q)$  и  $Q(p, q)$ . Покрытия для задач  $T(3, 1)$  и  $Q(4, 1)$  обозначим через  $T1$  и  $Q1$  и отнесём к первому уровню, покрытия для задач  $T(4, 2)$  и  $Q(5, 2)$  обозначим через  $T2$  и  $Q2$  и отнесём ко второму уровню, если круги с центрами в смежных вершинах плитки («главные круги») касаются, и к третьему уровню (обозначив через  $T3$  и  $Q3$ ), если главные круги с центрами в смежных вершинах многоугольника пересекаются.

Известно наименее плотное покрытие  $T1$  плоскости одинаковыми кругами [6, 12], которое в наших обозначениях является оптимальным решением задачи  $T(3, 1)$ , а также асимптотически оптимальное решение задачи  $T(p, 2)$  [8] и нижняя оценка плотности покрытия в задаче  $T(p, p)$  [1]. В общем же случае (при произвольных значениях параметров  $p$  и  $q$ ) оп-

тимальные решения для задачи  $P_k(p, q)$  неизвестны.

Покрывтия  $T1$  и  $T2$  использовались ранее в сенсорных сетях [11, 12]. Покрывтия же  $Q1$  и  $Q2$  в БСС не использовались, так как при учёте только энергоэффективности покрытия они проигрывают покрытиям  $T1$  и  $T2$ . Покрывтия  $T3$  и  $Q3$  предложены нами впервые, и они дают существенное уменьшение плотности покрытия по сравнению с известными ранее.

## 1. Покрывтия первого и второго уровней

**1.1. Покрывтия первого уровня.** В покрытиях первого уровня используются круги одного радиуса  $R$ . В покрытии  $T1$  любые три попарно смежные узла решётки являются вершинами равностороннего треугольника ( $A_1A_2A_3$  на рис. 1a) со стороной  $R\sqrt{3}$  и круги с центрами в этих вершинах пересекаются в единственной точке. Покрытие  $T1$  впервые рассмотрено в 1939 г. в работе [6], где доказана его оптимальность для задачи  $T(3, 1)$ . Позже оно нашло применение в сенсорных сетях [12].

В покрытии  $Q1$  четыре попарно смежные узла решётки являются вершинами квадрата ( $B_1B_2B_3B_4$  на рис. 1b) со стороной  $R\sqrt{2}$  и круги радиуса  $R$  с центрами в этих вершинах пересекаются в единственной общей точке.

Плотность покрытия  $T1$  — отношение суммарной площади  $Sf$  всех частей кругов внутри плитки к площади  $Sp$  плитки — равна

$$D_{T1} = \frac{Sf_{T1}}{Sp_{T1}} = \frac{\pi R^2/2}{3R^2\sqrt{3}/4} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,2091,$$

а плотность покрытия  $Q1$  равна

$$D_{Q1} = \frac{Sf_{Q1}}{Sp_{Q1}} = \frac{\pi R^2}{2R^2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,5708.$$

В литературе, относящейся к сенсорным сетям, не всегда правильно оценивается качество покрытия. Например, в работе [11] плотность покрытия определяется как отношение площади *трёх* соседних кругов, центры которых образуют вершины треугольной плитки, к площади, покрытой этими кругами. В результате получается величина  $D_{T1}^{[11]} = 6\pi\mu_s/(4\pi + 3\sqrt{3}) \approx 1,0615\mu_s$ , что, очевидно, неверно. Действительно, в покрытии  $T1$  каждый круг пересекается с шестью другими кругами, в то время как авторы [11] учитывают только два пересечения. Если взять отношение площади  $m \neq 3$  кругов к покрытой ими площади, то получится другая величина плотности. Мы же учитываем все пересечения кругов

внутри плитки, и в силу того, что плитки замощают всю область без пересечений, наши вычисления корректны. Более того, в [6] показано, что минимальное число кругов  $N$ , достаточное для покрытия площади  $S$  кругами одинакового радиуса  $R \ll S$ , удовлетворяет соотношению  $N\pi R^2/S = 2\pi/\sqrt{27} \approx 1,2091$ . Отсюда следует, что плотность покрытия области одинаковыми кругами не может быть меньше  $2\pi/\sqrt{27} \approx 1,2091$ , что согласуется с результатами из [6] и противоречит результатам из [11].

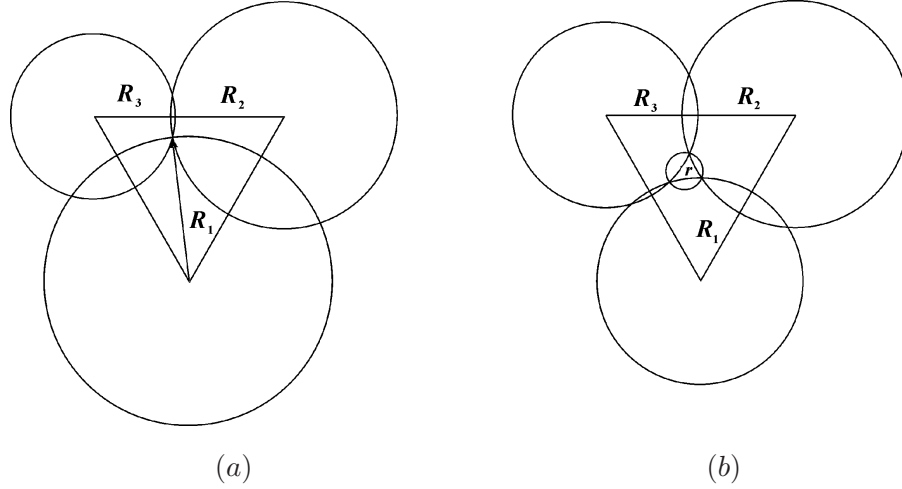


Рис. 3. (a) — покрытие для задачи  $T(3, 3)$ ; (b) — покрытие для задачи  $T(4, 4)$

