

УДК 519.176

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ ГРАФЫ ПЕТЕРСЕНА ^{*)}

Э. А. Монахова

Аннотация. В качестве модели сетей связи вычислительных систем рассмотрены обобщённые графы Петерсена. Решается задача оптимизации, состоящая в минимизации диаметра (максимальной структурной задержки в сети) при заданном числе вершин графа. Найдено отображение множества оптимальных двумерных циркулянтных сетей в класс обобщённых графов Петерсена, сохраняющее оптимальность графа. Получены параметры описаний оптимальных обобщённых графов Петерсена для любого порядка графа. Дается аналитическое решение задачи поиска кратчайших путей для полученных оптимальных графов.

Ключевые слова: обобщённые графы Петерсена, двумерные циркулянтные графы, диаметр, оптимальные графы, кратчайшие пути.

Введение

Обобщённые графы Петерсена (generalized Petersen graphs) [10, 17, 22] широко изучаются в теории графов и дискретной математике, находя приложение как графы химических реакций [8], а также при проектировании и анализе вычислительных систем (ВС) в качестве базовой основы структуры сетей связи для мультипроцессорных и мультикластерных систем и компьютерных сетей [10, 15, 18]. При таком рассмотрении вершинам графа соответствуют процессорные элементы, а рёбрам — линии связи. Рассматриваемые в данной работе регулярные графы степени три позволяют увеличить надёжность сети по сравнению с используемыми в современных инфраструктурах кольцевыми сетями и деревьями, в то же время сохраняя низкую стоимость сети. Дадим необходимые определения.

Обобщённым графом Петерсена $P(n, a, b)$ называется [10, 22] граф с множеством $N = 2n$ вершин $V = V_0 \cup V_1$, где $V_0 = \{2i \mid i = \overline{0, n-1}\}$, $V_1 = \{2i+1 \mid i = \overline{0, n-1}\}$, и множеством рёбер

$$E = \{(2i, 2i+1), (2i, 2i \pm 2a), (2i+1, 2i+1 \pm 2b) \mid i = \overline{0, n-1}\},$$

^{*)}Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00857).

здесь $2 \leq 2a \leq 2b < N$ — образующие и номера вершин в E взяты по mod N . Обобщённые графы Петерсена представляют собой графы, состоящие из внешнего (вершины V_0) и внутреннего (вершины V_1) колец с равным числом вершин n , связанных рёбрами. Рёбра, связывающие вершины $2i$ и $2i + 1$, $i = \overline{0, n-1}$, будем далее считать соответствующими образующей $c = 1$. Следует отметить, что в ряде работ ([17, 18, 21, 23] и др.) под обобщёнными графами Петерсена понимается их частный случай с $a = 1$. В [1, 2] эти графы называются двухкольцевыми трехвалентными сетями. В [19] рассматриваются графы $P(n, a, b)$ с $a \geq 1$, но с ограничением $\text{НОД}(n, a) = \text{НОД}(n, b) = 1$.

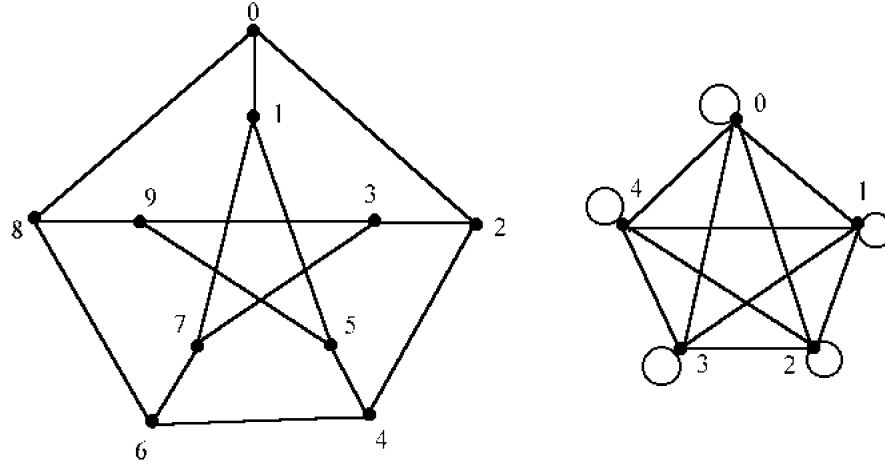


Рис. 1. Граф Петерсена $P(5, 1, 2)$ и циркулянт $C(5, 1, 2)$

Диаметром графа G называется число $d(G) = \max_{i, j \in V} d(i, j)$, где $d(i, j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j . Средним диаметром (средним расстоянием) графа называется сумма кратчайших расстояний между всеми парами вершин графа, делённая на число пар вершин, т. е. $\bar{d} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{ij} d(i, j)$. Далее графы с минимально возможным диаметром при заданных порядке и степени графа называем *оптимальными*. Диаметр и средний диаметр графа оценивают соответственно максимальную и среднюю структурные задержки в сетевых топологиях и влияют также на трафик в сети, пропускную способность, живучесть и отказоустойчивость сети, поэтому большое внимание при анализе структур ВС уделяется задаче минимизации этих показателей.

