ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2009. Том 16, № 5. С. 19–25

УДК 519.17

ОБ ЭНТРОПИЙНО МИНИМАЛЬНЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССАХ ЦВЕТНЫХ ГРАФОВ

В. Е. Алексеев, С. В. Сорочан

Аннотация. Рассматриваются наследственные классы графов с раскрашенными рёбрами. Класс называется энтропийно минимальным, если он не содержит собственных наследственных подклассов с тем же значением энтропии (логарифмической плотности). Для обыкновенных графов известно, что при любых фиксированных a и b класс, состоящий из всех графов, множество вершин которых можно разбить на a клик и b независимых множеств, является энтропийно минимальным. Доказывается обобщение этого утверждения для цветных графов.

Ключевые слова: наследственный класс, энтропия, энтропийно минимальный класс.

Введение

Цветной граф — это обыкновенный граф с раскрашенными рёбрами. На протяжении статьи мы полагаем, что фиксировано множество цветов Q, $|Q| = q$. Цветной граф, получающийся в результате раскрашивания рёбер полного графа, будем называть *q-графом*. Таким образом, q-граф с множеством вершин V задаётся функцией $g : V^{(2)} \to Q$, где $V^{(2)}$ — множество всех неупорядоченных пар различных элементов множества V. Два q-графа *изоморфны*, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая цвета рёбер.

Класс q-графов называется *наследственным*, если в нём содержится каждый q-граф, изоморфный порождённому подграфу графа из этого класса. Множество всех q-графов из класса $\mathcal{X}$ с множеством вершин $V = \{1, \ldots, n\}$ обозначаем через $\mathcal{X}_n$. В [2] доказано, что для любого бесконечного наследственного класса $\mathcal{X}$ q-графов существует предел при $n \to \infty$ последовательности

$$h_n(\mathcal{X}) = \log_q |\mathcal{X}_n| / \binom{n}{2}.$$

Он называется *энтропией* класса $\mathcal{X}$ и обозначается через $h(\mathcal{X})$. Бесконечный наследственный класс q-графов назовём *энтропийно минимальным*, если всякий его собственный бесконечный наследственный подкласс имеет меньшее значение энтропии.

Обыкновенный граф можно рассматривать как 2-граф. Все минимально энтропийные классы обыкновенных графов были описаны в [1]. Каждый такой класс, отличный от класса всех графов, определяется двумя параметрами a и b и состоит из всех графов, у которых множество вершин можно разбить на a клик и b независимых множеств. Цель настоящей статьи — доказать, что при любом $q > 2$ аналогично устроенные классы q-графов являются энтропийно минимальными.

Пусть $M = ||M_{i,j}||$ — симметричная матрица порядка k, элементами которой являются непустые подмножества множества Q (*матрица цветов*). Через $\mathcal{O}^M$ обозначим класс всех q-графов, у которых множество вершин можно так разбить на подмножества $V_1, \dots, V_k$, что цвет каждого ребра $(x, y) \in V_i \times V_j$ принадлежит множеству $M_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, k$. Такое разбиение будем называть *M-разбиением* q-графа. При $q = 2$ упомянутые выше классы энтропийно минимальных обыкновенных графов описываются матрицами, у которых все множества, стоящие на диагонали, имеют мощность 1, а все остальные — мощность 2.

Пусть N — подматрица матрицы M, полученная удалением строки и столбца с одинаковыми номерами. Ясно, что $\mathcal{O}^N \subseteq \mathcal{O}^M$. Если для любой такой матрицы N включение строгое, то матрицу M назовём *неприводимой*. Если при этом для любой такой N выполняется неравенство $h(\mathcal{O}^N) < h(\mathcal{O}^M)$, то матрицу M назовём *энтропийно неприводимой*. Очевидно, что для класса $\mathcal{O}^M$, заданого неприводимой матрицей M, энтропийная неприводимость M является необходимым условием энтропийной минимальности данного класса. Основной результат статьи (теорема 1) состоит в доказательстве достаточности этого условия.

Класс $\mathcal{O}^M$ — это частный случай *композиции* наследственных классов q-графов, введённой в [3], а энтропийно неприводимым матрицам соответствуют классы, названные в [4] *правильными регулярными композициями*. Результат настоящей статьи усиливает результат из [4], где доказано, что правильные регулярные композиции являются минимальными по включению композициями с данным значением энтропии.

Далее предполагается, что зафиксирована некоторая матрица цветов M порядка k. С ней ассоциируется числовая *матрица энтропий* $H = ||h_{i,j}||$, где $h_{i,j} = \log_q |M_{i,j}|$. Из результатов [3] следует, что $h(\mathcal{O}^M)$

равна максимуму квадратичной формы $\sum\limits_{i,j=1}^{k} h_{i,j}x_ix_j$ при ограничениях $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = 1$, $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$, и имеется эффективный способ проверки энтропийной неприводимости матрицы цветов.

