ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2009. Том 16, № 3. С. 20–46

УДК 519.172.2

РАЗБИЕНИЕ ПЛОСКОГО ГРАФА С ОБХВАТОМ 7 НА ДВА ЗВЁЗДНЫХ ЛЕСА *)

Д. Ж. Замбалаева

Аннотация. Доказано, что множество вершин любого плоского графа с обхватом не менее 7 можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает звёздный лес, т. е. такой лес, в котором каждая компонента связности является звездой.

Ключевые слова: плоский граф, обхват, путевая разбиваемость.

Введение

Уже долгое время наряду с обычными правильными раскрасками плоских графов исследуются различные их обобщения, при которых множество вершин (рёбер) графа разбивается на подмножества, каждое из которых порождает вырожденный в том или ином смысле подграф. Наиболее часто рассматриваются разбиения графов на леса (ациклические подграфы) и звёздные леса. Напомним, что *звёздным лесом* называется такой лес, в котором каждая компонента связности является звездой. *Вершинной (рёберной) древесностью* графа G называется наименьшее число подмножеств, на которые можно разбить множество его вершин (рёбер) так, что каждое подмножество порождает лес. Эти числа будем обозначать через $a(G)$ и $A(G)$ соответственно.

Нетрудно доказать по индукции, что $a(G) \leqslant 3$ для любого плоского графа G. Чартрэнд и Кронк [11] показали, что эта оценка является неулучшаемой, построив пример плоской триангуляции T такой, что $a(T) = 3$. Нэш-Вильямс [21] вывел критерий того, что $A(G) \leqslant k$ для произвольного графа G при фиксированном $k \geqslant 1$, из которого следует, что рёберная древесность любого плоского графа не превосходит 3, а рёберная древесность любого плоского графа без циклов длины 3 не превосходит 2, и обе оценки точны.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00673).

Штейн [23, 24] доказал, что множество вершин любого плоского графа можно разбить на три подмножества, одно из которых является независимым, а два других порождают леса. Им [23, 24] установлено, что вершинная древесность плоской триангуляции T равна двум тогда и только тогда, когда двойственный граф T^* является гамильтоновым. Один из наиболее сильных результатов в рассматриваемой области получен О. В. Бородиным [6], который доказал, что любой плоский граф допускает *ациклическую раскраску* вершин в 5 цветов, т. е. такую правильную 5-раскраску, при которой вершины любых двух цветов порождают лес. Заметим, что из теоремы об ациклической 5-раскраске следует упомянутый результат Штейна о разбиении плоского графа на независимое множество и два леса. Другое важное следствие теоремы об ациклической 5-раскраске состоит в том, что множество рёбер любого плоского графа можно разбить на пять подмножеств, каждое из которых порождает звёздный лес. При этом, как установлено Хакими, Митчемом и Шмейхелем [17], оценка пять неулучшаема.

Среди результатов о раскрасках и разбиениях плоских графов, не содержащих циклов фиксированной длины, наиболее известна теорема Грецша [15] о том, что любой плоский граф без циклов длины 3 является 3-раскрашиваемым. Легко доказывается по индукции, что вершинная древесность таких графов не превосходит 2, и эта оценка точна. Разными авторами доказано, что вершинную древесность не больше 2 имеют также плоские графы без циклов длины 5 [25], 6 [14], 4 [22] и плоские графы с минимальным расстоянием между 3-циклами не меньше 3 [22]. Гипотеза Грюнбаума [16] об ациклической 4-раскрашиваемости плоских графов, не содержащих 3-циклов, была опровергнута А. В. Косточкой и Л. С. Мельниковым [19]. В [1] для плоских графов с обхватом (длиной минимального цикла) не менее 5 доказано существование разбиения множества вершин на независимое множество и лес, а в [7] для плоских графов с обхватом не менее 9 — разбиваемость множества рёбер на лес и паросочетание.

Целью настоящей статьи является следующая

Теорема 1. *Множество вершин любого плоского графа с обхватом не менее 7 можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает звёздный лес.*

Иначе утверждение теоремы 1 можно сформулировать так: множество вершин графа можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает подграф, не содержащий простых цепей с более чем тремя вершинами. Здесь обнаруживается связь основного результата ста-

тьи с понятием путевой разбиваемости, введённым в [8]. Граф называется (a,b)-*разбиваемым* для целых положительных a,b, если существует такое разбиение множества его вершин $V = V_1 \cup V_2$, что в подграфе, порождённом подмножеством V_1, длина (число вершин) наибольшей простой цепи не превосходит a, а в подграфе, порождённом V_2, не превосходит b. Заметим, что $(1,1)$-разбиваемость графа равносильна его двудольности, $(2,2)$-разбиваемость — возможности разбиения на два подграфа с максимальной степенью 1, а $(3,3)$-разбиваемость — разбиваемости на два звёздных леса (для графов без 3-циклов). Таким образом, утверждение теоремы 1 равносильно тому, что любой плоский граф с обхватом не менее 7 является $(3,3)$-разбиваемым.

В [8–10] и ряде других работ исследовались (a,b)-разбиения для некоторых специальных классов (непланарных) графов. В [5] доказано, что любой граф является $(a,\tau-a)$-разбиваемым при $a \leqslant 8$, где через τ обозначается длина наибольшей простой цепи графа. Михоком показано [20], что для любых фиксированных значений параметров a,b существуют плоские графы, не являющиеся (a,b)-разбиваемыми. При этом во всех примерах графов, приводимых в [20], содержится большое число циклов длины 3. Поэтому представляет интерес вопрос о том, для какого наименьшего значения $g \geqslant 4$ существуют такие константы a,b, что любой плоский граф с обхватом не менее g является (a,b)-разбиваемым. Из теоремы 1 следует, что $g \leqslant 7$.

Отметим также, что в [3] и дипломной работе автора [4] доказано, что планарные графы с обхватом не менее 16 являются $(1,2)$-разбиваемыми, с обхватом не менее 9 — $(2,2)$-разбиваемыми и с обхватом не менее 8 — $(2,3)$-разбиваемыми. Недавно последние два результата были усилены О. В. Бородиным и А. О. Ивановой [2], которые доказали, что любой плоский граф с обхватом не менее 8 является $(2,2)$-разбиваемым.

1. Определения и обозначения

Пусть $G(V,E)$ — конечный неориентированный граф с множеством вершин V и множеством рёбер E. Через $g = g(G)$ будем обозначать обхват графа G, т. е. наименьшую длину простого цикла в G. Через $d(v)$ обозначим степень вершины v, а через $\delta(G)$ — минимальную степень вершин графа G. Вершину степени d будем называть *d-вершиной*. *Длиной* простой цепи в G назовём число её вершин. Через $\tau(G)$ обозначим наибольшую длину простой цепи в G, через $G[W]$ — подграф в G, порождённый множеством вершин $W \subseteq V$. Если граф G является плоским, то через $F = F(G)$ обозначим множество всех его граней. *Рангом* $r(f)$

грани f в связном плоском графе G называется число рёбер в граничном цикле грани f (мосты засчитываются дважды).

Пусть $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ — целые числа. Граф $G(V, E)$ называется (a, b)-*разбиваемым*, если существует разбиение множества его вершин $V = V_1 \cup V_2$ такое, что $\tau(G[V_1]) \leqslant a$ и $\tau(G[V_2]) \leqslant b$. Для данного (a, b)-разбиения $V = V_1 \cup V_2$ графа $G(V, E)$ рассмотрим раскраску вершин G в два цвета, порождённую этим разбиением, т. е. такое отображение $\varphi : V \to \{\alpha, \beta\}$, что $\varphi(x) = \alpha$ при $x \in V_1$ и $\varphi(x) = \beta$ при $x \in V_2$. Указанную раскраску вершин графа G назовём (a, b)-*раскраской* G. Далее под раскраской всюду понимается (a, b)-раскраска. Через $\neg x$ обозначим цвет, отличный от цвета x, где $x \in \{\alpha, \beta\}$, через $\varphi_{\min}(v)$ — цвет, в который окрашено меньшее число смежных с v вершин; будем писать просто $\varphi_{\min}$, если вершина v однозначно определяется из контекста.

Назовём k-*цепью* в G простую цепь, состоящую из k вершин степени 2. Под 0-цепью будем понимать ребро, концы которого имеют степень не меньше 3. Будем называть $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$-*вершиной* ($k_i \in \{0, 1, \ldots\}$, $i = 1, \ldots, n$) вершину степени n, являющуюся концом k_1-цепи, …, k_n-цепи.

2. Доказательство основного результата

2.1. Простейшие свойства контрпримера к теореме 1. Пусть плоский граф $G = G(V, E, F)$ — контрпример к теореме 1 с минимальным числом вершин. Очевидно, что граф G связен. Покажем, что G обладает следующими свойствами.

(1)*В графе G нет мостов.*

Доказательство. Если ребро $e = xy$ — мост в G, то в силу минимальности контрпримера G для каждой компоненты связности графа $G - e$ существует $(3, 3)$-раскраска. Объединяя эти раскраски в одну раскраску φ с соблюдением условия $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, получаем $(3, 3)$-раскраску графа G; противоречие.

Из свойства (1) следует

(1′) $\delta(G) > 1$.

(2) *В G нет смежных 2-вершин.*

Доказательство. Допустим, в графе G есть пара смежных 2-вершин. Тогда в силу минимальности G для графа, полученного из G удалением этих вершин, существует $(3, 3)$-раскраска. Продолжим эту раскраску на удалённые вершины, окрашивая каждую из них в цвет, отличный

от цвета смежной окрашенной вершины (будем далее называть такой метод *окраской по закону противоположности*). Таким образом, получаем $(3,3)$-раскраску G; противоречие.