На рис. 1 (слева) показан известный граф Петерсена с 10 вершинами и диаметром $d = 2$. Граф Петерсена есть граф $P(5, 1, 2)$.

При заданном числе вершин в сети существуют различные обобщённые графы Петерсена, отличающиеся по диаметру и среднему диаметру. В [17, 21, 23] исследовался изоморфизм обобщённых графов Петерсена, оценивалось число неизоморфных описаний для заданного числа вершин. В [18, 19] методом полного перебора при поиске наилучших графов и сравнением оптимальных графов показано, что класс обобщённых графов Петерсена существенно лучше класса хордальных колец степени три [10, 22] по ряду показателей, включая диаметр и средний диаметр. В [21] для ограниченного класса обобщённых графов Петерсена даны алгоритм вычисления кратчайших путей и полученный на его основе алгоритм парной маршрутизации. В [1, 2, 11, 22] изучались экстремальные обобщённые графы Петерсена — графы с максимальным порядком при заданном диаметре. В работах [1, 22] найдены описания семейства экстремальных графов с порядком $N_d = (2d - 3)^2 + 1$, минимальным диаметром $d \geq 4$ и образующими $2a = 2(d - 2)$, $2b = 2(d - 1)$ [22] и $2a = 2$, $2b = 2(2d - 3)$ [1]. В [11] эти же экстремальные графы получены как специальное произведение K_2 на C_{2d^2+2d+1} , $d \geq 1$. В [16] с помощью эволюционного синтеза для обобщённых графов Петерсена экспериментально получены описания семейств оптимальных графов с минимальным диаметром $d \geq 4$ для каждого испытываемого чётного порядка $N \geq 16$ на нескольких непрерывных диапазонах изменения порядка. Новые описания и примеры из [16] представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Обобщённые графы Петерсена с минимальным диаметром

$N \geq 16$	Диаметр	c	$2a$	$2b$
$(2d - 5)^2 + 3 \leq N \leq (2d - 3)^2 + 1$	d	1	$2d - 4$	$2d - 2$
$(2d - 3)^2 + 3 \leq N \leq (2d - 2)^2 + 2$	$d + 1$	1	$2d - 4$	$2d - 2$
$16 \div 26$	4	1	4	6
$28 \div 38$	5	1	4	6
$28 \div 50$	5	1	6	8
$52 \div 66$	6	1	6	8
$52 \div 82$	6	1	8	10
$84 \div 102$	7	1	8	10

В этой статье теоретически обосновываются и обобщаются для любых порядков графов полученные с помощью эволюционного синтеза экспериментальные результаты, даются аналитический метод синтеза опти-

мальных графов $P(n, a, b)$ для любого n и аналитическое решение задачи поиска кратчайших путей в полученных оптимальных графах.

Для этого требуется установить связь между рассматриваемым классом графов и циркулянтными графами степени четыре [5, 10, 15]. Пусть n — число вершин графа, а $S = \{1 \leq a < b < n\}$ — целые числа (образующие). Неориентированный граф $C(n, a, b)$ с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и множеством рёбер $E = \{(i, i \pm a \pmod{n}), (i, i \pm b \pmod{n}) \mid i \in V\}$ называется *циркулянтным графом* размерности два. Графы $C(n, a, b)$ являются подклассом $R_s(N, v, g)$ -графов [4, 5] с числом классов эквивалентности вершин $s = 1$, степенью вершин $v = 4$, обхватом $g = 4$ и числом вершин $N = n$. Графы $P(n, a, b)$ — также подкласс $R_s(N, v, g)$ -графов с $s = 2$, $v = 3$, $g \leq 8$ и $N = 2n$.

1. Соответствие между графами $P(n, a, b)$ и $C(n, a, b)$

Введём отображение класса обобщённых графов Петерсена в класс двумерных циркулянтных графов и рассмотрим вопрос о связности графов $P(n, a, b)$. Пусть задан граф $P(n, a, b)$, $1 \leq a < b < n$. Обозначим через $H(P)$ граф с множеством вершин $V(H) = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и множеством рёбер $E(H)$, получающийся из графа $P(n, a, b)$ при гомоморфизме $\varphi: i \rightarrow j$, где $i \in V$, $j = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \in V(H)$, и $E \rightarrow E(H)$ выполняется следующим образом: $(2i, 2i+1) \rightarrow (j, j)$, $(2i, 2i \pm 2a) \rightarrow (j, j \pm a)$, $(2i+1, 2i+1 \pm 2b) \rightarrow (j, j \pm b)$ для любого $i = \overline{0, n-1}$. Неформально граф $H(P)$ получается из графа $P(n, a, b)$ путем слияния в одну вершину двух вершин с номерами $2i$, $2i+1$, связанных образующей $s = 1$, для каждого $i = \overline{0, n-1}$ с сохранением при этом инцидентных им рёбер. В результате $H(P)$ представляет собой двумерный циркулянтный граф $C(n, a, b)$ с петлёй в каждой вершине. На рис. 1 справа показан двумерный циркулянт $C(5, 1, 2)$ с петлями, являющийся гомоморфным образом графа Петерсена при введённом отображении φ .

