ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2009. Том 16, № 4. С. 87–96

УДК 519.1

ГИПОТЕЗА РЕКОНСТРУИРУЕМОСТИ ДЛЯ ГРАФОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА 4-ВЕРШИННЫЕ ПРОСТЫЕ ЦЕПИ [*)]

П. В. Скумс, Р. И. Тышкевич

Аннотация. Исследуется широко известная гипотеза Келли — Улама о реконструируемости. Показано, что гипотеза верна для P_4-несвязных и P_4-хороших (P_4-tidy) графов. В частности, тем самым обобщаются известные результаты о реконструируемости несвязных графов, дополнений несвязных графов, 1-разложимых графов и P_4-сжимаемых графов.

Ключевые слова: P_4-несвязные графы, P_4-хорошие графы, P_4-сжимаемые графы, 1-разложимые графы.

Введение

Один из традиционных вопросов, рассматриваемых в различных разделах математики, — о зависимости между структурой объекта и его подструктурами. В основном интересуются тем, в какой мере структура объекта определяется структурами его частей. Особо важен вопрос о том, можно ли реконструировать объект по его частям.

Часто для знания всех подструктур объекта достаточно знать те из них, которые являются максимальными. Если исследуемая структура — это граф, то его максимальными подструктурами являются максимальные собственные порождённые подграфы. Вопрос о реконструируемости графа по его максимальным собственным порождённым подграфам составляет содержание известной гипотезы Келли — Улама (или гипотезы реконструируемости). Эта гипотеза, сформулированная в 1941 г., несмотря на простоту формулировки, до сих пор не доказана и не опровергнута и является одной из самых знаменитых открытых проблем в теории графов.

Пусть $G = (V(G), E(G))$ — простой граф. Через G_v обозначим подграф графа G, получающийся удалением вершины $v \in V(G)$. Семейство

[*)] Исследование выполнено в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические модели».

$D(G) = (G_v)_{v \in V(G)}$ называется *колодой* графа G, а элементы этого семейства — *картами* колоды.

Граф H с колодой $D(H) = (H_u)_{u \in V(H)}$ называется *реконструкцией* графа G, если существует биекция $f : V(G) \to V(H)$ такая, что $G_v \cong H_{f(v)}$. В этом случае колоды $D(G)$ и $D(H)$ называются *равными.* Граф G *реконструируем,* если он изоморфен каждой своей реконструкции.

Гипотеза 1 [13, 19] (гипотеза Келли — Улама о реконструируемости). *Каждый граф на более чем двух вершинах реконструируем.*

Гипотезе реконструируемости посвящена обширная литература. В частности, отметим монографии [5, 11, 14] и обзоры [6, 7].

В настоящей статье доказано, что P_4-несвязные графы реконструируемы. В частности, это обобщает все известные результаты о реконструируемости несвязных графов, их дополнений и 1-разложимых графов.

Кроме того, показано, что из реконструируемости P_4-несвязных графов вытекает реконструируемость P_4-хороших графов. В частности, это улучшает результат о реконструируемости P_4-сжимаемых графов, полученный Б. Тхатте в [16].

1. Основные обозначения и известные факты

Класс графов называется *реконструируемым*, если все графы из этого класса реконструируемы. Известно не так много содержательных реконструируемых классов. В частности, это несвязные и регулярные графы [6]. Аналогично, теоретико-графовый параметр называется *реконструируемым*, если если он одинаков для всех графов с равными колодами. Например, степенная последовательность графа реконструируема [6], из чего следует, что графы, определяемые с точностью до изоморфизма своей степенной последовательностью (*униграфы*), реконструируемы. Подробный обзор, посвящённый гипотезе реконструируемости, можно найти в [6].

Отметим, что граф реконструируем, если и только если его дополнение реконструируемо.

Класс графов $\mathcal{R}$ называется *распознаваемым,* если для любого графа $G \in \mathcal{R}$ все его реконструкции также лежат в $\mathcal{R}$. Класс $\mathcal{R}$ называется *слабо реконструируемым*, если для любого $G \in \mathcal{R}$ каждая реконструкция G, принадлежащая $\mathcal{R}$, изоморфна G. Очевидно, что *класс $\mathcal{R}$ реконструируем, если и только если он распознаваем и слабо реконструируем.*

Мы пишем $u \sim v$ ($u \not\sim v$), если вершины u и v смежны (несмежны). Для подмножеств $U, W \subseteq V(G)$ запись $U \sim W$ означает, что $u \sim w$ для всех вершин $u \in U$ и $w \in W$; $U \not\sim W$ означает, что не существует смежных вершин $u \in U$ и $w \in W$. Для простоты мы пишем $u \sim W$ ($u \not\sim W$) вместо $\{u\} \sim W$ ($\{u\} \not\sim W$).

