ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2009. Том 16, № 4. С. 21–30

УДК 519.718

РАСКРАСКА ВЕРШИН ГРАФА ПРИ МАЖОРИТАРНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ЦВЕТА

В. Г. Визинг

Аннотация. Рассматривается задача раскраски вершин графа при условии, что для каждой вершины указывается мажорирующий, т. е. максимальный допустимый цвет. Приводится критерий «хроматичности» такого предписания, обобщающий теорему Витавера. Оценивается наибольшее значение мажорирующего цвета, которое может потребоваться для хроматичности предписания. Приводятся аналоги теоремы Нордхауза и Гаддума, касающиеся зависимости между хроматическими характеристиками графа и его дополнения.

Ключевые слова: мажоритарное предписание, допустимая раскраска, хромат графа.

Введение

Задачу раскраски вершин графа можно представить как задачу теории расписаний. Будем считать, что цвета — это дискретные моменты времени, вершины графа — это операции (работы) единичной длительности, причём смежность вершин означает невозможность одновременного выполнения соответствующих операций. Тогда хроматическое число графа — это наименьшее время, необходимое для выполнения всех операций.

Частое ограничение в задачах составления расписаний — существование директивных сроков окончания для операций. В случае раскраски вершин это ограничение состоит в том, что для каждой вершины указан максимальный допустимый цвет. Иначе говоря, каждой вершине предписан интервал допустимых цветов с левым концом 1. Задаче раскраски такого вида посвящена настоящая статья.

1. Основные понятия. Хроматичность мажоритарных ограничений

Под графом $G = (V, E)$, если не оговорено противное, понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных рёбер с множеством вершин V и множеством рёбер E. Через $d_G(v)$ обозначается

степень вершины v в графе G. Максимальная степень вершины графа G обозначается через $\Delta(G)$. Будем говорить, что G — граф степени Δ, если $\Delta(G) = \Delta$.

Будем считать, что цветами являются натуральные числа; таким образом, Z^+ — множество всех цветов. Под раскраской вершин будем всегда понимать правильную раскраску, т. е. такую, при которой смежные вершины окрашиваются различно.

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Функция $\gamma : V \to Z^+$ называется *мажоритарным предписанием* (для вершин графа G); при этом цвет $\gamma(v)$ называется *мажорирующим для вершины* $v \in V$, а любой цвет из интервала $[1, \gamma(v)]$ — *допустимым для этой вершины*. Правильную раскраску вершин графа G будем называть *допустимой*, если каждая вершина окрашивается в один из своих допустимых цветов. Мажоритарное предписание называется *хроматичным*, если при нём существует допустимая раскраска вершин.

Мажоритарное предписание является частным случаем такого предписания, при котором каждой вершине предписывается произвольное множество цветов. Этой более общей задаче раскраски в предписанные цвета посвящено значительное количество работ (см. [2, 4, 5]). *Списочным* (*предписанным*) *хроматическим числом* $\chi_L(G)$ графа G при этом называется наименьшее натуральное k такое, что любое произвольное для каждой вершины предписание мощности k является хроматичным.

Укажем критерий хроматичности мажоритарного предписания, обобщающий теорему Витавера [3].

Пусть имеется бесконтурный ориентированный граф. *Высотой вершины* будем называть число вершин, которое содержит путь наибольшей длины, оканчивающийся в этой вершине.

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф, γ — мажоритарное предписание. Для хроматичности предписания γ необходимо и достаточно существование такой бесконтурной ориентации всех рёбер графа G, при которой для любой вершины $v \in V$ выполняется неравенство $h(v) \leqslant \gamma(v)$, где $h(v)$ — высота вершины v.*

Доказательство. Необходимость. Пусть γ — хроматичное предписание. Построим допустимую раскраску вершин. После этого каждое ребро графа сориентируем так, чтобы получилась дуга, исходящая из вершины с меньшим цветом и заходящая в вершину с бóльшим цветом. Легко видеть, что получившаяся ориентация будет требуемой.