Из рассмотрения условий связности, полученных для $R_s(N, v, g)$ -графов [4, 5], вытекает как следствие

Теорема 1. *Обобщённый граф Петерсена $P(n, a, b)$ связан, если и только если связан граф $H(P)$, т. е. $\text{НОД}(n, a, b) = 1$.*

В дальнейшем рассматриваются только связанные графы $P(n, a, b)$. Введём обратное отображение. Пусть циркулянтный граф $C(n, a, b)$, $1 \leq a < b < n$, имеет петлю в каждой вершине. Обозначим через $H(C)$ граф с множеством вершин $V(H) = \{0, 1, \dots, 2n-1\}$ и множеством рёбер $E(H)$, получающийся из графа $C(n, a, b)$ при гомоморфизме $\psi: i \rightarrow j$, где $i \in V$, $j \in V(H)$ и $j = \{2i, 2i+1\}$, и $E \rightarrow E(H)$ выпол-

няется следующим образом: $(i, i) \rightarrow (2i, 2i + 1)$, $(i, i \pm a) \rightarrow (2i, 2i \pm 2a)$, $(i, i \pm b) \rightarrow (2i + 1, 2i + 1 \pm 2b)$ для любого $i = \overline{0, n - 1}$. В результате $H(C)$ представляет собой граф $P(n, a, b)$. Отметим, что возможно отображение класса двумерных циркулянтов в класс хордальных колец степени три, которое в данной работе не рассматривается.

Приведём известные результаты для двумерных циркулянтов, которые будут использоваться далее при построении оптимальных обобщённых графов Петерсена. Получены [3, 24] максимальное число вершин двумерного циркулянтного графа заданного диаметра $d \geq 0$: $n_d = 2d^2 + 2d + 1$, а также точная нижняя граница диаметра для двумерных циркулянтов любого порядка $n > 4$ [6, 13]: $D = \lceil (-1 + \sqrt{2n - 1})/2 \rceil$.

Теорема 2 [6, 12]. Для любого $n > 4$, удовлетворяющего условию $2D^2 - 1 \leq n \leq 2(D + 1)^2 + 1$, где $D \geq 1$, циркулянтный граф $C(n, D, D + 1)$ достигает точных нижних границ диаметра и среднего диаметра.

Теорема 3 [13]. Для любого $n > 6$, $n_{D-1} < n \leq n_D$, где $D > 1$, циркулянтный граф $C(n, D, D + 1)$ достигает точной нижней границы диаметра D .

Аналитические выражения образующих оптимальных графов из теоремы 2 как функций переменной n представлены в [6, 9]. Расширенный диапазон оптимальности образующих, объединяющий результаты теорем 2 и 3, определяет

Теорема 4 [5]. Для любого $n > 6$, $n_{D-1} < n \leq 2(D + 1)^2 + 1$, где $D > 1$, циркулянтный граф $C(n, D, D + 1)$ достигает точной нижней границы диаметра, при этом $d(C(n, D, D + 1)) = D$ для $n_{D-1} < n \leq n_D$, $d(C(n, D, D + 1)) = D + 1$ для $n_D < n \leq 2(D + 1)^2 + 1$.

Пусть $A^{0k} = (x^{0k}, y^{0k})$ обозначает вектор кратчайшего пути из вершины 0 в вершину k , $0 \leq k < n$, в циркулянтном графе $C(n, a, b)$. Здесь $|x^{0k}|$ задаёт число образующих a , $|y^{0k}|$ — образующих b , входящих в кратчайший путь из 0 в k , а $\text{sgn}(x^{0k})$ и $\text{sgn}(y^{0k})$ определяют направления движения в кратчайшем пути по (+) или против (−) соответствующей образующей. Решение задачи поиска кратчайших путей для оптимальных циркулянтных графов из теоремы 2 получено в [7] и частично в [14]. Приведём формулы из [7], которые используются при определении векторов кратчайших путей в циркулянтных графах $C(n, D, D + 1)$, определяемых посредством теоремы 2.