Следствие 1. *В графе G каждая грань ранга не более* 13 *ограничена простым циклом.*

Доказательство. Пусть граничный обход

$$C = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = v_0)$$

грани f не является простым циклом. Без потери общности можно считать, что $v_0 = v_t$, $0 < t < k$, и все вершины $v_0, v_1, \dots, v_{t-1}$ различны. Ясно, что $t \neq 1$, а из свойства $(1')$ следует, что $t \neq 2$. Таким образом, в границе грани f содержится простой цикл $C' = (v_0, v_1, \dots, v_{t-1}, v_t = v_0)$. Аналогично доказывается, что цикл $(v_t, v_{t+1}, \dots, v_{k-1}, v_k = v_0)$ либо также является простым, либо содержит внутри себя минимальный простой цикл $C'' = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j = v_i)$. Следовательно, граничный обход грани f содержит два не пересекающихся по рёбрам (внутри последовательности $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k)$) простых цикла C' и C''. Отсюда и из условия $g(G) \geqslant 7$ получаем $r(f) = k \geqslant 7 + 7 = 14$. Следствие 1 доказано.

(3) *В графе G любая d-вершина v, $d \geqslant 3$, смежна не более чем с $d-2$ вершинами степени* 2.

Доказательство. Предположим противное. Удалим из графа G вершину v и смежные с ней 2-вершины. Полученный граф $(3,3)$-раскрашиваем в силу минимальности контрпримера. Продолжаем его раскраску на удалённые вершины по закону противоположности. Ясно, что одноцветных цепей длины более 3 при этом не возникает. Таким образом, получаем $(3,3)$-раскраску графа G; противоречие.

Далее вершину степени $d \geqslant 3$, смежную с $d-2$ вершинами степени 2, будем называть *максимальной*.

(4) *В графе G нет цепей вида $P = v_1v_2v_3$, где v_1, v_3 — максимальные вершины, v_2 — $(0,1,0)$-вершина.*

Доказательство. Допустим противное. Удалим вершины цепи P и смежные с ними 2-вершины. В полученном графе имеется $(3,3)$-раскраска. Можем продолжить её на весь граф G, окрашивая v_1, v_3 и удалённые 2-вершины по закону противоположности, а вершину v_2 — в цвет $\varphi_{\min}(v_2)$. Получили $(3,3)$-раскраску всего графа G; противоречие.

В дальнейшем наиболее часто используются следующие два частных случая свойства (4): отсутствие в G

(a) цепей длины 3, состоящих из $(0,1,0)$-вершин;

(b) цепей $P = v_1v_2v_3$, где v_1, v_2 — $(0,1,0)$-, v_3 — $(0,0,1,1)$-вершины.

Замечание. Будем называть $(0,1,0)$-вершину v, инцидентную грани f, *торчащей относительно* f, если 2-вершина, смежная с v, не инцидентна f. Далее, если не оговорено противное, под $(0,1,0)$-вершинами, инцидентными грани f, понимаются торчащие относительно f вершины.

Из свойства (4a) вытекает

Следствие 2. *В графе G*

(i) *любая 7-грань инцидентна не более чем четырём $(0,1,0)$-вершинам;*

(ii) *если f — 7-грань, степени всех вершин которой не более 3, и f инцидентна двум 2-вершинам, то среди вершин грани f нет торчащих $(0,1,0)$-вершин.*

Доказательство. (i) Пусть 7-грань графа G инцидентна не менее пяти $(0,1,0)$-вершинам. Хотя бы три из них расположены подряд, что противоречит свойству (4).

(ii) Пусть у 7-грани f степени вершин не более 3 и она инцидентна двум 2-вершинам u, v. В силу свойства (2) u и v не смежны. В силу свойства (3) вершины, смежные с u и v, различны и не могут являться $(0,1,0)$-вершинами. Исключаем эти четыре вершины. Заметим, что оставшаяся вершина грани f смежна с двумя $(0,1,0)$-вершинами, поэтому сама таковой не является по свойству (4). Следствие 2 доказано.

(5) *В графе G отсутствуют цепи $P = (v_1, v_2, v, v_3, v_4)$, где v_1, v_4 — максимальные, v_2, v_3 — $(0,1,0)$-вершины, $d(v) \geqslant 3$, и вершина v смежна с $d(v) - 3$ вершинами степени* 2.

Доказательство. Допустим противное. Удалим цепь P, а также 2-вершины, смежные с ней. Полученный граф $(3,3)$-раскрашиваемый. Окрашивая v_1, v, v_4 и удалённые 2-вершины по закону противоположности, а вершины v_i в цвет $\varphi_{\min}(v_i)$, $i = 2,3$, получим $(3,3)-$раскраску графа G; противоречие.

(6) *В графе G нет цепей $P = (v_1, \ldots, v_7)$ таких, что v_1, v_7 — максимальные, v_2, v_4, v_6 — $(0,1,0)$-, v_3, v_5 — 3-вершины.*

Доказательство. Удалим из графа G цепь $P = (v_1, \ldots, v_7)$ и смежные с ней 2-вершины, в результате получим граф, для которого существует $(3,3)$-раскраска φ. Применим к удалённым вершинам закон противоположности.

Допустим, на вершинах цепи P и 2-вершинах, смежных с ними, нет зацикливаний. Тогда неокрашенными остаются вершины v_2, v_4, v_6. Обо-

значим 2-вершину, смежную с v_2, через u. Если $\varphi(v_1) = \varphi(u) = x$, то полагаем $\varphi(v_2) = \neg x$, иначе $\varphi(v_2) = \neg\varphi(v_3)$. Аналогичным образом окрашиваем вершину v_6. Остаётся окрасить только вершину v_4. Делаем это следующим образом: если $\varphi(v_3) = \varphi(v_5) = x$, то полагаем $\varphi(v_4) = \neg x$, иначе $\varphi(v_4) = \neg\varphi(w)$, где w — 2-вершина, смежная с v_4.

Теперь допустим, что v_1, v_7 смежны, либо 1-цепь, выходящая из v_1 (v_7), совпадает с 1-цепью, выходящей из v_7 или v_6 (v_1 или v_2). В первом случае начинаем дораскраску с того, что присваиваем вершинам v_1, v_7 разные цвета, во втором — 2-вершину, смежную с двумя вершинами цепи P, окрашиваем в цвет отличный от v_i, $i \in \{1, 7\}$, далее действуем аналогично случаю, рассмотренному выше.

Лемма 1. *Любая 7-грань f графа G, все вершины которой имеют степень 3, инцидентна не более чем двум $(0,1,0)$-вершинам.*

Доказательство. Допустим, 7-грань f, все вершины которой имеют степень 3, инцидентна трём $(0,1,0)$-вершинам v_1, v_2, v_3. Удалим из графа вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Полученный граф G_1 имеет $(3,3)$-раскраску φ. Продолжим φ на удалённые вершины. Окрасим вершины, смежные с неудалённым, по закону противоположности. Неокрашенными остаются v_1, v_2, v_3. В силу свойства (4) возможны следующие конфигурации.

1) Вершины v_1, v_2 смежны, v_3 находится на расстоянии 3 от каждой из них. Обозначим 2- и 3-вершины, смежные с v_i, через t_i и u_i соответственно, $i = 1, 2$. Продолжим раскраску следующим образом: если $\varphi(u_1) \neq \varphi(u_2)$, то полагаем $\varphi(v_i) = \neg\varphi(u_i)$, $i = 1, 2$, и $\varphi(v_3) = \varphi_{\min}$. Пусть $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \alpha$, тогда $\varphi(v_3) = \beta$, и если $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = \beta$, то $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$, иначе $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = \beta$.

2) Вершины v_1, v_2 смежны, но v_3 находится на расстоянии 2 от одной из них, допустим от v_2. Обозначим оставшиеся вершины грани так, что $f = u_1u_2u_3v_1v_2vv_3$. Полагаем $\varphi(v_1) = \varphi(v_3) = \neg\varphi(u_2)$, $\varphi(v_2) = \varphi(u_2)$.

3) Никакие из вершин v_1, v_2, v_3 не смежны. Пусть $f = v_1u_1u_2v_2t_2v_3t_1$. Если $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \alpha$, то полагаем $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = \beta$, $\varphi(v_3) = \alpha$, иначе $\varphi(v_i) = \neg\varphi(t_i)$, $i = 1, 2$, и $\varphi(v_3)$ можно выбрать произвольно.

Во всех трёх случаях получили $(3,3)$-раскраску графа G, что противоречит его выбору. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В графе G 7-грань f, у которой степени всех вершин не более 3 и одна из вершин имеет степень 2, инцидентна не более одной $(0,1,0)$-вершине.*

Доказательство. Допустим, 7-грань f, степени вершин которой не

более 3, инцидентна 2-вершине w и двум $(0,1,0)$-вершинам u, v. В силу свойств (3), (4) возможны следующие три конфигурации.

1) Вершины u, v смежны, вершина w находится на расстоянии 3 от них. Заметим, что эту конфигурацию можно получить из конфигурации 1 леммы 1 заменой $(0,1,0)$-вершины v_3 на 2-вершину.

2) Вершины u, v разделены одной вершиной. Эта конфигурация получается из конфигурации 3 леммы 1 заменой одной из $(0,1,0)$-вершин v_1, v_2 на 2-вершину.

3) Вершины u, v разделены двумя вершинами. Эта конфигурация получается из конфигурации 3 леммы 1 заменой $(0,1,0)$-вершины v_3 на 2-вершину.

После удаления вершин грани f и смежных с ними 2-вершин продолжим раскраску полученного графа таким же образом, как и в соответствующих конфигурациях леммы 3. Ясно, что во всех случаях это приведёт к $(3,3)$-раскраске графа G, т. е. к противоречию. Лемма 2 доказана.

2.2. Формула Эйлера. Запишем формулу Эйлера для графа G в виде

$$\sum_{v\in V}(2d(v)-6)+\sum_{f\in F}(r(f)-6)=-12. \tag{$*$}$$

Зарядом вершины $v \in V$ назовём величину $\mu(v) = 2d(v) - 6$, а *зарядом грани* $f \in F$ — величину $\mu(f) = r(f) - 6$. Ввиду условия $g(G) \geqslant 7$ заряд любой грани в G не меньше 1. Отметим также, что заряд 2-вершины равен -2, заряд 3-вершины — 0, а у вершины степени не менее 4 заряд не меньше 2.