Достаточность. Предположим, что существует такая бесконтурная ориентация графа G, при которой неравенство $h(v) \leqslant \gamma(v)$ выпол-

няется для любой вершины $v \in V$. Окрасим вершину v в цвет $h(v)$. Так как смежные вершины имеют разную высоту, то полученная раскраска будет допустимой. Теорема 1 доказана.

Как известно [5], задача отыскания хроматического числа $\chi(G)$ графа G является NP-трудной даже в случае $\chi(G) = 3$. Поэтому если мажоритарное предписание таково, что $\gamma(v) = \chi(G)$ для всех $v \in V$, то задача определения хроматичности такого предписания является NP-трудной. В некоторых частных случаях она решается эффективно. Например, если G является простым циклом, деревом или полным графом, то даже при произвольном (не обязательно мажоритарном) предписании задача решается легко. Но если рассматривать полный k-дольный граф общего вида (полный граф — частный случай, когда каждая доля состоит из одной вершины), то здесь мажоритарность предписания существенна, и в случае мажоритарного предписания задача решается так. Пусть c_j — минимальный мажорирующий цвет вершин j-й доли ($1 \leqslant j \leqslant k$), причём $c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_k$. Для хроматичности мажоритарного предписания необходимо и достаточно, чтобы для любого $j = 1, 2, \ldots, k$ выполнялось неравенство $j \leqslant c_j$.

2. Хромат графа

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный граф, γ — мажоритарное хроматичное предписание. Если всякое хроматичное предписание γ', обладающее свойством $\gamma'(v) \leqslant \gamma(v)$ для всех $v \in V$, совпадает с γ, то γ называется *критическим предписанием*. Из определения вытекает, что если уменьшить на 1 любой мажорирующий цвет критического предписания, больший 1, то получившееся предписание уже не будет хроматичным.

Теорема 2. *Мажоритарное предписание γ для графа $G = (V, E)$ является критическим тогда и только тогда, когда раскраска всех вершин графа, при которой каждая вершина окрашивается в свой мажорирующий цвет, является единственной допустимой раскраской.*

Доказательство. Необходимость. Пусть γ — критическое предписание. Так как критическое предписание является допустимым, то существует допустимая раскраска всех вершин графа G. Построим такую раскраску, обозначим её f. Мажоритарное предписание γ', при котором мажорирующий цвет каждой вершины равен её цвету при раскраске f, является допустимым. Так как γ — критическое предписание, то предписания γ и γ' совпадают, т. е. при раскраске f каждая вершина окрашивается в свой мажорирущий цвет.

Достаточность. Пусть γ — такое мажоритарное предписание, что единственной допустимой раскраской всех вершин графа является такая раскраска, при которой каждая вершина окрашивается в свой мажорирующий цвет. Покажем, что γ — критическое предписание. Пусть γ' — хроматичное предписание, обладающее свойством $\gamma'(v) \leqslant \gamma(v)$ для всех $v \in V$. Это означает, что существует такая допустимая раскраска f всех вершин графа, при которой $f(v) \leqslant \gamma'(v) \leqslant \gamma(v)$ для всех $v \in V$. Но по свойству предписания γ имеет место равенство $f(v) = \gamma(v)$ для всех $v \in V$. Поэтому $\gamma'(v) = \gamma(v)$ для всех $v \in V$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф, γ — мажоритарное предписание. Для того чтобы предписание γ было критическим, необходимо и достаточно выполнение условий*:

а) *вершины с одинаковыми мажорирующими цветами попарно не смежны*;

б) *каждая вершина v с $\gamma(v) > 1$ смежна по крайней мере с одной вершиной, мажорирующий цвет которой равен c, для любого $c \in [1, \gamma(v) - 1]$.*

Наибольшее значение, которое может иметь мажорирующий цвет при критическом предписании для графа G, назовём *хроматом графа* и обозначим через $\Gamma(G)$.