**Лемма 1.** *Покрытие  $T1$  ( $Q1$ ) является оптимальным для задач  $T(3, q)$ ,  $q = 1, 2, 3$  ( $Q(4, q)$ ,  $q = 1, 2, 3, 4$ ).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем утверждение для покрытия  $T1$ , для  $Q1$  оно доказывается аналогично. Пусть длина стороны треугольника равна 1, радиусы кругов, покрывающих треугольник, равны  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , и все эти круги пересекаются в одной точке (см. рис. 3a). Сохраняя радиус  $R_1$  нижнего круга, положим радиусы других кругов равными  $R'_2 = R'_3 = (R_2 + R_3)/2$ . Простым сравнением плотностей покрытий до и после изменения радиусов приходим к выводу, что плотность покрытия не увеличилась. При этом нижняя точка пересечения окружностей радиусов  $R'_2$  и  $R'_3$  находится в круге радиуса  $R_1$ . Пусть  $R = R(R_1) \leq (R_2 + R_3)/2$  радиус верхних (см. рис. 3a) окружностей, при котором точка их пересечения лежит на окружности радиуса  $R_1$ . Тогда  $R(R_1) = \sqrt{1/4 + (\sqrt{3}/2 - R_1)^2}$ . Минимизация плотности покрытия треугольника приводит к равенству  $R = R_1 = \sqrt{3}/3$ . Тем самым в оптимальном решении задачи  $T(3, q)$ ,  $q = 1, 2, 3$ , радиусы кругов совпадают,

что соответствует покрытию  $T1$ . Лемма 1 доказана.

**1.2. Покрытия второго уровня.** В покрытиях второго уровня каждые два из главных кругов радиуса  $R$  с центрами в смежных вершинах плитки касаются друг друга, и пустое пространство многоугольника между ними покрывается одним *дополнительным* кругом (см. рис. 4). В покрытии  $T2$  радиус дополнительного круга равен  $r = R/\sqrt{3}$ , а в покрытии  $Q2$  —  $r = R$ . Плотность покрытия  $Q2$  совпадает с плотностью покрытия  $Q1$ , а плотность покрытия  $T2$  равна

$$D_{T2} = \frac{Sf_{T2}}{R^2\sqrt{3}} = \frac{5\pi R^2/6}{Sp_{T2}} = \frac{5\pi}{6\sqrt{3}} \approx 1,5115,$$

что существенно больше плотности покрытия  $T1$ . Различие между величиной  $D_{T2}$  и соответствующей плотностью, вычисленной в [11],

$$D_{T2}^{[11]} = \frac{\pi(3R^2 + r^2)}{(\sqrt{3} + 5\pi/2)R^2} = \frac{20\pi}{6\sqrt{3} + 15\pi} \approx 1,0924,$$

становится еще заметнее, чем между  $D_{T1}$  и  $D_{T1}^{[11]}$ , что обусловлено некорректностью вычислений в работе [11].

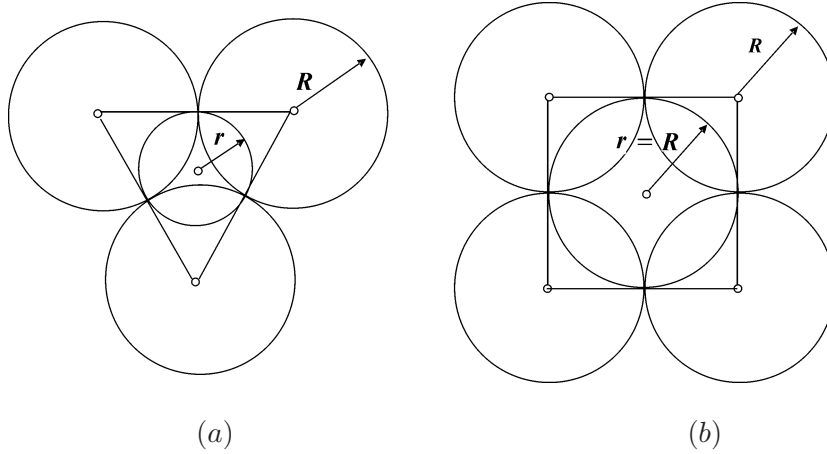


Рис. 4. (a) — покрытие  $T2$ ; (b) — покрытие  $Q2$

## 2. Покрытия третьего уровня

Если главные круги с центрами в попарно смежных вершинах многоугольника частично пересекаются, то, как и в покрытиях второго уровня,

покрывается не вся плитка. Поэтому для покрытия всей плитки необходимо использовать соответствующие дополнительные круги.