Триадой называется тройка $T = (G, A, B)$, где G — граф, (A, B) — упорядоченное разбиение множества $V(G)$. *Изоморфизм триад* $T = (G, A, B)$ и $S = (H, C, D)$ — это изоморфизм графов G и H, отображающий A в C и B в D; в этом случае триады T и S *изоморфны* ($T \cong S$).

Пусть G — граф, $M \subseteq V(G)$. Если $v \sim M$ или $v \not\sim M$ для любой вершины $v \in V(G) \setminus M$, то M называется *модулем* G. Если M — модуль, то $V(G)$ естественным образом разбивается на 3 части:

$$V(G) = A \cup B \cup M, \quad A \sim M,\ B \not\sim M. \tag{1}$$

Разбиение (1) *ассоциировано* с модулем M. В этом случае мы пишем $G = T \circ F$, где $T = (G[A \cup B], A, B)$, $F \cong G[M]$.

Для каждого графа G множество $V(G)$, одноэлементные подмножества $V(G)$ и $\varnothing$ являются модулями. *Нетривиальным модулем*, или *однородным множеством*, называется модуль M такой, что

$$1 < |M| < |V(G)|.$$

Граф G называется 1-*разложимым* [18], если существует модуль M (называемый (1-*модулем*)) графа G с ассоциированным разбиением (A, B, M) такой, что A — клика, а B — независимое множество. В противном случае G называется 1-*неразложимым*. Свойства и приложения 1-разложимых графов описаны, в частности, в [8, 15, 17]. Для нас одним из наиболее интересных фактов, касающихся 1-разложимых графов, является следующая

Теорема 1 [1]. *1-Разложимые графы реконструируемы.*

Граф G называется P_4-*связным* (или *p-связным*), если для любого разбиения $V(G)$ на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 существует порождённая цепь P_4 (пересекающая P_4), которая содержит вершины как из V_1, так и из V_2. В противном случае G называется P_4-*несвязным* (или *p-несвязным*). P_4-несвязные графы были введены Джеймисон и Олариу в [12]. P_4-*связная компонента* G — это максимальный порождённый P_4-связный подграф G. Очевидно, что каждый несвязный граф и его дополнение являются P_4-несвязными, однако обратное неверно.

Граф называется *расщепляемым* [10], если существует разбиение множества его вершин $V(G) = A \cup B$ на клику и независимое множество. Такое разбиение называется *биразбиением*.

Пусть A — подмножество множества вершин графа G такое, что $G[A] \cong P_4$. *Партнёр* A в G — это вершина $v \in G \setminus A$ такая, что $G[A \cup v]$ содержит не менее двух порождённых цепей P_4. Граф G называется P_4-*хорошим* (P_4-*tidy*) [9], если любой его подграф P_4 имеет не более одного партнёра. Класс P_4-хороших графов содержит ранее исследованные в работах разных авторов классы P_4-расширяемых (P_4-extensible), P_4-легких (P_4-lite), P_4-сжимаемых (P_4-reducible), P_4-редких (P_4-sparse), P_4-свободных графов [9].

2. Реконструируемость P_4-несвязных и P_4-хороших графов

P_4-связный граф S называется *разделимым* [12], если существует такое разбиение множества его вершин $V(S) = A \cup B$, что для любой индуцированной цепи P_4 её центральные вершины лежат в A, а концевые — в B. В этом случае триада (S, A, B) называется *разделённой p-связной триадой*.

Лемма 1 [12]. *Любой разделимый P_4-связный граф порождает единственную разделённую P_4-связную триаду.*

Назовём триаду (G, A, B) *обобщённой расщеплённой триадой*, если все связные компоненты графов $\overline{G[A]}$ и $G[B]$ суть модули в G. В частности, если все связные компоненты $\overline{G[A]}$ и $G[B]$ одновершинные, то G — расщепляемый граф.

Лемма 2 [12]. *Пусть $T = (G, A, B)$ – разделённая P_4-связная триада. Тогда T является обобщённой расщеплённой триадой. Кроме того, графы $\overline{G[A]}$, $G[B]$ несвязны.*

Отметим, в частности, что разделённая P_4-связная триада содержит по крайней мере 4 вершины.