Пусть $0 \leq k < n$ — номер вершины в графе $C(n, D, D + 1)$. Тогда координаты вектора A^{0k} вычисляются следующим образом:

при $k < k^*$

$$(x^{0k}, y^{0k}) = \begin{cases} (\alpha, \beta) & \text{при } \beta - D \leq \alpha \leq D, \\ (\alpha + D + 1, \beta - D) & \text{при } \alpha < \beta - D, \\ (\alpha - (D + 1), \beta + D) & \text{при } \alpha > D; \end{cases} \quad (1)$$

при $k \geq k^*$ $(x^{0k}, y^{0k}) = -(x^{0n-k}, y^{0n-k})$ и

$$k^* = \begin{cases} n - D^2 + 1 & \text{при } n_D - 2(D + 1) \leq n \leq n_D - (D + 1), \\ D^2 + D + 1 & \text{при } n_D - (D + 1) \leq n \leq n_D, \\ n - D^2 - D & \text{при } n_D \leq n \leq n_D + D + 1, \\ D^2 + 2(D + 1) & \text{при } n_D + D + 1 \leq n \leq n_D + 2(D + 1), \end{cases}$$

$\beta = k \bmod D$, $\alpha = \lfloor k/D \rfloor - \beta$ при $k < k^*$, $\beta = (n - k) \bmod D$, $\alpha = \lfloor (n - k)/D \rfloor - \beta$ при $k \geq k^*$.

Отметим, что реализация графов, описываемых теоремами 2–4, на современной элементной базе предложена в качестве основы топологии при проектировании сетей для будущих суперкомпьютеров с массовым параллелизмом [9, 20].

2. Построение оптимальных обобщённых графов Петерсена

Рассмотрим графы $P(n, a, b)$. В общем случае графы $P(n, a, b)$ не являются дистанционно-регулярными и дистанционно-транзитивными. Например, в графе $P(9, 1, 2)$ диаметра 4 на расстояниях 1, 2, 3 и 4 от вершины 0 находится соответственно 3, 6, 6 и 2 вершины, а от вершины 1 – 3, 6, 8 и 0 вершин. Однако в графе $P(n, a, b)$ существует автоморфизм, который действует транзитивно на циклах, порождаемых вершинами V_0 и V_1 . В силу этого диаметр обобщённых графов Петерсена равен

$$d = \max\{\max_{j \in V} d(0, j), \max_{j \in V} d(1, j)\}.$$

Обозначим через $i \longrightarrow j$ путь из вершины i в вершину j , $i \neq j$, в графе $P(n, a, b)$. Кратчайший путь из i в j эквивалентен (одинаков по количеству и знакам содержащихся в них образующих и порядку их прохождения) следующим путям:

$$i \longrightarrow j \equiv \begin{cases} 0 \longrightarrow j - i \pmod{N}, & \text{если } i \in V_0, \\ 1 \longrightarrow j - i + 1 \pmod{N}, & \text{если } i \in V_1. \end{cases} \quad (2)$$

Определим верхние оценки длины кратчайших путей в графах $P(n, a, b)$.

Лемма 1. Пусть диаметр циркулянтного графа $C(n, a, b)$ равен D , $D \geq 1$. Тогда в графе $P(n, a, b)$, полученном из графа $C(n, a, b)$ при гомоморфизме ψ , имеем $d(i, j) \leq D + 1$, если $i \in V_0$ и $j \in V_1$; $d(i, j) \leq D + 2$, если $i, j \in V_0$ или $i, j \in V_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть обобщённый граф Петерсена $P(n, a, b)$ получен из графа $C(n, a, b)$ при гомоморфизме ψ , и пусть $A^{0k} = (x^{0k}, y^{0k})$, $0 \leq k < n$, — векторы кратчайших путей из вершины 0 в вершины k в циркулянтном графе $C(n, a, b)$. В (3) представлены пути в графе $P(n, a, b)$, использующие векторы A^{0k} , $0 \leq k < n$. Слева указаны начальная и конечная вершины путей, справа в квадратных скобках — сами пути, сгруппированные по образующим графа $P(n, a, b)$, и порядок прохождения образующих выбран так, чтобы минимизировать число вхождений образующих c и $-c$:

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow 2k : & [x^{0k} * 2a + c + y^{0k} * 2b + (-c)], & (3a) \\ 0 \longrightarrow 2k + 1 : & [x^{0k} * 2a + c + y^{0k} * 2b], & (3b) \\ 1 \longrightarrow 2k : & [y^{0k} * 2b + (-c) + x^{0k} * 2a], & (3c) \\ 1 \longrightarrow 2k + 1 : & [y^{0k} * 2b + (-c) + x^{0k} * 2a + c]. & (3d) \end{cases} \quad (3)$$

Если при этом $y^{0k} = 0$ или $x^{0k} = 0$, то путь (3a) или (3d) соответственно не содержит также образующих c и $-c$. Чтобы добраться из вершины 0 в вершину $j \in V_1$ в графе $P(n, a, b)$, требуется самое большее один дополнительный шаг по образующей c по сравнению с соответствующим кратчайшим путём в графе $C(n, a, b)$. Таким образом, $\max_{j \in V_1} d(0, j) \leq D + 1$. Аналогично, $\max_{j \in V_0} d(1, j) \leq D + 1$. Любой кратчайший путь в графе $P(n, a, b)$ из вершины 0 в вершину $j \in V_0$ (или из вершины 1 в вершину $j \in V_1$) требует самое большее два дополнительных шага по образующей c (один — в прямом, другой — в обратном направлениях) по сравнению с соответствующим кратчайшим путём в графе $C(n, a, b)$. Лемма 1 доказана.