Поясним понятие хромата. Предположим, что некто правильно раскрашивает все вершины графа следующим образом. В цвет 1 он окрашивает произвольно выбранное максимальное по включению подмножество попарно не смежных вершин V_1, затем из неокрашенных вершин произвольным образом выбирает максимальное по включению подмножество попарно не смежных вершин V_2; вершины подмножества V_2 он окрашивает в цвет 2 и т. д. Так продолжается до тех пор, пока не будут окрашены все вершины. Если считать, что мажорирующим цветом для каждой вершины является тот цвет, который она получила при указанной раскраске, то получится критическое предписание. Хромат графа представляет собой наибольшее число цветов, которое может потребоваться при таком способе раскраски всех вершин графа. Совершенно очевидна

Теорема 3. *Пусть $G = (V, E)$ — граф. Имеют место неравенства*

$$\chi(G) \leqslant \Gamma(G) \leqslant \Delta(G) + 1. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф, $|V| \geqslant 2$, G' — подграф, по-*

рождённый вершинами $V \setminus \{v'\}$, где $v' \in V$. Тогда

$$\Gamma(G) - 1 \leqslant \Gamma(G') \leqslant \Gamma(G). \qquad (2)$$

Доказательство. При $E = \varnothing$ утверждение очевидно; будем считать, что $E \neq \varnothing$. Правое неравенство в (2) вытекает из пояснения понятия хромата. Докажем левое неравенство. Пусть γ — критическое предписание для G, при котором наибольший мажорирующий цвет равен $\Gamma(G)$. Обозначим через S подмножество вершин, мажорирующие цвета которых равны $\gamma(v')$, через S' и S'' — подмножества вершин, мажорирующие цвета которых меньше $\gamma(v')$ и больше $\gamma(v')$ соответственно. Пусть G'' — подграф графа G, порождённый вершинами $V \setminus S$. Построим предписание γ'' для G'' следующим образом. Полагаем $\gamma'' = \gamma(v)$ при $v \in S'$ и $\gamma''(v) = \gamma(v) - 1$ при $v \in S''$. По следствию 1 предписание γ'' является критическим для графа G''. Так как наибольший мажорирующий цвет в предписании γ'' равен $\Gamma(G) - 1$, то $\Gamma(G'') \geqslant \Gamma(G) - 1$. Но G'' — подграф графа G', и из доказанной уже верхней оценки следует, что $\Gamma(G'') \leqslant \Gamma(G')$. Поэтому $\Gamma(G) - 1 \leqslant \Gamma(G')$. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть G — полный k-дольный граф. Тогда $\Gamma(G)=\chi(G)=k$.

При $k = 1$ это очевидно. Пусть $k \geqslant 2$ и γ — произвольное критическое предписание для G. Воспользуемся следствием 1. Вершины с одинаковыми мажорирующими цветами не могут принадлежать различным долям в силу условия а); в силу же условия б) вершины, принадлежащие одной доле, имеют один и тот же мажорирующий цвет и образуют интервал $[1, k]$.

Пример 2. Пусть G — простая цепь, длина которой не меньше 3. Тогда $\Gamma(G) = 3$.

Действительно, так как $\Delta(G) = 2$, то по теореме 3 имеем $\Gamma(G) \leqslant 3$. Рассмотрим подграф H графа G, представляющий собой простую цепь u, w, x, y длины 3. Пусть γ — такое мажоритарное предписание для H, что $\gamma(u) = \gamma(y) = 1$, $\gamma(w) = 2$, $\gamma(x) = 3$. Это критическое предписание, поэтому $\Gamma(H) = 3$. Так как H — подграф графа G, то $\Gamma(H) \leqslant \Gamma(G)$. Следовательно, $\Gamma(G) = 3$.

Пример 3. Пусть G — простой 4-вершинный цикл. Тогда $\Gamma(G) = 2$.

Это следует из того, что G — полный двудольный граф.