1. Равномерная энтропия

Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}^M$ — наследственный класс q-графов. Обозначим через $\mathcal{X}_{k\times n}$ множество всех q-графов из $\mathcal{X}$, имеющих M-разбиение $(V_1^\circ, \ldots, V_k^\circ)$, где $V_i^\circ = \{(i-1)n+1, (i-1)n+2, \ldots, (i-1)n+n\}$, $i = 1, \ldots, k$. Введём обозначения $S_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} h_{i,i}$, $S_2 = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k} h_{i,j}$ и определим последовательность

$$\eta_n(\mathcal{X}) = \frac{\log_q |\mathcal{X}_{k\times n}|}{S_1\binom{n}{2} + S_2 n^2}\,,\ n = 1, 2, \ldots .$$

При любом n знаменатель этой дроби равен логарифму числа всех q-графов из класса $\mathcal{O}^M$ с указанным M-разбиением. В настоящем разделе будет доказано, что последовательность $\eta_n(\mathcal{X})$ сходится при $n \to \infty$ и её предел $\eta(\mathcal{X})$ — *равномерная k-дольная энтропия класса* $\mathcal{X}$ — меньше 1 для любого наследственного класса, являющегося собственным подмножеством класса $\mathcal{O}^M$.

Рассмотрим последовательность

$$\sigma_n(\mathcal{X}) = \frac{2\log_q |\mathcal{X}_{k\times n}|}{n^2} + \frac{S_1}{n} = \eta_n(\mathcal{X})\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)S_1 + 2S_2\right) + \frac{S_1}{n}\,. \qquad (1)$$

Докажем, что последовательность $\sigma_n(\mathcal{X})$ монотонно не возрастает. В доказательстве используется неравенство из работы [5], связывающее объём n-мерного тела с объёмами его проекций на некоторые подпространства. Приведём комбинаторную версию этого неравенства.

Лемма 1 [5]. *Пусть A — конечное множество, F — конечное множество функций, определённых на A, $\{B_1, \ldots, B_p\}$ — семейство (не обязательно различных) подмножеств множества A, причём каждый элемент из A принадлежит в точности s множествам этого семейства. Тогда*

$$|F|^s \leqslant \prod_{i=1}^{p} |F_{B_i}|,$$

где F_B обозначает множество функций, являющихся ограничениями функций из F на множество B.

Лемма 2. *Для любого бесконечного наследственного класса $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{O}^M$ последовательность $\sigma_n(\mathcal{X})$ монотонно не возрастает.*

Доказательство. Всякий q-граф с множеством вершин $V = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i^\circ$ можно рассматривать как функцию, определённую на множестве рёбер полного обыкновенного графа, со значениями в множестве Q. Пусть (x, y) — ребро этого графа, у которого $x \in V_i^\circ$, $y \in V_j^\circ$. Ребро (x, y) назовём *внутренним*, если $i = j$, иначе назовём его *внешним*. Рассмотрим семейство порождённых подграфов этого q-графа, состоящее из двух подсемейств:

a) подграфы, получаемые удалением k вершин, по одной из каждого множества V_i°, $i = 1, \ldots, k$;

b) подграфы, порождаемые двумя вершинами, образующими внутреннее ребро; каждый такой подграф мы включаем в семейство n^{k-2} раз.

Первое подсемейство содержит n^k подграфов, причём каждое внутреннее ребро присутствует в $(n-2)n^{k-1}$ подграфах, а каждое внешнее — в $(n-1)^2 n^{k-2}$ подграфах этого подсемейства. В целом каждое внутреннее ребро представлено в подграфах из всего семейства в точности $(n-2)n^{k-1} + n^{k-2} = (n-1)^2 n^{k-2}$ раз, т. е. столько же, сколько внешнее. Иначе говоря, это семейство подграфов равномерно покрывает множество $V^{(2)}$. При этом для каждого из подграфов первого подсемейства имеется точно $|\mathcal{X}_{k\times(n-1)}|$ q-графов из $\mathcal{X}$, получающихся раскрашиванием рёбер этого подграфа при соотвествующем M-разбиении. Каждый подграф второго семейства имеет единственное ребро. Если обе вершины этого ребра принадлежат множеству V_i°, то его можно раскрасить не более чем $|M_{i,i}|$ способами. Применяя лемму 1, получаем

$$|\mathcal{X}_{k\times n}|^{(n-1)^2 n^{k-2}} \leqslant |\mathcal{X}_{k\times(n-1)}|^{n^k} \prod_{i=1}^{k} |M_{i,i}|^{\binom{n}{2} n^{k-2}}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{\log_q |\mathcal{X}_{k\times n}|}{n^2} \leqslant \frac{\log_q |\mathcal{X}_{k\times(n-1)}|}{(n-1)^2} + \frac{S_1}{2n(n-1)}\,,$$

т. е. $\sigma_n(\mathcal{X}) \leqslant \sigma_{n-1}(\mathcal{X})$. Лемма 2 доказана.