Перейдём к построению оптимальных обобщённых графов Петерсена, т. е. графов с минимальным диаметром при заданном числе вершин.

Теорема 5. Для любого $n > 7$, $((2d - 5)^2 + 1)/2 < n \leq 2(d - 1)^2 + 1$, где $d > 3$, граф $P(n, d - 2, d - 1)$ оптимален. При этом $d(P(n, d - 2, d - 1)) = d$ для $((2d - 5)^2 + 1)/2 < n \leq ((2d - 3)^2 + 1)/2$, $d(P(n, d - 2, d - 1)) = d + 1$ для $((2d - 3)^2 + 1)/2 < n \leq 2(d - 1)^2 + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому оптимальному графу $C(n, D, D + 1)$, $D > 1$, $n > 6$, из теоремы 4 сопоставим обобщённый граф Петерсена $P(n, D, D + 1)$, соответствующий ему при гомоморфизме ψ . Исследуем, как изменятся расстояния между вершинами в полученном графе по

сравнению с исходным графом и сохранится ли при этом свойство оптимальности графа. В силу леммы 1 любой кратчайший путь между двумя вершинами в графе $P(n, D, D + 1)$ требует самое большее два дополнительных шага по сравнению с соответствующим кратчайшим путём, вычисленным в графе $C(n, D, D + 1)$. Таким образом, для графа $P(n, D, D + 1)$ имеются следующие оценки на его диаметр: $d \leq D + 2$, когда $n_{D-1} < n \leq n_D$, и $d \leq D + 3$, когда $n_D < n \leq 2(D + 1)^2 + 1$. Покажем, что имеет место равенство при любом $n > 7$ (при $n = 7$ диаметр графа $P(7, 2, 3)$ равен $D + 1$). Для этого достаточно показать, что для каждого $n > 7$ в графе $C(n, D, D + 1)$ найдётся вершина с номером i , расположенная от 0 на расстоянии, равном диаметру, такая, что в графе $P(n, D, D + 1)$ будет $d(0, 2i) = D + 2$ при $n_{D-1} < n \leq n_D$ и $d(0, 2i) = D + 3$ при $n_D < n \leq 2(D + 1)^2 + 1$.

1. Пусть

$$n_{D-1} < n \leq n_D.$$

Тогда диаметр графа $C(n, D, D + 1)$ равен D . Искомая вершина i должна иметь $d(0, i) = D$ и удовлетворять условию $i \notin \Omega$, где

$$\Omega = \{D^2, (D + 1)D, n - D^2, n - (D + 1)D\},$$

иначе в графе $P(n, D, D + 1)$ имеем $d(0, 2i) \leq D + 1$. Возьмём вершину

$$i = \begin{cases} D/2 & \text{при } D \text{ чётном,} \\ (3D + 1)/2 & \text{при } D \text{ нечётном.} \end{cases} \quad (4)$$

Используя формулы (1) для расчёта кратчайших путей, получим $i = -\frac{D}{2}D + \frac{D}{2}(D + 1)$ при D чётном, $i = -\frac{D-1}{2}D + \frac{D+1}{2}(D + 1)$ при D нечётном и $d(0, i) = D$. Таким образом, для $n_{D-1} < n \leq n_D$, $D > 1$, $n > 7$, искомая вершина равна (4), и в графе $P(n, D, D + 1)$ для вершины $2i$ имеем $d(0, 2i) = D + 2$. При $D > 1$ и $n > 7$ исключение составляют только два графа, для которых $i \in \Omega$. Это — граф $C(14, 3, 4)$, для которого $i = n - D^2$, и граф $C(17, 3, 4)$, для которого $i = n - (D + 1)D$. Для них имеем также $d(P(14, 3, 4)) = d(P(17, 3, 4)) = 5 = D + 2$.

2. Пусть

$$n_D < n \leq 2(D + 1)^2 + 1.$$

Тогда диаметр графа $C(n, D, D + 1)$ равен $D + 1$. Искомая вершина i должна иметь $d(0, i) = D + 1$ и удовлетворять условию $i \notin \Theta$, где

$$\Theta = \{(D + 1)D, (D + 2)D, n - (D + 1)D, n - (D + 2)D\},$$

иначе в графе $P(n, D, D+1)$ будет $d(0, 2i) \leq D+2$. Возьмём вершину

$$i = D^2 + D + 1. \quad (5)$$

Используя формулы (1) для расчёта кратчайших путей, получим $d(0, i) = D+1$. Имеем $i = n - (D+2)D$ при $n = 2D^2 + 3D + 1$. Таким образом, для $n_D < n \leq 2(D+1)^2 + 1$, $n \neq 2D^2 + 3D + 1$, $D > 1$, искомая вершина равна (5). Для $n = 2D^2 + 3D + 1$, $D > 2$, в качестве искомой вершины возьмём $i = D^2 + D + 2$. Действительно, $i \notin \Theta$ и $d(0, i) = D+1$, так как $i = (D-1)D + 2(D+1)$. Таким образом, для указанных значений i в графе $P(n, D, D+1)$ имеем $d(0, 2i) = D+3$. Для $D = 2$ и $n = 15$ также $d(P(15, 2, 3)) = 5 = D+3$.