Перераспределим заряды в G по следующим правилам.

П1: Любая вершина степени не менее 3 передаёт заряд 1 каждой смежной 2-вершине.

Согласно свойству (1) граф G не содержит мостов, откуда следует, что каждая точка сочленения в G имеет степень не менее 4. Это делает корректным следующее правило.

П2: Любая грань f передаёт каждой инцидентной ей $(0,1,0)$-вершине v заряд $1/2$, если v — торчащая относительно f, и заряд $1/4$ в противном случае.

Обозначим через $\mu_1(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после применения правил П1, П2.

Введём следующие определения. Назовём грань f *α-голодной*, если $\mu_1(f) = -\alpha$, $\alpha > 0$. Грань f назовём *ненуждающейся*, если $\mu_1(f) \geqslant 0$.

Вершина типа A — это 2-вершина, смежная с двумя 3-вершинами.

Вершина типа B — это 2-вершина, у которой одна из смежных вершин имеет степень 3, а другая — не менее 4.

Плохие объекты для грани f — это $(0,1,0)$-торчащие относительно f вершины и 2-вершины типа A и B, инцидентные f.

Назовём вершину v *донором*, если либо её степень не менее 5, либо v — это 4-вершина типа $(0,0,0,0)$ или $(0,0,0,1)$.

Перераспределим заряды μ_1 по правилу

П3: Каждая вершина-донор передаёт заряд α/k каждой инцидентной ей α-голодной грани f ранга 7 или 8, где k — количество доноров, инцидентных грани f.

Полученный после применения правила П3 заряд обозначим через μ_2. Цель дальнейшего доказательства состоит в проверке неотрицательности всех зарядов μ_2, что противоречит $(*)$.

2.3. Свойства граней в G. Следующие леммы 3–15 необходимы для обеспечения неотрицательности зарядов граней и вершин степени 4 после окончательного перераспределения.

Лемма 3. *В графе G любая 7-грань f имеет не более четырёх плохих объектов.*

Доказательство. Если среди плохих объектов грани f только $(0,1,0)$-вершины, то по следствию 2 их не более четырёх. Пусть f инцидентна 2-вершине v. Вершины, смежные с v, не могут быть плохими по свойству (3). Среди оставшихся четырёх вершин в силу свойств (2)–(4) может быть не более трёх плохих. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если 7-грань f α-голодная, то $\alpha \in \{1/4,\ 1/2,\ 3/4,\ 1\}$, причём*

(i) $\alpha = 1/4 \Leftrightarrow f$ *инцидентна трём плохим объектам: вершине типа B и двум $(0,1,0)$-вершинам;*

(ii) $\alpha = 1/2 \Leftrightarrow f$ *инцидентна трём плохим объектам: либо трём $(0,1,0)$-вершинам, либо вершине типа A и двум $(0,1,0)$-вершинам;*

(iii) $\alpha = 3/4 \Leftrightarrow f$ *инцидентна четырём плохим объектам: трём $(0,1,0)$-вершинам v_1, v_2, v_3 и вершине u типа B, причём это возможно в единственной конфигурации $f = u_1uu_2v_2v_3vv_1$, где $d(u_1) = 3$, $d(u_2) \geqslant 4$;.*

(iv) $\alpha = 1 \Leftrightarrow f$ *инцидентна четырём $(0,1,0)$-вершинам.*

Доказательство. Обозначим через N_f количество плохих объектов, инцидентных грани f. Пусть f — α-голодная 7-грань, т. е. $\mu_1(f) < 0$.

На каждый плохой объект по плавилу П2 грань f затрачивает заряд не более $1/2$, таким образом, $0 > \mu_1(f) \geqslant \mu(f) - N_f/2 = 1 - N_f/2$. Следовательно, $N_f > 2$. С другой стороны, по предыдущей лемме $N_f \leqslant 4$. Таким образом, $N_f \in \{3, 4\}$.

Пусть $N_f = 4$. В этом случае среди вершин грани f не может быть вершин типа A, а также двух вершин типа B, так как в противном случае получим противоречие со свойством (4). Поэтому f инцидентна либо четырём $(0,1,0)$-вершинам и тогда $\mu_1(f) = \mu(f) - 4 \cdot 1/2 = 1 - 2 = -1$, либо трём $(0,1,0)$-вершинам v_1, v_2, v_3 и вершине u типа B, тогда

$$\mu_1(f) = 1 - 3 \cdot 1/2 - 1/4 = -3/4.$$

Докажем, что в последнем случае возможна единственная конфигурация грани f. Обозначим вершины, смежные с u, через u_1, u_2, причём $d(u_1) = 3$, $d(u_2) \geqslant 4$. В силу свойства (4) вершины v_1, v_2, v_3 не могут идти подряд, но так как $r(f) = 7$, то две из них должны быть смежны, допустим v_2, v_3. Если u_1 смежна одной из этих вершин, то образуется $(0,1,0)$-цепь длины 3, что противоречит свойству (4). Таким образом, имеем грань $f = u_1 u u_2 v_2 v_3 v v_1$.

Пусть $N_f = 3$. Тогда f не может быть инцидентна двум вершинам типа A или двум вершинам типа B, так как в первом случае $N_f = 2$ в силу свойств (3) и (4), а во втором $\mu_1(f) \geqslant 1 - 2 \cdot 1/4 - 1/2 = 0$. Пусть f инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам. Если третий плохой объект — $(0,1,0)$-вершина или вершина типа A, то $\mu_1(f) = -1/2$; если это вершина типа B, то $\mu_1(f) = -1/4$.

Итак, остался единственный нерассмотренный случай при $N_f = 3$, а именно, когда f инцидентна $(0,1,0)$-вершине v, вершине a типа A и вершине b типа B. В силу (3), (4) это возможно в единственной конфигурации, а именно $f = a_1 a a_2 v b_2 b b_1$, где $d(a_1) = d(a_2) = d(b_1) = 3$, $d(b_2) \geqslant 4$. Удалим все вершины грани f, кроме b_2, а также 2-вершину, смежную с v. Полученный граф имеет $(3,3)$-раскраску φ. Продолжим её на удалённые вершины, применяя закон противоположности, после чего остаётся неокрашенной только вершина a. Если $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = x$, то полагаем $\varphi(a) = \neg x$, иначе $\varphi(a) = \varphi(b_2)$. Получили $(3,3)$-раскраску графа G; противоречие. Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Грань, инцидентная двум 2-вершинам, ненуждающаяся.*

Лемма 5. *Любая 3/4-голодная 7-грань имеет двух доноров, один*

из которых является либо $(0,0,0,0)$*-вершиной, либо имеет степень не менее* 5.

Доказательство. Пусть f — $3/4$-голодная грань. Тогда по лемме 4 $f = u_1uu_2v_2v_3vv_1$, где v_1, v_2, v_3 — $(0,1,0)$-вершины, u — вершина типа B, $d(u_1) = 3$, $d(u_2) \geqslant 4$. Заметим, что по свойству (4) вершина u_2 не может быть $(0,0,1,1)$-вершиной, а в силу свойства (5) вершина v имеет степень не менее четырёх и не является ни $(0,0,1,1)$-, ни $(0,0,0,1)$-вершиной. Таким образом, v, u_2 — доноры. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть ранг грани* f *равен* 8, *тогда*

(i) *если* f *инцидентна* 2*-вершине, то она ненуждающаяся*;

(ii) *если* f — α*-голодная, то* $\alpha = 1/2$ *и* f *инцидентна по крайней мере двум донорам.*

Доказательство. (i) Пусть f инцидентна 2-вершине u. Напомним, что вершины, смежные с 2-вершиной, не могут быть плохими в силу свойства (3). Если f имеет не более четырёх плохих объектов, то

$$\mu_1(f) \geqslant \mu(f) - 4 \cdot 1/2 = 2 - 2 = 0.$$

Пусть f инцидентна не менее пяти плохим объектам. В силу свойств (3), (4) ими являются 2-вершина u и четыре $(0,1,0)$-вершины v_1, v_2, v_3 и v_4, при этом $f = u_1uu_2v_1v_2vv_3v_4$. Согласно свойству (4) имеем $d(u_1) \geqslant 4$, $d(u_2) \geqslant 4$. Следовательно, u не является плохой; противоречие.

(ii) Пусть f α-голодная. Тогда f не инцидентна 2-вершинам в силу (i). Максимальное количество $(0,1,0)$-вершин, инцидентных 8-грани, в силу свойства (4) равно пяти, и если оно достигается, то

$$\mu_1(f) = \mu(f) - 5 \cdot 1/2 = 2 - 5/2 = -1/2,$$

иначе $\mu_1(f) \geqslant \mu(f) - 4 \cdot 1/2 = 2 - 2 = 0$.

Итак, пусть грань f $1/2$-голодная и инцидентна пяти $(0,1,0)$-вершинам v_i, $i = 1, \ldots, 5$. В этом случае единственная конфигурация, не содержащая $(0,1,0)$-цепей длины 3, — это $f = v_1v_2vv_3v_4wv_5u$. По свойству (5) v — $(0,0,0,0)$-вершина, либо $d(v) \geqslant 5$, т. е. v — донор. Покажем, что хотя бы одна из вершин u, w — донор. Пусть $d(u) = d(w) = 3$. Тогда цепь $(v_2, v_1, u, v_5, w, v_4, v_3)$ является сводимой конфигурацией из свойства (6). Следовательно, хотя бы одна из вершин u, w имеет степень не менее 4, а учитывая, что по свойству (4) они не могут быть $(0,0,1,1)$-вершинами, хотя бы одна из них является донором. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *В графе* G *любая грань ранга не менее* 9 *ненуждающаяся.*

Доказательство. Пусть $r(f) \geqslant 9$. По свойствам (3) и (4) f не может быть инцидентна трём идущим подряд плохим вершинам. Следовательно, число плохих вершин грани f не превышает $2/3r(f)$, откуда

$$\mu_1(f) \geqslant \mu(f) - 2/3r(f) \cdot 1/2 = r(f) - 6 - r(f)/3 = 2/3 \cdot (r(f) - 9) \geqslant 0.$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть f — 1-голодная 7-грань, инцидентная единственному донору v. Тогда обе вершины грани f, смежные с v, имеют тип* $(0, 1, 0)$.