Расщепляемый граф G с биразбиением (A, B) называется *пауком*, если существует биекция $f : B \to A$ такая, что выполняется одно из следующих условий:

1) $N(b) = \{f(b)\}$ для любой вершины $b \in B$ (*тонкий паук*);

2) $N(b) = A \setminus \{f(b)\}$ для любой вершины $b \in B$ (*толстый паук*).

Теорема 2 [10]. *Пусть G — некоторый граф, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\deg(v_1) \geqslant \deg(v_2) \geqslant \dots \geqslant \deg(v_n)$ и $m = m(G) = \max\{i \mid \deg(v_i) \geqslant i-1\}$. Тогда G расщепляем, если и только если*

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(v_i) = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} \deg(v_i). \tag{2}$$

Кроме того, если выполняется (2), то $A = \{v_1, \dots, v_m\}$ — наибольшая клика и $B = \{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ – независимое множество.

Лемма 3. *Пауки реконструируемы.*

Доказательство. Поскольку толстые пауки являются дополнениями тонких, достаточно показать, что тонкие пауки реконструируемы.

Пусть G — граф с $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\deg(v_1) \geqslant \deg(v_2) \geqslant \dots \geqslant \deg(v_n)$. Учитывая теорему 2, легко видеть, что G является тонким пауком, если и только если выполняются (2) и следующие условия:

1) $\deg(v_i) = m(G)$ для любого $i = 1, \dots, m(G)$;

2) $\deg(v_i) = 1$ для любого $i = m(G)+1, \dots, n$.

Поскольку степенная последовательность графа реконструируема [6], тонкие пауки реконструируемы. Лемма 3 доказана.

Вершина v в P_4-связном графе G называется *P_4-точкой сочленения*, если подграф G_v P_4-несвязен. Если каждая вершина графа G является P_4-точкой сочленения, то G называется *минимально P_4-связным.*

Теорема 3 [2, 3]. *Граф G минимально P_4-связный, если и только если G — паук.*

Теорема 4 [2]. *P_4-связный граф, не являющийся минимально P_4-связным, содержит не менее двух вершин, не являющихся P_4-точками сочленения.*

Следующая структурная теорема доказана в [12]. В приведённых выше терминах она формулируется следующим образом.

Теорема 5 [12]. *Для произвольного графа G верно в точности одно из следующих утверждений*:

1) *G несвязен*;

2) *$\overline{G}$ несвязен* (т. е. *G антинесвязен*);

3) *существует единственная разделимая P_4-связная компонента S графа G с соответствующим разбиением $V(S) = A \cup B$ такая, что $G = (S, A, B) \circ H$*;

4) *G является P_4-связным.*

Лемма 4. *Пусть T — обобщённая расщеплённая триада и H — произвольный граф. Тогда $G = T \circ H$ P_4-несвязен.*

Доказательство. Пусть $V(G) = A \cup B \cup C$, причём

$$(G[A \cup B], A, B) \cong T, G[C] \cong H, \quad G = (G[A \cup B], A, B) \circ G[C].$$

Легко видеть, что для разбиения

$$(A \cup B, C) \tag{3}$$

не существует пересекающей P_4. Действительно, пусть вершины x, y, z, t порождают пересекающую P_4 для разбиения (3) с центральными вершинами y, z и концевыми вершинами x, t, причём $y \sim x$, $z \sim t$. Возможны следующие ситуации.

1) $x \in C$, $y \in A$, $z, t \in B$. Тогда вершины z и t лежат в одной связной компоненте U подграфа $G[B]$. Однако поскольку U — однородное множество и $y \sim z$, имеем $y \sim t$; противоречие.

2) $x, z \in A, y \in C$, $t \in B$. Тогда x и z лежат в одной связной компоненте подграфа $\overline{G[A]}$ и, как и выше, имеем $t \sim x, z$; противоречие. Лемма 4 доказана.

1-Разложимые графы P_4-несвязны по лемме 4, поэтому все 1-разложимые графы, являющиеся одновременно связными и антисвязными, удовлетворяют 3).

Пусть $\mathcal{R}$ — класс P_4-несвязных графов G таких, что

a) G удовлетворяет свойству 3);

b) G не является 1-разложимым.

Для того чтобы доказать, что P_4-несвязные графы реконструируемы, по теоремам 1 и 5 достаточно доказать, что класс $\mathcal{R}$ реконструируем.