**2.1. Покрытие  $T3$ .** В покрытии  $T3$  допускается одинаковое пересечение главных кругов радиуса  $R$ , центры которых определяют вершины правильного треугольника, и находится радиус  $r$  одного дополнительного круга, минимизирующий плотность покрытия плитки (см. рис. 5a). Сторона треугольной плитки определяется после размещения центров главных кругов. Очевидно, задание радиуса  $r$  однозначно определяет размещение главных кругов радиуса  $R$ .

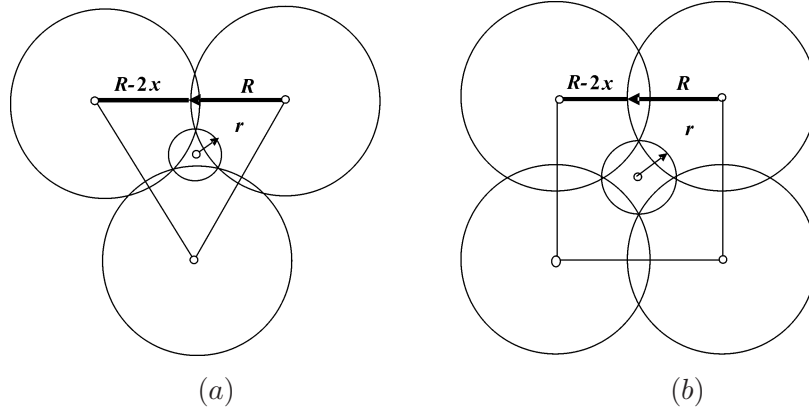


Рис. 5. (a) — покрытие  $T3$ ; (b) — покрытие  $Q3$

**Теорема 1.** Оптимальное размещение кругов в покрытии  $T3$  определяется следующими значениями параметров:  $r = R/\sqrt{31} \approx 0,1796R$ ;  $a = 6R\sqrt{3}/\sqrt{31} \approx 1,8665R$ , где  $a$  — расстояние между центрами соседних кругов радиуса  $R$  (сторона треугольной плитки), что приводит к плотности покрытия  $D_{T3} = 11\pi/(18\sqrt{3}) \approx 1,1084$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Обозначим  $x = R - a/2$ . Имеем  $r = t/\sqrt{3} - \sqrt{R^2 - t^2}$ , где  $t = R - x$ . Тогда  $Sp_{T3} = a^2\sqrt{3}/4 = (R - x)^2\sqrt{3} = t^2\sqrt{3}$ ;  $Sf_{T3} = \pi R^2/2 + \pi(t/\sqrt{3} - \sqrt{R^2 - t^2})^2$ . Для минимизации плотности покрытия необходимо решить следующую оптимизационную задачу одной переменной:

$$D_{T3} = \frac{Sf_{T3}}{Sp_{T3}} = \frac{\pi R^2/2 + \pi(t/\sqrt{3} - \sqrt{R^2 - t^2})^2}{t^2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left( \frac{3R^2}{2t^2} - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{R^2 - t^2}}{t\sqrt{3}} \right) \rightarrow \min_t.$$

Её решением является  $t = 3R\sqrt{3}/\sqrt{31}$ , что определяет  $x = R(\sqrt{31} - 3\sqrt{3})/\sqrt{31}$  и  $r = R/\sqrt{31}$ . В результате получаем  $Sp_{T3} = 27R^2\sqrt{3}/\sqrt{31}$ ;  $Sf_{T3} = 33\pi R^2/62$ ;  $D_{T3} = Sf_{T3}/Sp_{T3} = 11\pi/(18\sqrt{3}) \approx 1,1084$ . Теорема 1 доказана.

Отметим близость плотности покрытия к нижней оценке 1,0189 [8]. Кроме того, радиус  $r$  дополнительного круга в покрытии  $T3$  на 39% меньше радиуса дополнительного круга в покрытии  $T2$ . При этом плотность покрытия  $T3$  уменьшилась по сравнению с плотностью в  $T2$  на 41%. Покрытие  $T3$  эффективнее покрытия  $T1$  на 10%.

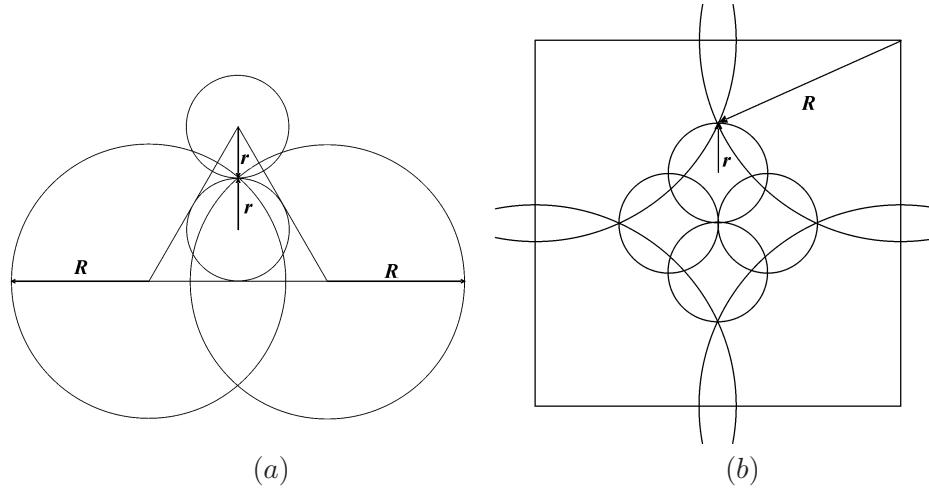


Рис. 6. (a) — иллюстрация к доказательству леммы 2; (b) — решение задачи  $Q(8,2)$