Доказательство. Рассмотрим грань $f = vv_1v_2v_3v_4v_5v_6$ из условия леммы. По лемме 4(iv) грань f инцидентна четырём $(0, 1, 0)$-вершинам. По свойству (4) по крайней мере одна из вершин v_1, v_6 является $(0, 1, 0)$-вершиной, иначе все четыре $(0, 1, 0)$-вершины идут подряд. Если только одна из вершин v_1, v_6 является $(0, 1, 0)$-вершиной, то получаем противоречие со свойством (5). Лемма 8 доказана.

2.4. Окрестности вершин степени 4. Пусть вершина v — донор. Назовём 1-голодную 7-грань f, инцидентную v, 1-*голодной относительно* v, если v — единственный донор f.

Лемма 9. *Пусть v — $(0, 0, 0, 0)$-вершина.*

(i) *Если v инцидентна одной 1-голодной относительно себя грани, то в окружении v есть либо ненуждающаяся грань, либо не менее двух 1/4-голодных.*

(ii) *Если v инцидентна двум 1-голодным относительно себя граням, то две другие инцидентные v грани ненуждающиеся.*

Доказательство. Обозначим через f_i, $i = 1, \ldots, 4$, грани, инцидентные вершине v. Вершины граней обозначим следующим образом: $f_2 = vs_2q_1q_2 \ldots v_2v_1t_2$, $f_3 = vt_2u_1u_2 \ldots u_3u_4t_4$, $f_4 = vt_4w_1w_2 \ldots r_2r_1s_1$.

(i) Пусть f_1 — 1-голодная относительно v грань. В этом случае по лемме 8 вершины q_1 и r_1 имеют степень 2. Допустим, что среди f_i, $i = 2, 3, 4$, нет ненуждающихся. Тогда по лемме 7 грани f_2, f_4 не могут быть ранга более 8, а по лемме 6(i) ранг f_2 и f_4 не равен 8, так как они инцидентны 2-вершинам q_1 и r_1 соответственно. Вершина t_i не $(0, 1, 0)$-торчащая относительно f_3, иначе f_i инцидентна двум 2-вершинам и по следствию 3 ненуждающаяся, $i = 2, 4$. Таким образом, если f_3 — 8-грань, то по свойству (4) не более четырёх её вершин могут быть $(0, 1, 0)$-вершинами, и, значит, f_3 ненуждающаяся. Таким образом, $r(f_i) = 7$, $i = 2, 3, 4$.

Степени вершин u_1, u_4 не более трёх, так как в противном случае грань f_3 не передаёт заряд вершинам u_1, u_4, t_2, t_4, v и, следовательно,

является ненуждающейся. Пусть u_4 — 2-вершина. Тогда вершины u_1, u_2 — $(0,1,0)$-торчащие относительно f_3. Следовательно, $d(u_3) \geqslant 4$ по свойству (4). Таким образом, получаем, что f_3 — $1/4$-голодная грань. Так как грань f_2 голодная, вершины v_1, v_2 $(0,1,0)$-торчащие. Следовательно, $d(q_2) \geqslant 4$ по свойству (4). Тем самым получаем, что f_2 — $1/4$-голодная грань. Если u_1 — 2-вершина, то в силу симметрии f_3, f_4 — $1/4$-голодные грани.

Пусть $d(u_1) = d(u_4) = 3$. Тогда v_1, v_2 и w_1, w_2 $(0,1,0)$-торчащие относительно f_2, f_4, соответственно. Следовательно, в силу свойства (4) вершины q_2, r_2 имеют степень не менее четырёх. Таким образом, f_2, f_4 — $1/4$-голодные грани.

(ii) В силу леммы 8 очевидно, что 1-голодные относительно одной и той же вершины грани не могут быть смежны. Допустим, грани f_1, f_3 — 1-голодные относительно v. Тогда грани f_2, f_4 инцидентны двум 2-вершинам каждая и, значит, они ненуждающиеся. Лемма 9 доказана.

Рассмотрим $(0,0,0,1)$-вершину v.

Лемма 10. *Любая 1-голодная 7-грань, инцидентная $(0,0,0,1)$-вершине, имеет не менее двух доноров.*

Доказательство. Пусть 1-голодная 7-грань $f = t_1w_1u_1vu_2w_2t_2$ инцидентна одному донору — $(0,0,0,1)$-вершине v. Тогда по лемме 4(iv) среди вершин грани f четыре $(0,1,0)$-вершины, и в силу леммы 8 вершины u_1, u_2 являются $(0,1,0)$-вершинами. В силу свойств (4) и (5) возможны следующие две конфигурации.

1. t_1, t_2 — $(0,1,0)$-вершины. Вершины w_1, w_2 не могут быть $(0,0,1,1)$ по свойству (4). Следовательно, поскольку v — единственный донор грани f, имеем $d(w_1) = d(w_2) = 3$. Удалим вершины грани f, а также 2-вершины, с ними смежные. В силу минимальности контрпримера для полученного графа существует $(3,3)$-раскраска φ. Продолжим её на весь граф G. Обозначим через s_i, l_i вершины, смежные с u_i, t_i соответственно, $i = 1,2$. Красим v, w_i, s_i, l_i, $i = 1,2$, по закону противоположности. Вершины u_i красим в $\varphi_{\min}(u_i)$, $i = 1,2$. Остаётся окрасить t_1, t_2. Если $\varphi(w_i) = \varphi(l_i) = x$, то полагаем $\varphi(t_i) = \neg x$, $i = 1,2$, иначе красим t_1, t_2 так, чтобы $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. Одноцветных цепей длины более трёх при дораскраске не образуется. Таким образом, граф G $(3,3)$-разбиваемый; противоречие.

2. t_1, w_2 — $(0,1,0)$-вершины (случай, когда t_2, w_1 — $(0,1,0)$-вершины, симметричен). В этом случае t_2 не $(0,0,1,1)$-вершина по свойству (4), откуда $d(t_2) = 3$. Вершина w_1 не $(0,0,1,1)$-вершина по свойству (5), сле-

довательно, $d(w_1) = 3$.

Переобозначим вершины, инцидентные f_1, циклически сдвинув все обозначения против часовой стрелки на две вершины, т. е. $w_1 \to v$, $u_2 \to t_1$ и т. д. Дальнейшее доказательство полностью аналогично доказательству первого пункта. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Если в окружении* $(0,0,0,1)$*-вершины* v *грани* f_i α_i*-голодные,* $i = 3, 4$*, то* $\alpha_3/k_3 + \alpha_4/k_4 \leqslant 1/2$*, где* k_i *— количество доноров грани* f_i*,* $i = 3, 4$.

Доказательство. Так как грани f_3, f_4 голодные и инцидентные 2-вершине u, то по леммам 6(i) и 7 имеем $r(f_3) = r(f_4) = 7$. Обозначим $f_3 = s_1s_2s_3s_4wuv$, $f_4 = t_1t_2t_3t_4wuv$, где u — 2-вершина. Из леммы 4 следует, что $\alpha_i \in \{3/4, 1/2, 1/4\}$, $i = 3, 4$. Можно считать, что $\alpha_3 \geqslant \alpha_4$.

1. Пусть $\alpha_3 = 3/4$. По лемме 4(iii) это возможно в единственной конфигурации: s_1, s_2, s_4 — $(0,1,0)$-вершины, u является 2-вершиной типа B, т. е. $d(w) = 3$. По лемме 5 $k_3 = 2$. Если $\alpha_4 = 3/4$, то возникает (0,1,0)-цепь длины 3 — s_4wt_4, что противоречит свойству (4). Так как f_4 инцидентна 2-вершине типа B, то по лемме 4(ii) $\alpha_4 \neq 1/2$. Таким образом, $\alpha_4 = 1/4$ и по лемме 4(i) грань f_4 инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам. По свойству (4) t_4 не $(0,1,0)$-вершина, и благодаря свойству (5) для цепи $s_2s_1vt_1t_2$ только одна из вершин t_1, t_2 может быть $(0,1,0)$-вершиной. Поэтому возможны только следующие две конфигурации грани f_4, причём в обеих одной из $(0,1,0)$-вершин является t_3.

1.1. t_1, t_3 — $(0,1,0)$-вершины. Докажем, что по крайней мере одна из вершин t_2, t_4 является донором. Допустим, что $d(t_2) = d(t_4) = 3$. Удалим вершины граней f_3, f_4 и смежные с ними 2-вершины, за исключением вершины-донора s_3. Продолжим $(3,3)$-раскраску φ полученного графа на удалённые вершины. Прежде всего применим закон противоположности, т. е. красим каждую вершину, смежную с неудалённой, по закону противоположности. Неокрашенными остаются s_1, t_1, t_3, w и u. Обозначим 2-вершину, смежную с s_1, через s_1'. Если $\varphi(s_1') = \varphi(s_2) = x$, то полагаем $\varphi(s_1) = \neg x$, $\varphi(t_1) = \neg\varphi(v)$, $\varphi(t_3) = \neg\varphi(t_2)$, $\varphi(w) = \neg\varphi(t_4)$, $\varphi(u) = \neg\varphi(w)$. Иначе $\varphi(s_1) = \varphi(u) := \neg\varphi(v)$, $\varphi(t_1) := \neg\varphi(t_2)$, $\varphi(t_3) := \neg\varphi(t_4)$, $\varphi(w) := \neg\varphi(s_4)$. Получили $(3,3)$-раскраску графа G; противоречие. Заметим, что если s_2 и t_3 смежны с одной и той же 2-вершиной, то сначала окрашиваем её в цвет, отличный от $\varphi(s_2)$, а далее дораскраска аналогична описанной выше.