Лемма 5. *Граф является P_4-несвязным, если и только если он не является пауком и имеет не более одной P_4-связной карты.*

Доказательство. Предположим, что G P_4-несвязен. По теореме 3 G не является пауком. Покажем, что у G имеется не более одной P_4-связной карты.

Если G ($\overline{G}$) несвязен, то G имеет не более одной связной (антисвязной) карты, и нужное нам утверждение верно. В противном случае по теореме 5 имеем $G = T \circ H$, где $T = (S, A, B)$ — разделимая P_4-связная триада. Если $|H| > 1$, то все карты из $D(G)$ имеют вид $T_v \circ H$ или $T \circ H_v$. Поэтому по лемме 4 все карты G P_4-несвязны. Если $|H| = 1$, то $D(G) = \{T_v \circ H : v \in S\} \cup \{S\}$. Тем самым по леммам 2 и 4 существует единственная P_4-связная карта графа G, изоморфная S.

Обратно, пусть G не является пауком и имеет не более одной P_4-связной карты. Предположим, что G P_4-связен. Тогда по теореме 4 существует две P_4-связные карты G. Лемма 5 доказана.

Следствие 1. *Класс P_4-несвязных графов распознаваем.*

Так как несвязные графы, дополнения несвязных графов и 1-разложимые графы реконструируемы, то верно

Следствие 2. *Класс $\mathcal{R}$ распознаваем.*

В дальнейшем нам понадобится следующая техническая

Лемма 6. *Пусть $G = (G[A \cup B], A, B) \circ G[C]$, где $(G[A \cup B], A, B)$ — обобщённая расщеплённапя триада, и пусть D — P_4-связная компонента G. Тогда $D \subseteq A \cup B$ или $D \subseteq C$.*

Доказательство. Предположим обратное, т. е. $D \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, $D \cap C \neq \varnothing$. Как показано в лемме 4, для разбиения $(A \cup B, C)$ в графе G не существует пересекающей P_4, поэтому для разбиения $(D \cap (A \cup B), D \cap C)$ не существует пересекающей P_4 в графе $G[D]$. Это противоречит тому, что D — P_4-связная компонента G. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Класс $\mathcal{R}$ слабо реконструируем.*

Доказательство. Пусть $G^1 = T^1 \circ H^1$, $G^2 = T^2 \circ H^2$ — два графа из $\mathcal{R}$ с равными колодами $D(G^1)$ и $D(G^2)$, $T^1 = (S^1, A^1, B^1)$, $T^2 = (S^2, A^2, B^2)$ — разделимые P_4-связные триады из определения класса $\mathcal{R}$. По теореме 5 $G^1 \cong G^2$, если и только если $T^1 \cong T^2$ и $H^1 \cong H^2$.

Пусть $|H^1| = 1$. Тогда $D(G^1) = \{T^1_v \circ H^1\} \cup \{S^1\}$. Очевидно, что все триады T^1_v, T^2_u являются обобщёнными расщеплёнными триадами. Поэтому по лемме 4 существует единственная P_4-связная карта графа G^1, причём эта карта изоморфна S^1.

Если $|H^2| > 1$, то $D(G^2) = \{T^2_v \circ H^2\} \cup \{T^2 \circ H^2_u\}$, и по лемме 4 все карты из G^2 P_4-несвязны.

Тем самым имеем $|H^2| = 1$, так что существует единственная P_4-связная карта графа G^2, которая при этом изоморфна S^2. Поэтому верно, что $S^1 \cong S^2$. По лемме 1 $T^1 \cong T^2$ и, следовательно, $G^1 \cong G^1$.

Пусть далее $|H^1| \geqslant 2$, $|H^2| \geqslant 2$. Положим $V(G^i) = A^i \cup B^i \cup C^i$, где $(G[A^i \cup B^i], A^i, B^i) \cong T^i$, $G^i[C^i] \cong H^i$ и $G^i \cong (G[A^i \cup B^i], A^i, B^i) \circ G^i[C^i]$, $i = 1, 2$.

Тогда $D(G^i) = D_{T^i} \cup D_{H^i}$, где $D_{T^i} = \{T^i \circ H^i_v \mid v \in C^i\}$, $D_{H^i} = \{T^i_v \circ H^i \mid v \in A^i \cup B^i\}, i = 1, 2$.

По лемме 4 все карты из $D(G^i)$, $i = 1, 2$, P_4-несвязны. Очевидно, что все карты из D_{T^i}, $i = 1, 2$, являются связными и антисвязными P_4-не-

связными графами (поскольку таковы графы G^i). Лемма 7 доказана.