Замечание 1. Примеры 2 и 3 иллюстрируют такое обстоятельство: добавление к графу или удаление из графа ребра может либо не изме-

нить хромат графа, либо привести к его увеличению, либо — к уменьшению.

Пример 4. Если G — простой цикл, число вершин которого не равно 4, то $\Gamma(G) = 3$.

Действительно, так как $\Delta(G) = 2$, то $\Gamma(G) \leqslant 3$ по теореме 2. Так как хромат графа не меньше его хроматического числа, то $\Gamma(G) = 3$ в случае, когда G имеет нечётное число вершин. Если же у G чётное число вершин, не меньшее 6, то G содержит простую цепь длины 3 в качестве подграфа, и, как следует из примера 2, его хромат равен 3.

Пример 5. Для любого натурального k существует дерево T_k, хромат которого равен k.

Приведём индуктивное описание процесса построения требуемого дерева T_k. Дерево T_1 представляет собой одновершинный граф с мажорирующим цветом вершины, равным 1. Имеем $\Gamma(T_1) = 1$. Дерево T_2 — это полный 2-вершинный граф, мажорирующие цвета вершин которого равны 1 и 2. Очевидно, что $\Gamma(T_2) = 2$. Пусть уже построено дерево T_{k-1} с мажоритарным предписанием T_{k-1} ($k \geqslant 3$). Дерево T_k строится так. К каждой вершине дерева T_{k-1} «подвешивается» висячая вершина с мажорирующим цветом 1. Для остальных вершин дерева T_k полагаем $\gamma_k(v) = \gamma_{k-1}(v) + 1$. Мажоритарное предписание γ_k для дерева T_k будет критическим по следствию 1. Так как при этом максимальный мажорирующий цвет равен k, то $\Gamma(T_k) \geqslant k$. Но $\Delta(T_k) = k - 1$. Поэтому в силу теоремы 2 имеем $\Gamma(T_k) = k$.

Замечание 2. Так как $\chi(T_k) = \chi_L(T_k) = 2$, то пример 5 показывает, что хромат графа в общем случае нельзя оценить сверху только через его списочное хроматическое число. Вместе с тем, если граф представляет собой полный двудольный граф, то, как установлено в примере 1, его хромат равен 2, в то время как списочное хроматическое число может быть сколь угодно большим [2, 4]. Кроме того, пример 5 показывает, что верхняя оценка хромата через максимальную степень вершины графа, приведённая в теореме 3, достижима в классе деревьев.

Будем обозначать через $\varphi(G)$ плотность графа G, т. е. наибольшее число вершин в полном подграфе.

Теорема 4. *Пусть G — n-вершинный граф. Тогда*

$$\Gamma(G) \leqslant \frac{(n + \varphi(G))}{2}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть γ — критическое предписание для G, при котором наибольший мажорирующий цвет равен $\Gamma(G)$. Обозначим $V_j = \{v \in V \setminus \gamma(v) = j\}$, $j = 1, \ldots, \Gamma(G)$. Так как по следствию 1 множество мажорирующих цветов является интервалом с левым концом 1, то все множества V_j непусты. Покажем, что число одновершинных множеств среди V_j, $j = 1, \ldots, \Gamma(G)$, не больше $\varphi(G)$. Предположим противное: пусть число таких одновершинных множеств не меньше $\varphi(G) + 1$. Это означает, что есть два различных одновершинных множества V_i и V_k таких, что вершины, из которых они состоят, не смежны. Это противоречит условию б) следствия 1. Таким образом, среди множеств V_j не больше $\varphi(G)$ одновершинных. Значит, $n \geqslant \varphi(G) + 2(\Gamma(G) - \varphi(G))$, откуда и следует (3). Теорема 4 доказана.