Таким образом, хотя бы одна из вершин t_2, t_4 имеет степень не менее четырёх. Вершины t_2, t_4 не $(0,0,1,1)$-вершины по свойствам (5) и (4)

соответственно. Таким образом, $k_4 \geqslant 2$, значит,

$$\alpha_3/k_3 + \alpha_4/k_4 \leqslant 3/4 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/2 = 3/8 + 1/8 = 1/2.$$

1.2. t_2, t_3 — $(0,1,0)$-вершины. По свойству (5) степень t_4 не менее четырёх, и если $d(t_4) = 4$, то среди вершин, смежных с t_4, нет 2-вершин. Таким образом, t_4 — донор и $\alpha_3/k_3 + \alpha_4/k_4 \leqslant 3/4 \cdot 1/2 + 1/4 \cdot 1/2 = 1/2$.

2. Пусть $\alpha_3 = 1/2$. Тогда $d(w) \geqslant 4$ по лемме 4(ii), следовательно, $\alpha_4 = 1/2$. Значит, по лемме 4(ii) грани f_3, f_4 имеют по три $(0,1,0)$-вершины. В силу свойств (4) и (5) по крайней мере одна из пар s_3, s_4 и t_3, t_4 — пара $(0,1,0)$-вершин. Таким образом, w не $(0,0,1,1)$-вершина по свойству (4). Следовательно, $k_3, k_4 \geqslant 2$ и

$$\alpha_3/k_3 + \alpha_4/k_4 \leqslant 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 1/2.$$

Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть v — 4-вершина, смежная с 2-вершиной, f — грань, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) *f инцидентна v, но не инцидентна 2-вершинам, смежным с v;*

(ii) *f не имеет доноров, за исключением случая, когда v — $(0,0,0,1)$;*

(iii) *вершины f, смежные с v, не являются $(0,1,0)$-вершинами, торчащими относительно f.*

Тогда f ненуждающаяся.

Доказательство. Допустим, что f α-голодная. Тогда в силу условия (ii) с учётом лемм 7 и 6(ii) $r(f) = 7$. Пусть $f = vv_1v_2v_3v_4v_5v_6$. По условию (iii) v_1, v_6 не $(0,1,0)$-вершины, следовательно, по свойству (4) среди остальных v_i может быть не более трёх $(0,1,0)$-вершин, значит, $\alpha \neq 1$. Так как у f не более одного донора, то по лемме 5 $\alpha \neq 3/4$. Докажем, что среди вершин грани f нет 2-вершин. В силу симметрии достаточно рассмотреть вершины v_2, v_3. Допустим, v_2 — 2-вершина, тогда хотя бы одна из смежных с ней вершин имеет степень три, иначе f ненуждающаяся. Вершина v_3 имеет степень не менее четырёх, так как в противном случае образуется (0,1,0)-цепь длины 3 (v_4, v_5 — $(0,1,0)$-вершины, иначе грань f ненуждающаяся). По условию (ii) v_3 является $(0,0,1,1)$-вершиной, что противоречит свойству (4). Если v_3 — 2-вершина, то плохих обьектов у грани не более двух, а значит, она ненуждающаяся.

Таким образом, $\alpha = 1/2$, и f инцидентна трём $(0,1,0)$-вершинам. Пусть это v_2, v_3, v_5 (случай v_2, v_4, v_5 симметричен). Заметим, что $d(v_1) = d(v_4) = d(v_6) = 3$. Действительно, по условию (ii) все вершины грани

имеют степень не более четырёх, а по свойству (4) v_1, v_4 не $(0,0,1,1)$-вершины, так же как и v_6 по свойству (5) для цепи $v_2v_3v_4v_5v_6$. Удалим вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Пусть φ — $(3,3)$-раскраска полученного графа. Продолжим раскраску. После применения закона противоположности неокрашенными остаются v_2, v_3, v_5. Если $\varphi(v_1)=\varphi(v_6)=x$, то полагаем $\varphi(v_2)=\varphi(v_5)=\neg x$, $\varphi(v_3)=x$. Пусть $\varphi(v_1)\neq\varphi(v_6)$, тогда если $\varphi(v)\neq\varphi(v_6)$, то $\varphi(v_5):=\neg\varphi(v_4)$, $\varphi(v_2):=\neg\varphi(v_1)$, $\varphi(v_3):=\varphi_{\min}$, иначе $\varphi(v_5):=\neg\varphi(v_6)$, $\varphi(v_3):=\neg\varphi(v_4)$, $\varphi(v_2):=\neg\varphi(v_3)$. Полученная раскраска является $(3,3)$-раскраской графа G; противоречие. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Пусть v — 4-вершина, смежная с 2-вершиной u, и f — грань, удовлетворяющая следующим условиям*:

(i) *f инцидентна v, но не инцидентна u*;

(ii) *f не имеет доноров, кроме случая, когда v — $(0,0,0,\ 1)$-вершина*;

(iii) *вершины f, смежные с v, имеют степень* 3;

(iv) *f инцидентна 2-вершине, находящейся на расстоянии 2 от v.*

Тогда f ненуждающаяся.

Доказательство. Допустим, что f α-голодная. По леммам 6 и 7 имеем $r(f)=7$. Пусть $f=vv_1v_2v_3v_4v_5v_6$, где $d(v_5)=2$. По леммам 4 и 5 $\alpha\neq 1,\ 3/4$. Пусть $\alpha=1/4$. По лемме 4(ii) грань f инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам и v_5 — 2-вершина типа B. В силу условий (ii) и (iii) v_4 — $(0,0,1,1)$-вершина. Вершины v_2, v_3 по свойству (4) не могут быть парой $(0,1,0)$-вершин для цепи $v_2v_3v_4$. В силу вышесказанного возможны две конфигурации f.

1. v_1, v_3 — $(0,1,0)$-вершины. Вершина v_2 не $(0,0,1,1)$-вершина по свойству (4). Таким образом, все вершины грани f, кроме v, v_4 и v_5, имеют степень 3. Удалим вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Пусть φ — $(3,3)$-раскраска полученного графа. Продолжим раскраску. После применения закона противоположности неокрашенными остаются v_1, v_3, v_5. Положим $\varphi(v_1)=\varphi_{\min}(v_1)$, $\varphi(v_3)=\varphi_{\min}(v_3)$, $\varphi(v_5)=\neg\varphi(v_6)$. Полученная раскраска является $(3,3)$-раскраской графа G; противоречие.

2. v_1, v_2 — $(0,1,0)$-вершины. Вершина v_3 не $(0,0,1,1)$-вершина по свойству (4). Таким образом, все вершины грани f, кроме v, v_4 и v_5, имеют степень 3. Удалим вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Пусть φ — $(3,3)$-раскраска полученного графа. Продолжим раскраску. После применения закона противоположности неокрашенными остаются v_1, v_2, v_5. Положим $\varphi(v_5)=\neg\varphi(v_6)$, $\varphi(v_2)=\neg\varphi(v_3)$, $\varphi(v_1)=\varphi_{\min}$. Полученная раскраска является $(3,3)$-раскраской графа G; противоречие.

Пусть $\alpha = 1/2$. В этом случае f инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам, и v_5 — 2-вершина типа А. Здесь также возможны две рассмотренные выше конфигурации. Удаляя вершины грани f и смежные с ними 2-вершины и производя окрашивание так же, как в предыдущем случае, получаем $(3,3)$-раскраску графа G; противоречие. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Грань из окружения* $(0,0,1,1)$*-вершины* v*, инцидентная только одной 2-вершине, смежной с* v*, либо ненуждающаяся, либо имеет донора.*

Доказательство. Пусть f — грань, удовлетворяющая условиям леммы. Если $r(f) \geqslant 8$, то по леммам 6(i) и 7 грань f ненуждающаяся. Пусть 7-грань $f = vv_1v_2v_3v_4v_5v_6$, где v_6 — 2-вершина, не имеет доноров. Докажем, что f не может быть инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам, из чего по лемме 4 будет следовать, что грань f ненуждающаяся.

Вершина v_5 имеет степень 3, так как если v_5 — $(0,0,1,1)$-вершина, то 2-вершина v_6 не является плохой, и, чтобы быть ненуждающейся, грань f должна быть инцидентна трём $(0,1,0)$-вершинам, что невозможно в силу свойства (4). Допустим, что f инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам. В силу свойства (4) возможны следующие четыре конфигурации.

1. v_1, v_4 — $(0,1,0)$-вершины. Вершины v_2, v_3 не $(0,0,1,1)$-вершины в силу свойства (4) и, следовательно, имеют степень 3.

Итак, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_5) = 3$. Удалим вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Пусть φ — $(3,3)$-раскраска полученного графа. Продолжим раскраску. Прежде всего применяем закон противоположности, после чего неокрашенными остаются v_1, v_4, v_6. Окрашиваем их следующим образом: $\varphi(v_6) := \neg\varphi(v_5)$, $\varphi(v_4) := \neg\varphi(v_3)$, $\varphi(v_1) := \varphi_{\min}$.

2. v_1, v_3 — $(0,1,0)$-вершины. Вершины v_2, v_4 не $(0,0,1,1)$-вершины в силу свойства (4) и, следовательно, являются 3-вершинами. Удалим вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Пусть φ — $(3,3)$-раскраска полученного графа. Для продолжения раскраски на весь граф применяем закон противоположности, после чего оставшиеся неокрашенными вершины получают цвета: $\varphi(v_6) = \neg\varphi(v_5)$, $\varphi(v_3) = \varphi_{\min}(v_3)$, $\varphi(v_1) = \varphi_{\min}(v_1)$.

3. v_2, v_3 — $(0,1,0)$-вершины. Вершины v_1, v_4 не $(0,0,1,1)$-вершины в силу свойства (4) и, следовательно, являются 3-вершинами. Удалим вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Пусть φ — $(3,3)$-раскраска полученного графа. Для продолжения раскраски на весь граф применяем закон противоположности, после чего оставшиеся неокрашенными вершины получают цвета: $\varphi(v_2) = \neg\varphi(v_1)$, $\varphi(v_6) = \neg\varphi(v_5)$, $\varphi(v_3) = \varphi_{\min}$.