**Лемма 2.** Покрытие  $T3$  является оптимальным для задачи  $T(4,2)$ .

**Доказательство.** Если радиусы кругов с центрами в вершинах треугольника совпадают, то, как показано выше, покрытие  $T3$  является оптимальным. В силу того, что для покрытия треугольника используются круги *двух* радиусов, кроме покрытия  $T3$ , может быть использовано покрытие, в котором два круга с центрами в вершинах треугольника имеют одинаковый радиус  $R$ . Тогда радиусы круга с центром в третьей вершине плитки и дополнительного круга должны совпадать (пусть они равны  $r$ ) и дополнительный круг должен целиком находиться внутри плитки (иначе для покрытия треугольника будет использовано более четырёх кругов). Даже если дополнительный круг вписан в треугольник, он будет касаться такого же круга с центром в вершине треугольника (см. рис. 6a). Значит, для покрытия всего треугольника два других круга (радиуса  $R$ ) должны пересекаться в точке касания кругов радиуса  $r$ ,

и дополнительный круг радиуса  $r$  является в этом покрытии излишним. Лемма 2 доказана.

Существуют регулярные покрытия треугольника четырьмя кругами *различных* радиусов (см. рис. 3b), но покрытие  $T3$  оказывается оптимальным и для этого класса задач, что следует из следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Покрытие  $T3$  является оптимальным для задач  $T(4, p)$ ,  $p = 1, 2, 3, 4$ .*

Доказательство теоремы 2 приведено в приложении.

**2.2. Покрытие  $Q3$ .** В покрытии  $Q3$  плитка — это квадрат, определяемый центрами четырёх попарно пересекающихся кругов радиуса  $R$ , и все эти круги пересекаются с одним дополнительным кругом радиуса  $r$  (см. рис. 5b).

**Теорема 3.** *Размещение кругов в покрытии  $Q3$ , при котором плотность покрытия минимальна, определяется следующими значениями параметров:  $r = R/\sqrt{5} \approx 0,4472R$ ;  $a = 4R/\sqrt{5} \approx 1,7889R$ , где  $a$  — расстояние между кругами радиуса  $R$  (сторона квадратной плитки). При этом плотность покрытия равна  $D_{Q3} = 3\pi/8 \approx 1,1788$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим  $x = R - a/2$ . Тогда  $r = t - \sqrt{R^2 - t^2}$ , где  $t = R - x$ . Вычислим  $Sp_{Q3} = 4(R - x)^2 = 4t^2$ ;  $Sf_{Q3} = \pi R^2 + \pi(t - \sqrt{R^2 - t^2})^2$ . Для минимизации плотности решим задачу

$$\frac{Sf_{Q3}}{Sp_{Q3}} = \frac{\pi R^2 + \pi(t - \sqrt{R^2 - t^2})^2}{4t^2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{R^2}{t^2} - \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{t} \right) \rightarrow \min_t.$$

Минимум достигается при  $t = 2R/\sqrt{5}$ , откуда  $a = 4R/\sqrt{5}$  и  $r = R/\sqrt{5}$ . В результате имеем  $Sp_{Q3} = 16R^2/5$ ;  $Sf_{Q3} = 6\pi R^2/5$ ;  $D_{Q3} = Sf_{Q3}/Sp_{Q3} = 3\pi/8 \approx 1,1788$ . Теорема 3 доказана.

Отметим, что полученная плотность  $D_{Q3}$  на 33% меньше плотности покрытий  $Q1$  и  $Q2$ .

**Лемма 3.** *Покрытие  $Q3$  является оптимальным для задач  $Q(5, 2)$  и  $Q(4, 2)$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В задаче  $Q(5, 2)$  допустимыми покрытиями, кроме  $Q3$ , являются покрытия, в которых  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) кругов с центрами в вершинах квадрата имеют радиус  $R$ , а  $4 - n$  кругов с центрами в других вершинах квадрата и дополнительный круг имеют радиус  $r \leq R$ . Более того, радиус  $r$  не должен превосходить половины стороны квадрата, иначе в покрытии квадрата будут участвовать более пяти кругов.

Перебирая всевозможные варианты покрытий, приходим к выводу, что покрытие  $Q3$  является оптимальным для задачи  $Q(5, 2)$ . Рассмотрим для примера покрытие, в котором  $n = 1$ , и пусть сторона квадрата равна 1. Тогда  $R < 1$  и для покрытия всех точек квадрата необходимо положить  $r = 1/2$ . Даже если положить  $R = r$ , мы имеем покрытие  $Q2$ , которое хуже  $Q3$ .

То, что покрытие  $Q3$  является оптимальным решением и для задачи  $Q(4, 2)$ , видно после рассмотрения другой  $Q$ -решётки, которая получается соединением (под углом  $45^\circ$  к горизонтали) ближайших друг к другу центров кругов радиусов  $R$  и  $r$ . Лемма 3 доказана.