Из теоремы 4 и найденных диаметров графов $P(n, D, D+1)$ следует: для любого $n_{d-3} < n \leq 2(d-1)^2 + 1$, $d > 3$, $n > 7$, граф $P(n, d-2, d-1)$ оптимален, при этом $d(P(n, d-2, d-1)) = d$ для $n_{d-3} < n \leq n_{d-2}$, $d(P(n, d-2, d-1)) = d+1$ для $n_{d-2} < n \leq 2(d-1)^2 + 1$. Замена n_{d-2} и n_{d-3} их значениями завершает доказательство. Теорема 5 доказана.

Следствие 1. Точная нижняя граница диаметра для обобщённых графов Петерсена $P(n, a, b)$ любого порядка $N = 2n$, где $n > 7$, равна $\lceil (\sqrt{N-1} + 3)/2 \rceil$.

Для оптимальных сетей, полученных в теореме 5, найдём описание, при котором образующие выражены в виде функций от n .

Теорема 6. Для каждого $n > 9$ существует оптимальный граф $P(n, a, b)$, где $a = \lceil \sqrt{(n-1)/2} \rceil - 1$, $b = \lceil \sqrt{(n-1)/2} \rceil$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем оптимальное описание, найденное в теореме 5. Получение значения для образующей b очевидно. Получим значение для образующей a . Из теоремы 5 при $d > 3$ и $n > 9$ имеем $n_{d-3} < 2(d-2)^2 + 1 < n \leq 2(d-1)^2 + 1$. Отсюда $d-2 < \sqrt{(n-1)/2} \leq d-1$, т.е. $d = \lceil \sqrt{(n-1)/2} \rceil + 1$. Теорема 6 доказана.

Таким образом, аналитически получены для любого порядка графа оптимальные обобщённые графы Петерсена, которые, кроме того, обладают свойством сохранения параметров оптимального описания на больших диапазонах изменения N . Отметим, что в [18, 19] при поиске оптимальных графов в классе обобщённых графов Петерсена использован метод полного перебора, который в силу ограниченности области рассматриваемых обобщённых графов Петерсена не всегда даёт наилучшие решения. Например, в [18, 19] наилучшие возможные графы при $n = 24$ и $n = 40$ имеют диаметры 6 и 7 соответственно. Из теоремы 5 при этих

же значениях n получены оптимальные графы $P(24, 3, 4)$ диаметра 5 и $P(40, 4, 5)$ диаметра 6.

3. Решение задачи поиска кратчайших путей по описанию графа

В [21] предложены решение задачи поиска кратчайших путей и алгоритм парной маршрутизации для обобщённых графов Петерсена. Но при этом рассмотрен только подкласс обобщённых графов Петерсена с сильным ограничением $a = 1$ и $\text{НОД}(b, n) = 1$. Для найденных оптимальных графов решение, данное в [21], не подходит.

Решение задачи поиска кратчайших путей для полученных оптимальных обобщённых графов Петерсена упрощается, поскольку можно использовать с небольшой модификацией аналитический метод и формулы (1), предложенные для расчёта кратчайших путей по описанию графа в оптимальных двумерных циркулянтных сетях [7].

Итак, пусть дан оптимальный граф $P(n, D, D + 1)$, полученный из графа $C(n, D, D + 1)$ при гомоморфизме ψ , где

$$2D^2 - 1 \leq n \leq 2(D + 1)^2 + 1, \quad D > 1, \quad n > 7.$$

Чтобы определить кратчайший путь (или близкий к кратчайшему) из вершины i в вершину j , $i \neq j$, $i, j \in \{0, \dots, 2n - 1\}$, графа $P(n, D, D + 1)$, достаточно последовательно применить (2), (3) и (1), и получим

АЛГОРИТМ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

ШАГ 1. Используя свойство (2) графов $P(n, D, D + 1)$, определить для вершин i и j , какому из двух путей эквивалентен путь $i \rightarrow j$.

ШАГ 2. Учитывая принадлежность i и j множествам V_0 и V_1 , определить k — номер вершины в графе $C(n, D, D + 1)$:

$$k = \begin{cases} \lfloor \frac{j-i}{2} \rfloor \pmod{n}, & \text{если } i \in V_0, j \in V_1, \\ \lceil \frac{j-i}{2} \rceil \pmod{n}, & \text{если } i \in V_1, j \in V_0, \\ \frac{j-i}{2} \pmod{n} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ШАГ 3. По формулам (1) для найденного k определить $A^{0k} = (x^{0k}, y^{0k})$ — вектор кратчайшего пути из 0 в вершину k в графе $C(n, D, D + 1)$.