Утверждение 1. *Пусть* $G^1_v = T^1 \circ H^1_v \in D_{T^1}$, $G^2_u = T^2_u \circ H^2 \in D_{H^2}$ *и* $G^1_v \cong G^2_u$. *Тогда* $|T^1| < |T^2|$.

Доказательство. Положим $C^1_v = C^1 \setminus \{v\}$, $A^2_u = A^2 \setminus \{u\}$.

Пусть $\varphi : V(G^1) \setminus \{v\} \to V(G^2) \setminus \{u\}$ — изоморфизм графов G^1_v и G^2_u. Если $\varphi(A^1 \cup B^1) \subseteq C^2$, то $\varphi(C^1_v) \supseteq A^2_u \cup B^2$. Но тогда, например, $B^2 \sim C^2 \cap \varphi(A^1)$, что невозможно.

Таким образом, по лемме 6 верно, что $\varphi(A^1 \cup B^1) \subseteq (A^2_u \cup B^2)$. Тогда $|T^1| \leqslant |T^2_u| < |T^2|$. Утверждение 1 доказано.

Покажем, что существуют вершины $v \in V(G^1)$ и $u \in V(G^2)$ такие, что

$$G^1_v \in D_{T^1},\ \ G^2_u \in D_{T^2},\ \ G^1_v \cong G^2_u. \tag{4}$$

Предположим противное. Тогда существуют $G^1_{v_1} \in D_{T^1}$, $G^1_{v_2} \in D_{H^1}$, $G^2_{u_1} \in D_{T^2}$, $G^2_{u_2} \in D_{H^2}$ такие, что

$$T^1 \circ H^1_{v_1} = G^1_{v_1} \cong G^2_{u_2} = T^2_{u_2} \circ H^2, \tag{5}$$

$$T^2 \circ H^2_{u_1} = G^2_{u_1} \cong G^1_{v_2} = T^1_{v_2} \circ H^1. \tag{6}$$

По утверждению 1

$$|T^1| < |T^2| \tag{7}$$

и $|T^2| < |T^1|$; противоречие.

Далее рассмотрим $v \in V(G^1)$, $u \in V(G^2)$ такие, что выполняется (4). Имеем $T^1 \circ H^1_v \cong T^2 \circ H^2_u$. По теореме 5 верно, что

$$T^1 \cong T^2. \tag{8}$$

В частности, если $G^1_v \in D_{H^1}$ и $G^1_v \cong G^2_u$, то $G^2_u \in D_{H^2}$. Действительно, если существуют карты из D_{T^1} и D_{H^2} такие, что выполняется (5), то верно неравенство (7). Последнее противоречит (8).

Остаётся показать, что $H^1 \cong H^2$.

Так как граф G^1 не является 1-разложимым, то S^1 — не паук, и по теореме 3 существует такая вершина $v \in A^1 \cup B^1$, что T^1_v — разделённая P_4-связная триада, а карта G^1_v — связный и антисвязный P_4-несвязный граф. Пусть $T^1_v \circ H^1 = G^1_v \cong G^2_u = T^2_u \circ H^2$, и пусть ψ — изоморфизм графов G^1_v и G^2_u. Рассуждая так же, как в доказательстве утверждения 1, имеем $\psi((A^1 \cup B^1) \setminus \{v\}) \subseteq (A^2 \cup B^2) \setminus \{u\}$. Так как $|T^1| = |T^2|$, то $\psi((A^1 \cup B^1) \setminus \{v\} = (A^2 \cup B^2) \setminus \{u\}$. Поэтому $\psi(C^1) = C^2$ и, следовательно, $H^1 \cong H^2$.

Таким образом, из следствия 2 и леммы 7 вытекает

Теорема 6. *P_4-несвязные графы реконструируемы.*

Квази-звезда (*квази-ёж*) [9] — это граф, полученный из толстого паука (тонкого паука) заменой не более чем одной вершины на K_2 или O_2.

Теорема 7 [9]. *Граф G является P_4-хорошим, если и только если каждая его P_4-связная компонента изоморфна либо P_5, либо $\overline{P_5}$, либо C_5, либо квази-звезде, либо квази-ежу.*

Следствие 3. *P_4-хорошие графы реконструируемы.*

Доказательство. Пусть G — P_4-хороший граф. Если G P_4-несвязен, то по теореме 6 G реконструируем. Пусть G P_4-связен. Очевидно, что графы P_5, $\overline{P_5}$, C_5 реконструируемы. Кроме того, квази-звёзды являются дополнениями квази-ежей, и по лемме 3 пауки реконструируемы. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда G получается из тонкого паука H с биразбиением (A, B) и с не менее чем 6 вершинами заменой вершины $v \in V(H)$ на K_2 или O_2. Рассмотрим следующие случаи.