### 3. Суммарные энергозатраты

Вернёмся к энергоэффективности функционирования всей БСС и покажем, что учёт суммарных затрат энергии на мониторинг и на обмен данными между сенсорами приводит к другим соотношениям радиусов  $R$  и  $r$  в покрытиях третьего уровня. В БСС сенсоры, обеспечивающие покрытие, должны порождать *связный* граф. При этом энергозатраты на передачу данных равны  $\mu_c d^b$ , где  $d$  — дальность передачи, а  $\mu_c > 0$  и  $b \in [2, 6]$  — заданные константы [11]. Для оценки энергоэффективности связи используется *удельная* энергоёмкость передачи  $SE$  (энергия сенсоров, потраченная на передачу, отнесённая к площади области покрытия). При подсчёте величины  $SE$  мы, как и в [11], предполагаем, что все сенсоры участвуют в передаче данных и коммуникационная сеть является остовом  $T$  минимального веса, где вес ребра  $(i, j)$  — это расстояние между сенсорами  $i$  и  $j$ , и направление передачи данных по каждому ребру может быть произвольным.

Рассмотрим покрытие  $T3$  и найдём оптимальное значение радиуса дополнительного круга  $r$ , при котором *суммарные* энергозатраты БСС минимальны, решив задачу

$$TE_{T3} = SE_{T3} + k \cdot CE_{T3} \rightarrow \min_{r \in [0, R\sqrt{3}/2]},$$

где  $SE_{T3}$  — удельная энергия мониторинга, а  $k \in [0, 1]$  — заданная константа, отражающая долю затрат на передачу данных в общих энергозатратах [11].

Нетрудно понять, что в минимальном остове  $T$  в покрытии  $T3$  каждый центр главного круга радиуса  $R$  будет связан с центром круга радиуса  $r$ , а центр дополнительного круга может быть связан как с центром ближайшего круга радиуса  $r$ , так и с ближайшей вершиной треугольни-

ка. Так как все эти рёбра имеют одинаковую длину  $d_{T3} = 6R/\sqrt{31}$ , то  $CE_{T3} = 1,5\mu_c d_{T3}^b / Sp_{T3}$ .

Пусть энергия мониторинга круга радиуса  $R$  равна  $\mu_s R^a$ ,  $a \in [2, 4]$ , где  $\mu_s > 0$ . С учётом соотношений  $r = \frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2}$ ,  $d_{T3} = \frac{2t}{\sqrt{3}}$  и  $Sp_{T3} = t^2 \sqrt{3}$  (параметр  $t$  имеет тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 1) задача минимизации суммарной энергии записывается в виде:

$$\mu_s \frac{0,5R^a + r^a}{t^2 \sqrt{3}} + k\mu_c \frac{1,5d_{T3}^b}{t^2 \sqrt{3}} \rightarrow \min_{t \in [R\sqrt{3}/2, (3+\sqrt{21})R/8]}.$$

Подставим выражения для  $r$  и  $d_{T3}$ , упростим, положив  $\alpha = \mu_s/\sqrt{3}$ ,  $\beta = 2^{b-1}k\mu_c/(\sqrt{3})^{b-1}$ , и перепишем задачу в виде

$$f(t) = \alpha \frac{0,5R^a}{t^2} + \alpha \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2}\right)^a}{t^2} + \beta t^{b-2} \rightarrow \min_{t \in [R\sqrt{3}/2, (3+\sqrt{21})R/8]}.$$

Отметим, что при  $b = 2$  точка минимума функции  $f(t)$  не зависит от энергозатрат на передачу. Оптимальное значение  $t$  в общем случае не удаётся выписать в явном виде, но в силу выпуклости функции  $f(t)$  его можно найти с любой наперёд заданной точностью  $\varepsilon$  с трудоёмкостью, не превосходящей  $O(\log_2 R/\varepsilon)$ .

Аналогично рассмотрим покрытие  $Q3$  и найдём оптимальное значение радиуса  $r$  дополнительного круга, при котором суммарные энергозатраты (на мониторинг и передачу данных) минимальны:

$$TE_{Q3} = SE_{Q3} + k \cdot CE_{Q3} \rightarrow \min_{r \in [0, R]}.$$

С учётом соотношений  $r = t - \sqrt{R^2 - t^2}$ ,  $d_{Q3} = t\sqrt{2}$  (в минимальном остоле центры кругов радиуса  $R$  соединяются с центром дополнительного круга) и  $Sp_{Q3} = 4t^2$  (здесь параметр  $t$  имеет тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 3) перепишем задачу в виде

$$g(t) = \frac{1}{4t^2}(\mu_s R^a + \mu_s \left(t - \sqrt{R^2 - t^2}\right)^a + 2k\mu_c (t\sqrt{2})^{b-2}) \rightarrow \min_{t \in [R/\sqrt{2}, R]}.$$

В общем случае минимум функции  $g(t)$  также не удаётся выписать в явном виде, но в силу выпуклости функции он может быть найден с любой наперёд заданной точностью. В частном случае, когда  $b = 2$ , точка минимума  $g(t)$ , как и в покрытии  $T3$ , не зависит от энергозатрат на передачу данных.