4. v_2, v_4 — $(0,1,0)$-вершины. Вершины v_1, v_3 не $(0,0,1,1)$-вершины

в силу свойства (4) и, следовательно, являются 3-вершинами. Удалим вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Пусть φ — $(3,3)$-раскраска полученного графа. Для продолжения раскраски на весь граф применяем закон противоположности, после чего оставшиеся неокрашенными вершины получают цвета: $\varphi(v_2) = \neg\varphi(v_1)$, $\varphi(v_4) = \neg\varphi(v_3)$, $\varphi(v_6) = \neg\varphi(v_5)$.

Во всех случаях при дораскраске не образуется одноцветных цепей длины более трёх. Полученная раскраска является $(3,3)$-раскраской графа G; противоречие. Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *Грань из окружения* $(0,0,1,1)$*-вершины* v*, не инцидентная* 2*-вершинам, смежным с* v*, либо ненуждающаяся, либо имеет донора.*

Доказательство. Пусть f — грань, удовлетворяющая условиям леммы. В случае $r(f) > 7$ утверждение следует из лемм 6 и 7. Пусть $f = vv_1v_2v_3v_4v_5v_6$ — голодная 7-грань без доноров. В силу леммы 12 хотя бы одна из вершин v_1, v_6 — $(0,1,0)$-вершина. Без потери общности предположим, что v_6 — $(0,1,0)$-вершина. Тогда по свойству (3) $d(v_5) \geqslant 3$, а в силу свойства (4) v_5, во-первых, не может быть $(0,0,1,1)$-вершиной и, следовательно, является 3-вершиной, во-вторых, не является $(0,1,0)$-вершиной. Пусть v_2 — 2-вершина, тогда $d(v_1) > 3$ по лемме 13 и v_1 — $(0,0,1,1)$-вершина. Так как f — голодная грань, то согласно лемме 4 v_3 и v_4 являются $(0,1,0)$-вершинами, при этом v_4 — торчащая относительно f. В этом случае получаем противоречие со свойством (5) для цепи $vv_1v_2v_3v_4$. Следовательно, $d(v_2) \geqslant 3$. Согласно свойству (4) имеем $d(v_4) \geqslant 3$. Допустим, v_3 является 2-вершиной. Тогда по лемме 4 v_1 должна быть торчащей $(0,1,0)$-вершиной для f, а v_2 — максимальной вершиной степени 3 или 4, что противоречит свойству (4) для цепи vv_1v_2.

Таким образом, f не инцидентна 2-вершинам. Помимо v_6 грань f инцидентна по крайней мере двум $(0,1,0)$-вершинам. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть v_4 — $(0,1,0)$-вершина. Вершина v_3 — не $(0,0,1,1)$-вершина, так как иначе возникает сводимая цепь $P = v_3v_4v_5v_6v$ из свойства (5), т. е. $d(v_3) = 3$. Опять же по свойству (5) вершина v_3 — не $(0,1,0)$-вершина. Остаются следующие два подслучая.

1.1. v_2 — $(0,1,0)$-вершина. Тогда v_1 — не $(0,0,1,1)$-вершина, иначе противоречие со свойством (6) для цепи $P = v_1v_2v_3v_4v_5v_6v$, и, значит, $d(v_1) = 3$. Удалим вершины грани f и смежные с ними 2-вершины. Для полученного графа существует (3,3)-раскраска φ. Чтобы продолжить её на весь граф G, применяем закон противоположности, после чего остаётся окрасить v, v_2, v_4, v_6. Делаем это следующим образом:

$\varphi(v) = \neg\varphi(v_1)$, $\varphi(v_6) = \neg\varphi(v)$, $\varphi(v_4) = \neg\varphi(v_5)$, $\varphi(v_2) = \neg\varphi(v_3)$. Получили $(3,3)$-раскраску графа G; противоречие.

1.2. v_1 — $(0,1,0)$-вершина. Тогда v_2 — не $(0,0,1,1)$-вершина, иначе цепь vv_1v_2 противоречит свойству (4), и, следовательно, $d(v_1) = 3$. После стандартной процедуры удаления и применения закона противоположности остаётся окрасить вершины v, v_1, v_4, v_6. Полагаем $\varphi(v_4) = \neg\varphi(v_3)$, $\varphi(v_6) = \neg\varphi(v_5)$, $\varphi(v) = \neg\varphi(v_6)$, $\varphi(v_1) = \varphi_{\min}$. Получили $(3,3)$-раскраску графа G; противоречие.

2. Пусть v_3 — $(0,1,0)$-вершина. Заметим, что $d(v_4) = 3$, так как иначе v_4 — $(0,0,1,1)$-вершина и по свойствам (4) и (5) количество плохих вершин, инцидентных грани f, не более двух, а значит, она ненуждающаяся. Также v_4 — не $(0,1,0)$-вершина по свойству (5). Рассмотрим следующие подслучаи.

2.1. v_2 — $(0,1,0)$-вершина. Тогда v_1 — не $(0,0,1,1)$-вершина и не $(0,1,0)$-вершина по свойству (4). После стандартной процедуры удаления и применения закона противоположности остаётся окрасить вершины v, v_2, v_3, v_6. Если $\varphi(v_1) = \varphi(v_4) = x$, то полагаем $\varphi(v_2) = x$, $\varphi(v_3) = \neg x$, $\varphi(v) = \neg x$, $\varphi(v_6) = \varphi_{\min}$. В противном случае если $\varphi(v_1) = \alpha$, $\varphi(v_4) = \beta$, полагаем $\varphi(v_2) = \beta$, $\varphi(v_3) = \alpha$, $\varphi(v_6) = \alpha$, $\varphi(v) = \beta$. Получили $(3,3)$-раскраску графа G; противоречие.

2.2. v_1 — $(0,1,0)$-вершина. Этот случай симметричен случаю 1.1.

Вершины v_1, v_2 не могут быть одновременно $(0,1,0)$-вершинами по свойству (4), и, таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи, в каждом из которых пришли к противоречию. Лемма 15 доказана.

2.5. Проверка неотрицательности зарядов μ_2. Следующий ряд лемм доказывает, что после перераспределения зарядов по правилам П1–П3 $\mu_2(x) \geqslant 0$ для любого элемента $x \in V \cup F$, что противоречит $(*)$.

Лемма 16. *Если $f \in F(G)$, то $\mu_2(f) \geqslant 0$.*

Доказательство. Рассмотрим в графе G произвольную грань f ранга $r \geqslant 7$. Напомним, что $\mu(f) = r - 6 \geqslant 1$. Если $r \geqslant 8$, то из лемм 6 и 7 и правила П3 следует, что $\mu_2(f) \geqslant 0$. Пусть f — α-голодная 7-грань. Допустим, что среди вершин грани f нет донора. Тогда если все вершины грани f имеют степень не более трёх, то по следствию 2(ii) и леммам 1, 2 грань f инцидентна не более двум плохим объектам, следовательно, она ненуждающаяся; противоречие. Тем самым f инцидентна $(0,0,1,1)$-вершине v. Если обе 2-вершины, смежные с v, инцидентны f, то по лемме 4 она ненуждающаяся; противоречие. Иначе получаем противоречие с леммой 14, если f инцидентна одной 2-вершине, смежной с v, иначе — с леммой 15. Таким образом, среди вершин грани f есть

донор, и по правилу П3 имеем $\mu_2(f) = \mu_1(f) + k \cdot \alpha/k = -\alpha + \alpha = 0$. Лемма 16 доказана.

Рассмотрим в графе G произвольную вершину $v \in V$ степени d. Согласно свойству $(1')$ имеем $d \geqslant 2$. Напомним величину первоначального заряда вершины v: $\mu(v) = 2d-6$. Обозначим грани, инцидентные v, через $f_1, f_2, \ldots, f_d$. Так как грани ранга более 8 в распределении зарядов по правилу П3 не участвуют, рассматриваем грани только ранга 7 и 8.

Лемма 17. *Если v — $(0,0,1,1)$-вершина или её степень не более 3, то $\mu_2(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $d = 2$, тогда в результате применения правила П1 получаем $\mu_2(v) = \mu_1(v) = \mu(v) + 1 + 1 = -2 + 2 = 0$.

Пусть $d = 3$, тогда если v — $(0,1,0)$-вершина, то

$$\mu_2(v) = \mu_1(v) = \mu(v) - 1 + 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 0 - 1 + 1 = 0,$$

иначе v не участвует в перераспределении зарядов и $\mu_2(v) = \mu(v) = 0$.

Пусть v — $(0,0,1,1)$-вершина. Вершина v не является донором и не отдаёт заряд по правилу П3, поэтому $\mu_2(v) = \mu_1(v) = \mu(v) - 2 = 2 - 2 = 0$. Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *Если v — $(0,0,0,0)$-вершина, то $\mu_2(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть v — $(0,0,0,0)$-вершина, $\mu_1(v) = \mu(v) = 2$. Если грань f_i не 1-голодная относительно v, то по леммам 5, 6 и 7 имеем $\mu_1(f_i)/k_i \geqslant -1/2$, $i = 1, \ldots, 4$. Таким образом, если в окружении вершины v нет 1-голодных относительно неё граней, то

$$\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 4 \cdot 1/2 = 2 - 2 = 0.$$

Пусть v инцидентна 1-голодной относительно себя грани. Если таких граней две, то $\mu_2(v) = \mu_1(v) - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$ по лемме 9(ii). Если f_1 — единственная 1-голодная относительно v грань, то по лемме 9(i) среди f_2, f_3, f_4 либо есть ненуждающаяся и, значит,

$$\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 1 - 2 \cdot 1/2 = 2 - 2 = 0,$$

либо не менее двух 1/4-голодных граней и тогда

$$\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 1 - 1/2 - 2 \cdot 1/4 = 2 - 2 = 0.$$

Лемма 18 доказана.