Теперь обратимся к нижней оценке хромата (1). Вопрос о том, когда она достигается, остаётся открытым. Исчерпывающее решение в случае двудольных графов даёт

Теорема 5. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без изолированных вершин. Для выполнения равенства $\Gamma(G) = 2$ необходимо и достаточно, чтобы каждая компонента связности графа G была полным двудольным графом.*

Доказательство. Если каждая компонента связности графа G является полным двудольным графом, то, как следует из примера 1, выполняются равенства $\Gamma(G) = \chi(G) = 2$. Докажем обратное утверждение. Пусть $\Gamma(G) = 2$. Это означает, что $\chi(G) = 2$, т. е. G является двудольным графом. Если бы в какой-либо компоненте связности графа G нашлась пара несмежных вершин, принадлежащих различным долям, то это означало бы, что граф G содержит простую цепь длины не меньше 3 в качестве порождённого подграфа. В соответствии с примером 2 $\Gamma(G) \geqslant 3$. Теорема 5 доказана.

Следствие 2. *Пусть $G = (V, E)$ — связный граф, $|V| \geqslant 3$. Неравенство $\Gamma(G) \geqslant 3$ выполняется тогда и только тогда, когда G не является полным двудольным графом.*

3. Зависимость между хроматическими характеристиками графа и его дополнения

Теорема Нордхауза и Гаддума [6] утверждает, что если G — n-вершинный граф, а $\overline{G}$ — его дополнение, то

$$2\sqrt{n} \leqslant \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n, \tag{4}$$

$$n \leqslant \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4}. \tag{5}$$

Доказано [4], что эти же неравенства имеют место, если хроматическое число заменить на списочное хроматическое число. Заметим, что так как хроматическое число любого графа не превосходит ни его списочного хроматического числа, ни его хромата, то левые неравенства в (4) и (5) справедливы, если одну или обе величины $\chi(G)$ и $\chi(\overline{G})$ заменить на списочное хроматическое число или хромат соответствующего графа.

Сейчас нам потребуется понятие k-вырожденного графа. Граф называется k-*вырожденным*, если любой его подграф содержит вершину, степень которой не больше k. Наименьшее k, при котором граф G является k-вырожденным, будем обозначать через $\sigma(G)$.

Понятие k-вырожденного графа было введено, по-видимому, впервые в [1] в связи с задачей раскраски рёбер, но широко известным оно стало после статьи [7].

Имеют место очевидные неравенства

$$\chi(G) \leqslant \chi_L(G) \leqslant \sigma(G) + 1. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть $G = (V, E)$ — n-вершинный граф, Тогда*

$$\Gamma(G) + \sigma(\overline{G}) \leqslant n. \tag{7}$$

Доказательство. Будем доказывать лемму индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 2$ и $\Gamma(G) = s$. Рассмотрим критическое мажоритарное предписание, при котором наибольший мажорирующий цвет равен s. Пусть v' — вершина графа G, мажорирующий цвет которой равен s. Тогда по следствию 1 имеем $d_G(v') \geqslant s - 1$. Следовательно, в графе $\overline{G}$ степень вершины v' не больше $n - s$. Если $\sigma(\overline{G}) \leqslant n - s$, то неравенство (6) доказано. Пусть теперь $\sigma(\overline{G}) > n - s$. Это означает, что в графе $\overline{G}$ существует подграф, минимальная степень вершины которого больше $n-s$. Этот подграф, естественно, не содержит вершину v'. Обозначим через G' и $\overline{G'}$ подграфы графов G и $\overline{G}$ соответственно, порождённые вершинами $V \setminus \{v'\}$. Из сказанного вытекает, что $\sigma(\overline{G'}) = \sigma(\overline{G})$. По предположению индукции $\Gamma(G') + \sigma(\overline{G'}) \leqslant n - 1$. Учитывая равенство $\sigma(\overline{G'}) = \sigma(\overline{G})$ и то, что по лемме 1 $\Gamma(G') \geqslant \Gamma(G) - 1$, получаем $\Gamma(G) - 1 + \sigma(\overline{G}) \leqslant n - 1$, откуда и следует (7). Лемма 2 доказана.