1) Вершина $v \in A$ заменена на K_2. В [17] получено полное структурное описание 1-неразложимых расщепляемых униграфов. Из этого описания видно, что G — униграф, и поэтому G реконструируем.

2) Вершина $v \in B$ заменена на O_2. Согласно тому же описанию из [17] G — униграф, и поэтому G реконструируем.

3) Вершина $v \in B$ заменена на K_2. Легко видеть, что произвольный граф F изоморфен G, если и только если $|V(F)| = |V(G)|$, существует в точности две вершины $x, y \in V(F)$ такие, что $\deg(x) = \deg(y) = 2$ и $F_x \cong F_y$ — тонкий паук. Поэтому очевидно, что G реконструируем.

4) Вершина $v \in A$ заменена на O_2. Тогда аналогично граф F изоморфен G, если и только если $|V(F)| = |V(G)| = 2k+1$, $k \geqslant 3$, и существуют две вершины $x, y \in V(F)$ такие, что $\deg(x) = \deg(y) = k$ и карты F_x, F_y являются тонкими пауками. Следствие 3 доказано.

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тюрин В.** Реконструкция разложимых графов // Вести АН БССР. — 1987. — № 3. — С. 16–20.
2. **Babel L.** Tree-like P_4-connected graphs // Discrete Math. — 1998. — Vol. 191. — P. 13—23.
3. **Babel L., Olariu S.** On the isomorphism of graphs with few P_4s // Discrete Appl. Math. — 1998. — Vol. 84. — P. 1—3.
4. **Babel L., Olariu S.** On the *p*-connectedness of graphs — a survey // Discrete Appl. Math. — 1999. — Vol. 95. — P. 11—33.

5. **Biggs N.** Algebraic graph theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. — 316 p.
6. **Bondy A.** A graph reconstructor's manual // Surveys in Combinatorics // London Math. Soc. Lecture Notes Series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. — P. 221–252.
7. **Bondy A., Hemminger R. L.** Graph reconstruction — a survey // J. Graph Theory. — 1977. — № 1. — P. 227–268.
8. **Brandstädt A., Le V. B., Spinrad J.** Graph classes: a survey. — Philadelphia: SIAM monographs on discrete mathematics and applications, 1999. — 95 p.
9. **Giakoumakis V., Roussel F., Thuillier H.** On P_4–tidy graphs // Discrete Math. and Theor. Comp. Sci. — 1997. — N 1. — P. 17–41.
10. **Hammer P. L., Simeone B.** The splittence of a graph // Combinatorica. — 1981. — Vol. 3, N 1. — P. 275—284.
11. **Hell P., Nesetril J.** Graphs and homomorphisms. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. — 256 p.
12. **Jamison B., Olariu S.** p-Components and the homogeneous decomposition of graphs // SIAM J. Discrete Math. — 1995. — N 8. — P. 448–463.
13. **Kelly P. J.** On isometric transformations // PhD thesis, University of Wisconsin, 1942. — 95 p.
14. **Lauri J., Scapellato R.** Topics in graph isomorphisms and reconstruction. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. — 172 p.
15. **Mahadev N. V., Peled U. N.** Threshold graphs and related topics // Annals of Discrete Math. — 1995. — Vol. 56. — 558 p.
16. **Thatte B.** Some results on the reconstruction problem. p-Claw-free, chordal and P_4-reducible graphs // J. Graph Theory. — 1995. — Vol. 19, N 4. — P. 549–561.
17. **Tyshkevich R.** Decomposition of graphical sequences and unigraphs // Discrete Math. — 2000. — Vol. 220. — P. 201–238.
18. **Tyshkevich R., Chernyak A.** Decomposition of graphs // Cybernetics. — 1985. — Vol. 21. — P. 231–242.
19. **Ulam S. M.** A collection of mathematical problems. — New York: Wiley (Interscience), 1960. — 150 p.

Скумс Павел Валентинович,
e-mail: skumsp@gmail.com

Тышкевич Регина Иосифовна,
e-mail: tyshkevich@bsu.by

Статья поступила
29 января 2009 г.
Переработанный вариант —
22 мая 2009 г.