**Замечание 1.** Как показано в разд. 2, при  $a = 2$  имеет место неравенство  $SE_{Q3} > SE_{T3}$ . В случае же произвольного значения параметра  $a \in [2, 4]$ , а также при учёте суммарных энергозатрат соотношение величин  $TE_{T3}$  и  $TE_{Q3}$  зависит от значений параметров  $\mu_s$ ,  $\mu_c$ ,  $a$ ,  $b$  и  $k$ . Например, при  $\mu_s = \mu_c = 1$ ,  $a = 4$ ,  $b = 4$ ,  $k = 0,3$  имеем неравенство  $TE_{T3} < TE_{Q3}$ , а при  $\mu_s = \mu_c = 1$ ,  $a = 4$ ,  $b = 6$ ,  $k = 0,3$  справедливо обратное неравенство  $TE_{T3} > TE_{Q3}$ . При  $a = 4$  имеет место соотношение  $SE_{T3} > SE_{Q3}$ .

#### 4. Замечания и направления дальнейших исследований

В данной статье мы ограничились рассмотрением кругов двух радиусов. При этом можно несколько уменьшить плотность покрытия путём увеличения числа кругов, участвующих в покрытии плитки. Например, решение задачи  $T(6, 2)$ , показанное на рис. 7a, имеет плотность 1,082. Использование же для покрытия криволинейного треугольника между тремя главными кругами *четырёх* одинаковых кругов (см. рис. 7b) приводит к *увеличению* плотности покрытия до величины 1,1428. Аналогично в покрытии  $Q$  вместо одного дополнительного круга можно использовать четыре одинаковых круга (см. рис. 6b), что является допустимым решением задачи  $Q(8, 2)$ . Несложно убедиться, что плотность такого покрытия совпадает с плотностью покрытия  $Q3$ , в котором используется на три круга меньше.

Возможно уменьшение плотности регулярных покрытий путём рассмотрения кругов с большим числом радиусов, хотя это не всегда приводит к уменьшению плотности покрытия. Например, в покрытии  $T2$  используются круги двух радиусов, а плотность покрытия выше, чем в покрытии  $T1$  одинаковыми кругами. Кроме того, в [11] рассмотрено регулярное покрытие кругами трёх радиусов (см. рис. 2b) и утверждается, что такое покрытие является наилучшим из известных в своём классе, однако проведённая нами корректная оценка эффективности этого покрытия позволяет сделать вывод, что оно уступает покрытию  $T1$ , в котором используются круги одного радиуса. Нами планируется провести исследования  $k$ -уровневых *фрактальных* покрытий, в которых используются круги  $k$  различных радиусов.

#### 5. Приложение. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим покрытие правильного треугольника со стороной единичной длины четырьмя кругами, которое является решением задачи  $T(4, p)$ . Центры трёх главных кругов совпадают с вершинами треугольника, их радиусы равны  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ , а четвёртый дополнительный круг  $K$

имеет радиус  $r$ . При этом главные круги оставляют непокрытым криволинейный треугольник (см. рис. 3b), покрываемый кругом  $K$ , граница которого проходит через вершины этого криволинейного треугольника. Положение круга  $K$  определяется его центром  $M$ . Покажем, что покрытие является оптимальным, если круг  $K$  находится в центре треугольника, т.е. при  $r_1 = r_2 = r_3$ . При этом радиус круга  $K$  остаётся неизменным. Очевидно, что условие оптимальности покрытия эквивалентно минимальности суммы  $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ . Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся следующие вспомогательные леммы и следствия.

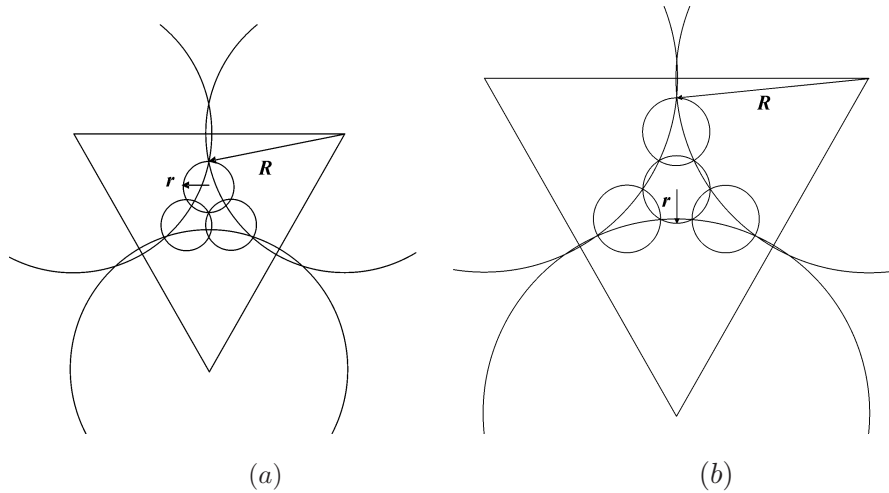


Рис. 7. (a) — решение задачи  $T(6, 2)$ ; (b) — решение задачи  $T(7, 2)$

**Лемма 4.** Сумма расстояний от точки в правильном треугольнике до всех его сторон не зависит от положения точки.

**Доказательство.** Рассмотрим правильный треугольник  $ABC$  и точку  $M$ , находящуюся внутри  $ABC$  или на его границе. При перемещении точки  $M$  параллельно произвольной стороне треугольника, например,  $AC$ , расстояние от точки  $M$  до стороны  $AC$  не меняется, а сумма расстояний до двух других сторон остаётся постоянной. То же самое происходит при перемещении точки параллельно остальным сторонам треугольника. Таким образом можно попасть в любую точку треугольника. Лемма 4 доказана.