Учитывая (6), (7), а также тот факт, что среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не больше их среднего арифметического, получим

Следствие 3. *Пусть G — n-вершинный граф. Тогда*

$$\Gamma(G) + \chi_L(\overline{G}) \leqslant n + 1; \quad \Gamma(G) \cdot \chi_L(\overline{G}) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Следствие 4. *Пусть G — n-вершинный граф. Тогда*

$$\Gamma(G) + \Gamma(\overline{G}) \leqslant n + \frac{(\varphi(G) + \varphi(\overline{G}))}{2}, \tag{8}$$

$$\Gamma(G) + \Gamma(\overline{G}) \leqslant 2n + 2 - (\varphi(G) + \varphi(\overline{G})). \tag{9}$$

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что $\Gamma(\overline{G}) \leqslant \frac{n+\varphi(\overline{G}))}{2}$. Складывая это неравенство с неравенством (3), получим (8). Далее, так как для любого графа H имеет место неравенство $\varphi(H) \leqslant \chi_L(H)$, то по следствию 3 имеем $\Gamma(G) + \varphi(\overline{G}) \leqslant n+1$ и $\Gamma(\overline{G}) + \varphi(G) \leqslant n+1$, откуда и следует (9). Следствие 4 доказано.

Теорема 6. *Пусть G — n-вершинный граф. Тогда*

$$\Gamma(G) + \Gamma(\overline{G}) \leqslant n + \lceil n/3 \rceil, \tag{10}$$

$$\Gamma(G) \cdot \Gamma(\overline{G}) \leqslant \left(\frac{(n + \lceil n/3 \rceil)}{2} \right)^2. \tag{11}$$

Доказательство. Формула (11) следует из (10), поскольку среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического. Докажем неравенство (10). Если

$$\frac{(\varphi(G) + \varphi(\overline{G}))}{2} < \lceil n/3 \rceil + 1,$$

то из (8) следует, что

$$\Gamma(G) + \Gamma(\overline{G}) < n + \lceil n/3 \rceil + 1,$$

а так как $\Gamma(G) + \Gamma(\overline{G})$ — целое число, то отсюда вытекает неравенство (10). Если же

$$\frac{(\varphi(G) + \varphi(\overline{G}))}{2} \geqslant \lceil n/3 \rceil + 1,$$

т. е. $\varphi(G) + \varphi(\overline{G}) \geqslant 2 \cdot \lceil n/3 \rceil + 2$, то из неравенства (9) имеем

$$\Gamma(G) + \Gamma(\overline{G}) \leqslant 2n + 2 - (2 \cdot \lceil n/3 \rceil + 2) \leqslant n + \lceil n/3 \rceil.$$

Теорема 6 доказана.

Автор не смог выяснить, можно ли улучшить оценки (10), (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Критические графы с данным хроматическим классом // Дискрет. анализ. Сб. науч. тр. Вып. 5. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1965. — С. 9–17.
2. **Визинг В. Г.** Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискрет. анализа в теории кодов и схем. Сб. науч. тр. Вып. 29. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. — С. 3–10.
3. **Витавер Л. М.** Нахождение минимальных раскрасок вершин графа с помощью булевых степеней матрицы смежности // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 147, № 4. — С. 758–759.
4. **Erdös P., Rubin A. L., Taylor H.** Choosability in graphs // Congr. Num. — 1980. — Vol. 26. — P. 125–157.
5. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. — New York: John Wiley & Sons, 1995. — 296 p.
6. **Nordhaus E. A., Gaddum J. W.** On complementary graphs // Amer. Math. Monthly. — 1966. — Vol. 63. — P. 175–177.
7. **Szekeres G., Wilf H. S.** An inequality for the chromatic number of a graph // J. Combin. Theory. — 1968. — Vol. 4. — P. 1–3.

Визинг Вадим Георгиевич,
e-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
20 ноября 2008 г.
Переработанный вариант —
18 мая 2009 г.