Лемма 19. *Если v — $(0,0,0,1)$-вершина, то $\mu_2(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть v — $(0,0,0,1)$-вершина. Тогда

$$\mu_1(v) = \mu(v) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Пусть f_3, f_4 инцидентны 2-вершине, смежной с v. По леммам 5, 6 и 10 имеем $\mu_1(f_i)/k_i \geqslant -1/2$, $i = 1, \ldots, 4$.

В силу леммы 11 выполняется неравенство $\alpha_3/k_3 + \alpha_4/k_4 \leqslant 1/2$. Таким образом, если одна из f_1, f_2 ненуждающаяся, то

$$\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 1/2 - 1/2 = 1 - 1 = 0.$$

Пусть f_1, f_2 голодные. Если $\alpha_i/k_i \leqslant 1/4$, $i = 1, 2$, то

$$\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 1/2 - 2 \cdot 1/4 = 1 - 1 = 0.$$

Без потери общности предположим, что $\mu_2/k_2 > 1/4$. Покажем, что $\alpha_i \neq 3/4$, $i = 1, 2$. Предположим противное, тогда по лемме 5 количество доноров у грани f_i равно $k_i = 2$, причём один донор смежен с 2-вершиной, инцидентной f_i, и поэтому отличен от v, а другой не может быть $(0,0,0,1)$-вершиной по свойству (5), следовательно, $k_i > 2$; противоречие.

Поэтому либо $\alpha_2 = 1$ и $k_2 \in \{2, 3\}$, либо $\alpha_2 = 1/2$, $k_2 = 1$. В обоих случаях $r(f_2) = 7$ по лемме 6. Надо доказать, что $\sum \alpha_i/k_i \leqslant 1$.

Обозначим вершины, смежные с v, следующим образом: u — 2-вершина, v_1, v_2 — вершины, инцидентные граням f_1, f_2 соответственно, v_3 — вершина, инцидентная им обеим. Также нам потребуются следующие обозначения: s_1, u_1 — вершины, смежные с v_1 и инцидентные граням f_1, f_4 соответственно, s_2, u_2 — вершины, смежные с v_2 и инцидентные граням f_2, f_3 соответственно, l_1, l_2 — вершины, смежные с v_3 и инцидентные граням f_1, f_2 соответственно.

Докажем, что $d(s_2) \geqslant 3$. Предположим противное: $d(s_2) = 2$, тогда по лемме 4 $\alpha_2 < 1$, следовательно, $\alpha_2 = 1/2$, $k_2 = 1$, и по лемме 4(ii) s_2 — 2-вершина типа A и f_2 инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам, одна из которых по свойству (4) — вершина v_3. Таким образом, выполняются условия леммы 13, следовательно, f_2 — ненуждающаяся грань; противоречие.

Следовательно, v_2 — не $(0,1,0)$-вершина относительно f_3. Значит, по лемме 4(iii) $\alpha_3 \neq 3/4$. Пусть $\alpha_3 = 1/2$. Тогда $r(f_3) = 7$, по лемме 4(ii) 2-вершина u, смежная с v, не является плохой, т. е. обе смежные с u вершины имеют степень не менее 4, и f_3 инцидентна трём $(0,1,0)$-вершинам, которые могут идти только подряд, что противоречит свойству (4). Поэтому если f_3 — голодная, то $\alpha_3 = 1/4$.

Если $\alpha_2 = 1/2$, $k_2 = 1$, то по лемме 12 хотя бы одна из вершин v_2, v_3 — $(0,1,0)$-торчащая относительно f_2 вершина. Это же верно и в том случае, когда $\alpha_2 = 1$, так как иначе четыре инцидентные f_2 $(0,1,0)$-вершины идут подряд, что противоречит свойству (4).

Допустим, v_3 — $(0,1,0)$-торчащая относительно f_2 вершина, тогда l_1 — 2-вершина, и согласно леммам 6 и 7 если f_1 является голодной, то $r(f_1) = 7$ и $\alpha_1 \neq 1$. Пусть $\alpha_1 = 1/2$. Тогда l_1 — 2-вершина типа А и f_1 инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам. По свойству (4) одна из них — v_1. Тогда, во-первых, по лемме 13 грань f_1 инцидентна второму донору, во-вторых, f_4 инцидентна двум 2-вершинам, и по следствию 3 имеем $\alpha_4 = 0$. Таким образом, $\sum \alpha_i/k_i \leqslant 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$.

Пусть $\alpha_1 = 1/4$, $f_1 = vv_1s_1w_1w_2l_1v_3$. Тогда $d(w_2) \geqslant 4$ и f_1 инцидентна двум $(0,1,0)$-вершинам. Если одной из них является v_1, то f_4 — ненуждающаяся, так как инцидентна двум 2-вершинам u и u_1, и

$$\sum \alpha_i/k_i \leqslant 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1.$$

Поэтому s_1, w_1 — $(0,1,0)$-торчащие относительно f_1 вершины. Значит, по свойству (4) вершина w_2 — донор и v_1 не является $(0,1,0)$-торчащей относительно f_4 вершиной. Следовательно, если f_4 голодная, то $\alpha_4 = 1/4$ по тем же причинам, которые были указаны выше при доказательстве аналогичного факта для f_3.

Пусть f_4 — $1/4$-голодная и v — её единственный донор, иначе

$$\sum \alpha_i/k_i \leqslant 1/8 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 1.$$

В этом случае $d(v_1) = 3$, так как v_1 не может быть $(0,0,1,1)$-вершиной по свойству (4). Пусть $f_4 = vuwr_1r_2u_1v_1$. Так как f_4 — $1/4$-голодная, то по лемме 4(i) w — 3-вершина и f_4 инцидентна паре торчащих $(0,1,0)$-вершин. По свойству (4) для цепи wr_1r_2 это не пара $(r_1,\ r_2)$, по свойству (5) для цепи $w_1s_1v_1u_1r_2$ — не $(u_1,\ r_2)$. Следовательно, $(u_1,\ r_1)$ — $(0,1,0)$-вершины. Но тогда вершина r_2 — донор, иначе получаем противоречие со свойством (6) для цепи $wr_1r_2u_1v_1s_1w_1$ или со свойством (4) для wr_1r_2. Таким образом, этот случай невозможен.

Допустим, v_2 — $(0,1,0)$-торчащая относительно f_2 вершина. Тогда u_2 — 2-вершина, следовательно, $\alpha_3 = 0$.

Докажем, что $\alpha_4/k_4 \leqslant 1/4$. Если $r(f_4) \geqslant 8$, то данное неравенство следует из лемм 6 и 7. Пусть $f_4 = vuwr_1r_2u_1v_1$ — 7-грань.

Предположим, что $\alpha_4 = 3/4$. Тогда по лемме 4(iii) имеем $d(s_1) = 2$, по лемме 5 $k_4 = 2$. Если $d(l_2) = 2$, то $\alpha_2 = 1/2$ и $k_2 = 1$. Следовательно, l_2 — 2-вершина типа А, т. е. $d(v_3) = 3$. Тем самым выполняются условия

леммы 13 для грани f_2; противоречие. Итак, $d(l_2) \geqslant 3$. Если $\alpha_1/k_1 \leqslant 1/8$, то имеем $\sum \alpha_i/k_i \leqslant 1/8 + 1/2 + 3/8 = 1$. Пусть $\alpha_1/k_1 > 1/8$. Тогда по леммам 6, 7 и 4 $f_1 = vv_1s_1w_1w_2l_1v_3$ — 7-грань, где l_1, w_2 — $(0,1,0)$-вершины. Согласно свойству (4) вершина w_1 — донор. Следовательно, и в этом случае получаем $\alpha_1/k_1 = 1/8$ и $\sum \alpha_i/k_i \leqslant 1/8 + 1/2 + 3/8 = 1$.

Пусть $\alpha_4 = 1/2$, $k_4 = 1$. Тогда по лемме 4(ii) вершина u не должна быть плохой, следовательно, $d(w) \geqslant 4$, а так как $k_4 = 1$, то w является $(0,0,1,1)$-вершиной. Кроме того, f_4 инцидентна трём $(0,1,0)$-вершинам. Докажем, что это невозможно. Действительно, по свойству (4) только одна из r_1, r_2 может быть $(0,1,0)$-вершиной. Если таковой является r_1, то получаем противоречие со свойством (5) для цепи $wr_1r_2u_1v_1$, если r_2, то со свойством (4) для $r_2u_1v_1$.

Таким образом, $\alpha_4/k_4 \leqslant 1/4$. Следовательно, если $\alpha_1/k_1 \leqslant 1/4$, то

$$\sum \alpha_i/k_i \leqslant 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1.$$

Пусть $\alpha_1/k_1 > 1/4$. Тогда $r(f_1) = 7$ по лемме 6. Если $\alpha_1 = 1/2$, $k_1 = 1$, то по лемме 12 хотя бы одна из вершин v_1, v_3 является $(0,1,0)$-торчащей относительно f_1. Однако v_3 не может быть таковой по лемме 13 для грани f_2. По свойству (4) то же самое верно и в случае, когда $\alpha_1 = 1$. Таким образом, f_4 инцидентна двум 2-вершинам, следовательно, $\alpha_4 = 0$ и $\sum \alpha_i/k_i = 1/2 + 1/2 = 1$. Лемма 19 доказана.

Для доказательства следующей леммы нам потребуется определение. Назовём *жёстким* ребро, одна концевая вершина которого имеет степень не менее 5, а другая — не менее 3.

Также потребуется

Утверждение 1. *Пусть v — донор, u — 2-вершина, смежная с v, f — α-голодная грань из окружения v, инцидентная u. Тогда $\alpha/k \leqslant 3/8$.*

Доказательство. Если $r(f) = 8$, то $\alpha > 0$ по лемме 6(i). Пусть $r(f) = 7$. Если $\alpha = 3/4$, то по лемме 5 $k = 2$. Пусть $\alpha = 1/2$. Обозначим через w вершину, смежную с 2-вершиной u. По лемме 4(ii) $d(w) \geqslant 4$ и f инцидентна трём $(0,1,0)$-вершинам. В силу свойств (4) и (5) w не может быть $(0,0,1,1)$-вершиной. Следовательно, w — донор и $k \geqslant 2$. Таким образом, $\alpha/k \leqslant 3/8$. Утверждение 1 доказано.