**Следствие 1.** Пусть круг  $K$  находится внутри правильного треугольника. Тогда сумма расстояний от круга  $K$  до всех сторон треугольника не зависит от его положения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через  $M$  центр круга, и пусть радиус круга равен  $r$ . Так как расстояние от точки  $M$  до каждой стороны треугольника больше расстояния от соответствующей стороны до круга на величину  $r$ , то с учётом леммы 4 это даёт требуемый результат.

**Лемма 5.** Сумма расстояний от точки  $M$  внутри правильного треугольника до всех вершин треугольника  $L(M)$  принимает минимальное значение, если точка  $M$  находится в центре треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим правильный треугольник  $ABC$ , в котором сумма расстояний от точки  $M$  до вершин равна  $L(M) = |AM| + |BM| + |CM|$ . Из точки  $M$  опустим перпендикуляры  $MA_1$  на сторону  $BC$ ,  $MB_1$  на сторону  $AC$  и  $MC_1$  на сторону  $AB$ . По лемме 4 сумма  $S(M) = |MA_1| + |MB_1| + |MC_1|$  не зависит от положения точки  $M$ . Рассмотрим ломаные  $AMA_1$ ,  $BMB_1$  и  $CMC_1$ . Каждая из них имеет минимальную длину, если является высотой треугольника, и, следовательно, точка  $M$  — центром треугольника. Так как  $|AMA_1| + |BMB_1| + |CMC_1| = S(M) + L(M)$  и  $S(M) = \text{const}$ , то  $L(M)$  принимает минимальное значение, когда  $M$  — центр треугольника. Лемма 5 доказана.

**Следствие 2.** Сумма квадратов расстояний от произвольной точки  $M$  внутри правильного треугольника до вершин минимальна, если точка  $M$  находится в центре треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $a_i$  — расстояние от точки  $M$  до вершины  $i$  и  $a = \sum_{i=1}^3 a_i/3 = L(M)/3$  — среднее расстояние. Тогда

$$\sum_{i=1}^3 a_i^2 = \sum_{i=1}^3 (a_i - a)^2 + (L(M))^2/3.$$

Если точка  $M$  находится в центре треугольника, то первое слагаемое в правой части соотношения равно нулю, а второе (согласно лемме 5) принимает минимальное значение. Следствие 2 доказано.

Следствие 2 можно усилить. Пусть  $a_i$  — произвольные неотрицательные числа. Тогда имеет место

**Следствие 3.** Пусть  $\sum_{i=1}^3 a_i = \text{const}$ . Тогда сумма  $\sum_{i=1}^3 a_i^2$  принимает минимальное значение, когда все  $a_i$  равны между собой.

**Лемма 6.** Пусть круг  $K$  находится внутри правильного треугольника. Тогда сумма расстояний от круга  $K$  до всех вершин треугольника минимальна, когда центр круга  $K$  совпадает с центром треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 5.

**Лемма 7.** Пусть круг  $K$  находится внутри равностороннего треугольника. Для каждой стороны треугольника определим ближайшую к ней точку круга и соединим её отрезками с двумя вершинами этой стороны. Тогда сумма этих отрезков, а также сумма квадратов этих отрезков принимают минимальные значения тогда и только тогда, когда центр круга  $K$  совпадает с центром треугольника.

Справедливость леммы следует из следствий 1 и 3, а также леммы 6.

**Лемма 8.** Пусть точка  $M$  лежит на прямой  $CD$ , параллельной отрезку  $AB$ . Тогда сумма длин отрезков  $AM$  и  $BM$ , а также сумма их квадратов минимальны тогда и только тогда, когда точка  $M$  лежит на равном расстоянии от  $A$  и  $B$  (пересечение срединного перпендикуляра к  $AB$  и прямой  $CD$ ). Более того, эти суммы монотонно возрастают при удалении точки  $M$  от срединного перпендикуляра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО становится очевидным, если вместо отрезка  $MB$  рассмотреть равный ему отрезок  $MB'$ , где  $B'$  — точка, симметричная точке  $B$  относительно прямой  $CD$ .

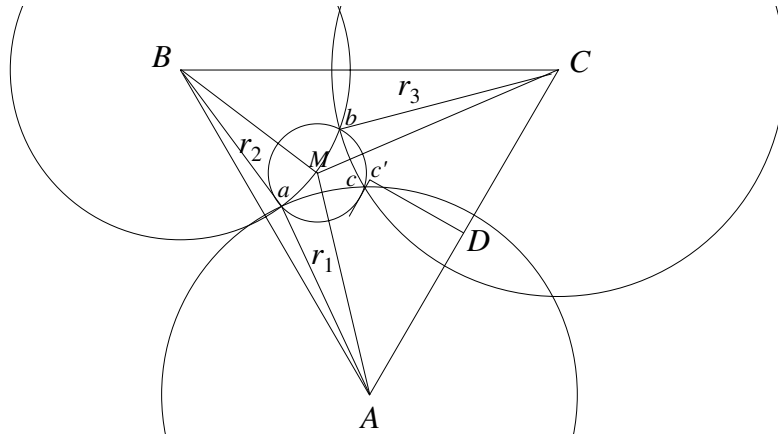


Рис. 8. Иллюстрация к доказательству теоремы 2

Перейдём к доказательству теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено в начале раздела, для доказательства утверждения достаточно показать, что сумма квадратов радиусов главных кругов  $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$  достигает минимума при  $r_1 = r_2 = r_3$ . На рис. 8 длины отрезков  $|Aa| = |Ac| = r_1$ ,  $|Ba| = |Bb| = r_2$  и  $|Cb| = |Cc| =$