ШАГ 4. Подставить в правую часть соотношений (3) найденные значения x^{0k} и y^{0k} и получить искомый путь: при $i \in V_0$ и $j \in V_0$ — путь (3a), при $i \in V_0$ и $j \in V_1$ — путь (3b), при $i \in V_1$ и $j \in V_0$ — путь (3c), при $i \in V_1$ и $j \in V_1$ — путь (3d).

Определим, как часто найденный путь может отличаться от кратчайшего пути в графе $P(n, D, D+1)$. Для этого рассмотрим геометрическую модель соответствующего графа $C(n, D, D+1)$ (подробнее см. в [6, 5]). Граф $C(n, D, D+1)$ конструируется на плоскости \mathbf{Z}^2 в виде ромбоподобной конфигурации из единичных квадратов целочисленной решетки, где каждая точка решетки (x, y) помечена числом $k = xD + y(D+1) \pmod{n}$, $0 \leq k < n$ — номер вершины графа. Все отметки вершин $0 \leq k < n$ повторяются на плоскости бесконечное число раз, образуя плотную упаковку ромбоподобных конфигураций из единичных квадратов. На рис. 2 показано, как из ромба с числом вершин $n = n_D$ (обозначен сплошной линией) получают все оптимальные конфигурации с числом вершин $2D^2 - 1 \leq n \leq 2(D+1)^2 + 1$ путём наращивания (рис. 2а) и сокращения (рис. 2б) клеток (вершин) на последнем ярусе. Все вершины графа $C(n, D, D+1)$ диаметра d

$$d = \begin{cases} D & \text{при } 2D^2 - 1 \leq n \leq n_D, \\ D + 1 & \text{при } n_D < n \leq 2(D+1)^2 + 1 \end{cases}$$

расположены внутри ромба $R_d = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq d\}$, причём ярусы от 0 до $d-1$ полностью заполнены и среди номеров вершин, расположенных на этих ярусах, нет одинаковых. В силу указанных свойств для вершин $0 \leq k < n$ графа $C(n, D, D+1)$ диаметра d имеем следующее.

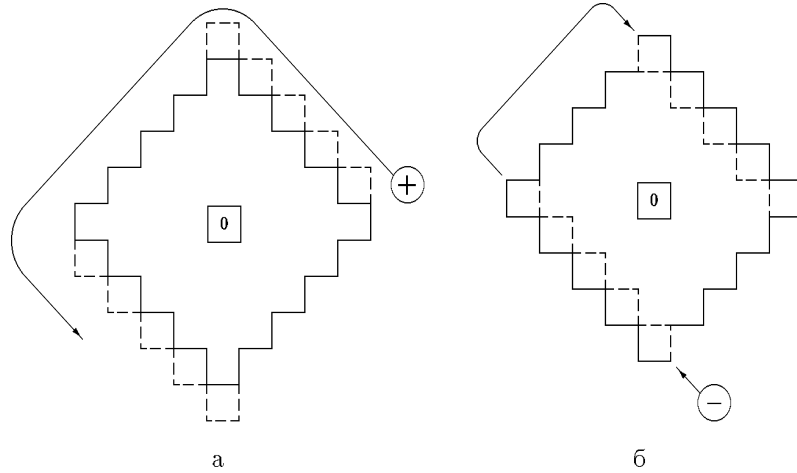


Рис. 2. Геометрическая модель графов $C(n, D, D+1)$

1. Если $d(0, k) \leq d-2$, то алгоритм находит кратчайший путь в графе $P(n, D, D+1)$.

2. Если $d(0, k) = d - 1$ и существует дополнительный путь из 0 в k длины d , состоящий из образующих одного вида, то в графе $P(n, D, D+1)$ может существовать путь на шаг короче, чем найденный по алгоритму.

3. Если $d(0, k) = d$ и существует дополнительный путь из 0 в k длины d (или $d + 1$), состоящий из образующих одного вида, то в графе $P(n, D, D + 1)$ может существовать путь на два шага (или один шаг) короче, чем найденный по алгоритму.

На рис. 2 видно, что в графе $C(n, D, D + 1)$ любого диаметра не более (а практически всегда меньше) восьми вершин

$$k \in \{dD, (d + 1)D, d(D + 1), (d + 1)(D + 1), n - dD, \\ n - (d + 1)D, n - d(D + 1), n - (d + 1)(D + 1)\}$$

могут дать более короткий путь в графе $P(n, D, D + 1)$. Таким образом, для предложенного алгоритма отношение путей, отличных от кратчайшего, к общему числу вычисляемых путей имеет порядок $O(1/n)$.