Лемма 20. *Если v — вершина степени 5, то $\mu_2(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Заметим, что $\mu(v) = 2\cdot 5 - 6 = 4$. По свойству (3) вершина v смежна не более чем с тремя 2-вершинами.

1. Пусть вершина v смежна с тремя 2-вершинами, другими словами, v максимальная.

Рассмотрим грань f, инцидентную ровно одному жёсткому ребру e, инцидентному v. Если f — α-голодная, то $\alpha/k \leqslant 1/4$. Действительно, если $r(f) \geqslant 8$, то $\alpha = 0$ согласно лемме 6(i). Пусть $r(f) = 7$, $f = vv_1v_2v_3v_4v_5v_6$, где v_1 — 2-вершина. По свойству (4) только одна из вершин v_5, v_6 может быть $(0,1,0)$-вершиной. По этому же свойству если v_2 не донор, только одна из v_3, v_4 может быть $(0,1,0)$-вершиной, тогда $\mu_1(f) \geqslant -1/4$. Иначе k (количество доноров грани f) не меньше двух и f не отдаёт заряд 2-вершине v_1, откуда $\alpha \leqslant 1/2$ и $\alpha/k \leqslant 1/4$.

Теперь рассмотрим грань $f = vv_1 \dots v_i$, инцидентную двум жёстким рёбрам $e_1 = vv_1$ и $e_2 = vv_i$. В этом случае если f α-голодная, то $\alpha/k \leqslant 1/2$. Действительно, если $r(f) \geqslant 8$, то $\alpha = 1/2$ по лемме 6(ii). Пусть $r(f) = 7$. Если $\alpha = 3/4$, то по лемме 5 $k = 2$. Если f 1-голодная и v — её единственный донор, то грань f инцидентна четырём $(0,1,0)$-вершинам и возникает сводимая конфигурация либо из свойства (4), либо из свойства (5).

Заметим, что если жёсткие рёбра $e_1 = vv_1$, $e_2 = vv_2$ инцидентны одной грани f, то в окружении v не более трёх нуждающихся граней, так как грань, инцидентная двум 2-вершинам, по лемме 4 ненуждающаяся и по доказанному выше f получает по правилу П3 от вершины v заряд не более $1/2$, а грани, инцидентные только одной из e_i, — не более $1/4$. Таким образом, $\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 1/2 - 2 \cdot 1/4 = \mu(v) - 3 - 1 = 4 - 4 = 0$. В противном случае в окружении v не более четырёх нуждающихся не более чем в $1/4$ граней и

$$\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 4 \cdot 1/4 = \mu(v) - 3 - 1 = 4 - 4 = 0$$

2. Пусть вершина v смежна не более чем с двумя 2-вершинами.

Допустим, что в окружении v нет 1-голодных относительно v граней.

2.1. Если v смежна с двумя 2-вершинами, которые инцидентны одной грани, то $\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 4 \cdot 1/2 = \mu(v) - 2 - 2 = 4 - 4 = 0$, иначе в силу утверждения 1 имеем

$$\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 4 \cdot 3/8 - 1/2 = \mu(v) - 2 - 2 = 4 - 4 = 0.$$

2.2. Если v смежна не более чем с одной 2-вершиной, то

$$\mu_2(v) \geqslant \mu_1(v) - 5 \cdot 1/2 \geqslant \mu(v) - 1 - 5/2 = 4 - 7/2 = 1/2 > 0.$$

Пусть в окружении v есть 1-голодная относительно v грань f_i. Тогда вершины, смежные с v и инцидентные f_i, имеют тип $(0,1,0)$. Следовательно, грани из окружения v, смежные с f_i, т. е. f_{i-1} и f_{i+1}, инцидентны

2-вершинам, несмежным с v. Таким образом, если считать, что от каждой смежной с v 2-вершины к инцидентным ей граням пререходит по $1/2$ заряда, то это эквивалентно тому, что v ничего не тратит на смежные 2-вершины и расходует на f_{i-1}, f_{i+1} не более $1/2$, а на все остальные — не более 1. Таким образом,

$$\mu_2(v) \geqslant \mu(v) - 2 \cdot 1/2 - (d(v) - 2) = 2 \cdot d(v) - 6 - d(v) + 1 = d(v) - 5 = 0.$$

Лемма 20 доказана.

Лемма 21. *Если степень вершины v не менее 6, то $\mu_2(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $v \in V$ — вершина степени d, $d \geqslant 6$. Тогда $\mu(v) = 2 \cdot d - 6 \geqslant 6$. Пусть f — α-голодная грань, инцидентная v, тогда в силу лемм 4 и 6 $\alpha \leqslant 1$. По утверждению 1 если f инцидентна 2-вершине, смежной с v, то по правилу П3 она получает от v заряд $\alpha/k \leqslant 3/8 < 1/2$. Грань, инцидентная двум 2-вершинам, по лемме 4 ненуждающаяся и не получает заряда по П3. Теперь для подсчёта заряда, расходуемого вершиной v, будем считать, что от каждой смежной с v 2-вершины к инцидентным ей граням переходит по $1/2$ заряда. Это эквивалентно тому, что v ничего не передаёт на смежные 2-вершины, зато на каждую инцидентную грань тратит не более 1. Следовательно,

$$\mu_2(v) \geqslant \mu(v) - d(v) = 2 \cdot d(v) - 6 - d(v) = d(v) - 6 \geqslant 0.$$

Лемма 21, завершающая доказательство теоремы 1, доказана.

В заключение хочу выразить благодарность обоим рецензентам, замечания которых помогли исправить ряд недостатков и неточностей, допущенных в первоначальном варианте статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В., Глебов А. Н.** О разбиении плоского графа обхвата 5 на пустой и ациклический подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 4. — С. 34–53.
2. **Бородин О. В., Иванова А. О.** Разбиение разреженных плоских графов на два подграфа малой степени // Сиб. электрон. мат. известия. — 2009. — Т. 6. — С. 13–16. (http://semr.math.nsc.ru).
3. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Путевые разбиения планарных графов // Сиб. электрон. мат. известия. — 2007. — Т. 4. — С. 450–459. (http://semr.math.nsc.ru).
4. **Замбалаева Д. Ж.** Путевые разбиения планарных графов. Дипломная работа. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 28 с.

5. **Мельников Л. С., Петренко И. В.** О путевых ядрах и разбиениях в неориентированных графах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2002. — Т. 9, № 2. — С. 21–35.
6. **Borodin O. V.** On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. — 1979. — Vol. 25, N 3. — P. 211–236.
7. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Sheikh N. N., Yu G.** Decomposing a planar graph with girth 9 into a forest and matching // Europ. J. Combin. — 2008. — Vol. 29, N 5. — P. 1235–1241.
8. **Borowiecki M., Broere I., Frick M., Mihok P., Semanisin G.** A survey of hereditary properties of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 1. — P. 5–50.
9. **Broere I., Dorfling M., Dunbar J. E., Frick M.** A path (logical) partition problem // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1998. — Vol. 18, N 1. — P. 113–125.
10. **Broere I., Hajnal P., Mihok P., Semanisin G.** Partition problems and kernels of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 1997. — Vol. 17, N 2. — P. 311–313.
11. **Chartrand G., Kronk H. V.** The point-arboricity of planar graphs // J. London Math. Soc. — 1969. — Vol. 44, N 4. — P. 612–616.
12. **Dunbar J. E., Frick M.** Path kernels and partitions // Math. Combin. Comput. — 1999. — Vol. 31. — P. 137–149.
13. **Dunbar J. E., Frick M., Bullock F.** Path partitions and P_n-free sets // Discrete Math. — 2004. — Vol. 289, N 1–3. — P. 145–155.
14. **Fijavž G., Juvan M., Mohar B., Škrekovski R.** Planar graphs without cycles of specific lengths // Europ. J. Combin. — 2002. — Vol. 23, N 4. — P. 377–388.
15. **Grötzsch H.** Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Natur. Reihe. — 1959. — Vol. 8. — P. 109–120.
16. **Grünbaum B.** Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. — 1973. — Vol. 14, N 3. — P. 390–408.
17. **Hakimi S. L., Mitchem J., Schmeichel E. F.** Star arboricity of graphs // Discrete Math. — 1996. — Vol. 149, N 1–3. — P. 93–98.
18. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. — New York: John Wiley & Sons Inc., 1995. — 295 p.
19. **Kostochka A. V., Melnikov L. S.** Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings // Discrete Math. — 1976. — Vol. 14, N 4. — P. 403–406.
20. **Mihok J.** Graphs, hypergraphs and matroids. — Zielon Gora: Higher College Engrg., 1985. — 86 p.
21. **Nash-Williams C. St. J. A.** Decomposition of finite graphs into forests // J. London Math. Soc. — 1964. — Vol. 39. — P. 12.
22. **Raspaud A., Wang W.** On the vertex-arboricity of planar graphs // Europ. J. Combin. — 2008. — Vol. 29, N 4. — P. 1064–1075.

23. **Stein S. K.** B-sets and coloring problems // Bull. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 76, N 4. — P. 805–806.
24. **Stein S. K.** B-sets and planar maps // Pacific J. Math. — 1971. — Vol. 37, N 1. — P. 217–224.
25. **Wang W., Lih K.-W.** Choosability and edge choosability of planar graphs without 5-cycles // Appl. Math. Lett. — 2002. — Vol. 15, N 5. — P. 561–565.
26. **Wegner G.** Note on a paper of B. Grünbaum on acyclic colorings // Israel J. Math. — 1973. — Vol. 14, N 4. — P. 409–412.

Замбалаева Долгор Жамьяновна,
e-mail: dolgor@ngs.ru

Статья поступила
11 декабря 2008 г.
Переработанный вариант —
24 февраля 2009 г.