$r_3$ . Рассмотрим выражение  $2r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_3^2 = |Aa|^2 + |Ac|^2 + |Ba|^2 + |Bb|^2 + |Cb|^2 + |Cc|^2$  и оценим снизу его значение следующим образом. Пару отрезков  $Ac$  и  $Cc$  заменим на отрезки  $Ac'$  и  $Cc'$  одинаковой длины, где точка  $c'$  находится на срединном перпендикуляре к  $AC$  на расстоянии, равном расстоянию от  $AC$  до круга  $K$ . Согласно лемме 8 и очевидным соображениям имеем  $|Ac| + |Cc| \geq |Ac'| + |Cc'|$ . Аналогично определим точки  $a'$  для отрезков  $Aa$ ,  $Ba$  и  $b'$  — для отрезков  $Bb$ ,  $Cb$ . Пусть срединный перпендикуляр к  $AC$  пересекается с этим отрезком в точке  $D$ , срединный перпендикуляр к  $AB$  пересекается с этим отрезком в точке  $E$  и срединный перпендикуляр к  $BC$  пересекается с этим отрезком в точке  $F$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_3^2 &\geq |Aa'|^2 + |Ac'|^2 + |Ba'|^2 + |Bb'|^2 + |Cb'|^2 + |Cc'|^2 \\ &= 2|Ea'|^2 + 2|Fb'|^2 + 2|Dc'|^2 + 3/2. \end{aligned}$$

Так как по построению точек  $a'$ ,  $b'$  и  $c'$  согласно следствию 1 сумма  $|Ea'| + |Fb'| + |Dc'| = \text{const}$ , то согласно следствию 3 выражение  $|Ea'|^2 + |Fb'|^2 + |Dc'|^2$  принимает минимальное значение, когда  $|Ea'| = |Fb'| = |Dc'|$ . Значит, нижняя оценка принимает минимальное значение, когда центр круга  $K$  совпадает с центром треугольника (лемма 7). Но в этом случае нижняя оценка совпадает с  $2r_1^2 + 2r_2^2 + 2r_3^2$ . Теорема 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Тот Л. Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1958. — 365 с.
2. **Cardei M., Du D.-Z.** Improving wireless sensor network lifetime through power aware organization // J. ACM Wireless Networks. — 2005. — Vol. 11, N 3. — P. 333–340.
3. **Cardei M., Wu J.** Energy-efficient coverage problems in wireless ad-hoc sensor networks // Computer Communications. — 2006. — Vol. 29, N 4. — P. 413–420.
4. **Cardei M., Wu J., Lu M.** Improving network lifetime using sensors with adjustable sensing ranges // Int. J. Sensor Networks. 2006. Vol. 1, N 1–2. — P. 41–49.
5. **Carle J., Simplot D.** Energy-efficient area monitoring by sensor networks. // IEEE Computer. — 2004. — Vol. 37, N 2. — P. 40–46.
6. **Kershner R.** The number of circles covering a set // Amer. J. Mathematics. — 1939. — Vol. 61, N 3. — P. 665–671.
7. **Pottie G. J., Kaiser W. J.** Wireless integrated network sensors // Communications ACM. — 2000. — Vol. 43, N 5. — P. 51–58.
8. **Tóth F. G.** Covering the plane with two kinds of circles // Discrete & Comp. Geometry. — 1995. — Vol. 13, N 3. — P. 445–457.

9. **Wang L., Yang X.** A survey of energy-efficient scheduling mechanisms in sensor networks // Mobile Networks and Applications. — 2006. — Vol. 11, N 5. — P. 723–740.
10. **Wu J., Dai F.** Virtual backbone construction in MANETs using adjustable transmission ranges // IEEE Trans. Mobile Computing. — 2006. — Vol. 5, N 9. — P. 1188–1200.
11. **Wu J., Yang S.** Energy-efficient node scheduling models in sensor networks with adjustable ranges // Int. J. Foundations Comp. Sci. — 2005. — Vol. 16, N 1. — P. 3–17.
12. **Zhang H., Hou J.C.** Maintaining sensing coverage and connectivity in large sensor networks // Ad Hoc & Sensor Wireless Networks. — 2005. — Vol. 1, N 1-2. — P. 89–124.

*Астраков Сергей Николаевич,*  
e-mail: astrakov90@gmail.com

*Ерзин Адиль Ильясович,*  
e-mail: adilerzin@gmail.com

*Залюбовский Вячеслав Валерьевич,*  
e-mail: libra@gmail.com

Статья поступила  
22 мая 2008 г.

Переработанный вариант —  
2 марта 2009 г.