Найденное решение задачи поиска кратчайших путей в обобщённых графах Петерсена позволяет построить по аналогии с циркулянтными графами (см., например, [5]) динамический алгоритм парной маршрутизации для рассмотренных графов. Таким образом, полученные аналитически оптимальные обобщённые графы Петерсена, используемые в качестве сетей связи вычислительных систем, будут обеспечивать наилучшие показатели живучести, отказоустойчивости и пропускной способности сети при любом числе процессоров, что определяется достигнутым минимумом диаметра сети, а также простой и эффективный алгоритм парной маршрутизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артамонов Г. Т. Топология регулярных вычислительных сетей и сред. — М.: Радио и связь, 1985. — 192 с.
2. Артамонов Г. Т., Тюрин В. Д. Топология сетей ЭВМ и многопроцессорных систем. — М.: Радио и связь, 1991. — 248 с.
3. Корнеев В. В. О макроструктуре однородных вычислительных систем // Вычисл. системы. — 1974. — № 60. — С. 17–34.
4. Монахов О. Г. Параметрическое описание структур однородных вычислительных систем // Вычисл. системы. — 1979. — № 80. — С. 3–17.
5. Монахов О. Г., Монахова Э. А. Параллельные системы с распределенной памятью: структуры и организация взаимодействий. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. — 242 с.

6. Монахова Э.А. Об аналитическом описании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Вычисл. системы. — 1981. — № 90. — С. 81–91.
7. Монахова Э. А. Алгоритмы межмашинных взаимодействий и реконфигурации графов связей в вычислительных системах с программируемой структурой // Вычисл. системы. — 1982. — № 94. — С. 81–102.
8. Balaban A. T. Reaction graphs // Graph theoretical approaches to chemical reactivity. — Amsterdam: Kluwer Acad. Publ., 1994. — P. 137–180.
9. Beivide R., Martinez C., Izu C., Gutierrez J., Gregorio J. A., Miguel-Alonso J. Chordal topologies for interconnection networks // Lett. Notes Comp. Sci. — 2003. — Vol. 2858. — P. 385–392.
10. Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F. Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comp. — 1995. — Vol. 24. — P. 2–10.
11. Bermond J.-C., Delorme C., Farhi G. Large graphs with given degree and diameter. II // J. Combinat. Theory. Series B. — 1984. — Vol. 36. — P. 32–48.
12. Bermond J.-C., Iliades G., Peyrat C. An optimization problem in distributed loop computer networks // Proc. of the 3rd international conference on combinatorial mathematics. (New York, USA, June 1985). — New York: Acad. Sci., 1989. — Vol. 555. — P. 45–55.
13. Boesch F. T., Wang J.-F. Reliable circulant networks with minimum transmission delay // IEEE Trans. Circuits Syst. — 1985. — Vol. CAS-32. — P. 1286–1291.
14. Fabrega J., Zaragoza M. Fault-tolerant routings in double fixed-step networks // Discrete Appl. Math. — 1997. — Vol. 78. — P. 61–74.
15. Hwang F. K. A survey on multi-loop networks // Theoret. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 299. — P. 107–121.
16. Monakhov O. G., Monakhova E. A. Computer discovery of analytical descriptions of families of circulant networks // Proc. of the 6th Inter. Conf. on soft computing and measurements SCM'2003. — St.-Petersburg, Russia, 2003. — Vol. 1. — P. 345–348.
17. Nedela R., Skoviera M. Which generalized Petersen graphs are Cayley graphs? // J. Graph Theory. — 2006. — Vol. 19, N 1. — P. 1–11.
18. Pedersen J. M., Riaz T. M., Madsen O. B. Distances in generalized double rings and degree three chordal rings // Proc. of the IASTED Inter. Conf. on parallel, and distributed computing, and networks IASTED PDCN2005 (Austria, 2005). — Calgary, Canada: ACTA Press, 2005. — P. 153–158.
19. Pedersen J. M., Riaz T. M., Madsen O. B. Five novel selection policies for N2R network structures // Proc. of IEEE/ICACT'2006, the 8th inter. conf. on advanced communication technology (Korea, 2006). Vol. 3. — New York: IEEE Press, 2006. — P. 2174–2179.
20. Yang Y., Funashashi A., Jouraku A., Nishi H., Amano H., Sueyoshi T. Recursive diagonal torus: An interconnection network for

- massively parallel computers // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. — 2001. — Vol. 12, N 7. — P. 701-715.
21. **Yang N., Jan G. E., Leu S.-W., Lin I.-J.** A study of the generalized Petersen graph and a novel graph Y // Workshop on algorithms and computational molecular biology (ICS2002). — Taipei, Taiwan, 2002. — P. 1-18.
22. **Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., Alegre I.** The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations // Ars Combinatoria. — 1985. — Vol. 20B. — P. 159-172.
23. **Watkins M. E.** A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs // J. Combin. Theory. — 1969. — Vol. 6. — P. 152-164.
24. **Wong C. K., Coppersmith D.** A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. — 1974. — Vol. 21. — P. 392-402.

Монахова Эмилия Анатольевна,
e-mail: emilia@rav.sccc.ru

Статья поступила
26 января 2009 г.
Переработанный вариант —
30 апреля 2009 г.