Существующий вследствие леммы 2 предел последовательности $\sigma_n(\mathcal{X})$ обозначим через $\sigma(\mathcal{X})$. Ввиду (1) существует и предел $\eta(\mathcal{X})$ последовательности $\eta_n(\mathcal{X})$, причём

$$\sigma(\mathcal{X}) = \eta(\mathcal{X})(S_1 + 2S_2). \tag{2}$$

Лемма 3. *Если $\mathcal{X}$ — наследственный класс q-графов, являющийся собственным подмножеством класса $\mathcal{O}^M$, то $\eta(\mathcal{X}) < 1$.*

Доказательство. При некотором n выполняется неравенство

$$|\mathcal{X}_{k\times n}| < |\mathcal{O}^M_{k\times n}| = q^{S_1\binom{n}{2}+S_2n^2}.$$

Тогда $\eta_n(\mathcal{X}) < 1$ и, следовательно, $\sigma_n(\mathcal{X}) < S_1 + 2S_2$. Из монотонности последовательности $\sigma_n(\mathcal{X})$ следует, что $\sigma(\mathcal{X}) < S_1 + 2S_2$. Отсюда и из (2) следует утверждение леммы.

2. Минимальные классы

Теорема 1. *Если M — энтропийно неприводимая матрица цветов, то класс $\mathcal{O}^M$ энтропийно минимален.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ — наследственный класс q-графов, являющийся собственным подмножеством класса $\mathcal{O}^M$. Для каждого разбиения $n = n_1 + \ldots + n_k$ числа n зафиксируем какое-нибудь разбиение $(V_1, \ldots, V_k)$ множества $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ вершин, у которого $|V_1| = n_1, \ldots, |V_k| = n_k$. Обозначим через $\mathcal{X}_{n_1,\ldots,n_k}$ множество всех q-графов из $\mathcal{X}$, для которых $(V_1, \ldots, V_k)$ является M-разбиением. Имеется k^n упорядоченных разбиений множества из n элементов на k частей, поэтому

$$|\mathcal{X}_n| \leqslant k^n \max_{n_1+\ldots+n_k=n} |\mathcal{X}_{n_1,\ldots,n_k}|. \tag{3}$$

Пусть N_i — подматрица матрицы M, полученная удалением строки и столбца с номером i. Положим

$$\gamma = \frac{1}{3}\min_i \left(h(\mathcal{O}^M) - h(\mathcal{O}^{N_i})\right).$$

Так как M энтропийно неприводима, то $\gamma > 0$. Рассмотрим два случая.

1. Найдётся такое j, что $n_j < \gamma n$. Не уменьшая общности, будем считать, что $j = 1$. Тогда

$$|\mathcal{X}_{n_1,\ldots,n_k}| \leqslant q^{\binom{n_1}{2}+n_1(n-n_1)} \cdot q^{\frac{1}{2}h(\mathcal{O}^{N_1})(n-n_1)^2+o(n^2)}.$$

Первый сомножитель — верхняя оценка числа способов раскрасить рёбра, соединяющие вершины из V_1 между собой и с остальными вершинами, второй — число способов раскрасить остальные рёбра. Отсюда, учитывая, что $n_1 < \gamma n$ и $h(\mathcal{O}^{N_1}) \leqslant h(\mathcal{O}^M) - 3\gamma$, получаем

$$|\mathcal{X}_{n_1,\ldots,n_k}| < q^{\frac{1}{2}(h(\mathcal{O}^M)-\gamma)n^2+o(n^2)}. \tag{4}$$

2. Если $n_j \geqslant \gamma n$ при всех $j = 1, \ldots, k$, то положим $m = \lfloor \gamma n \rfloor$. Число способов достроить любой q-граф из $\mathcal{X}_{k\times m}$ до q-графа из $\mathcal{X}_{n_1,\ldots,n_k}$ не превосходит

$$q^{\sum\limits_{i=1}^{k} h_{i,i}\left(\binom{n_i}{2}-\binom{m}{2}\right)+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k} h_{i,j}(n_i n_j - m^2)} = |\mathcal{O}^M_{n_1,\ldots,n_k}| q^{-S_1\binom{m}{2}-S_2 m^2}.$$

Из леммы 3 следует, что

$$|\mathcal{X}_{k\times m}| = q^{\eta\left(S_1\binom{m}{2}+S_2m^2\right)+o(m^2)},$$

где $\eta = \eta(\mathcal{X}) < 1$. Поэтому

$$|\mathcal{X}_{n_1,\ldots,n_k}| \leqslant \left|\mathcal{O}^M_n\right| q^{\frac{1}{2}(\eta-1)(S_1+2S_2)\gamma^2 n^2 + o(n^2)}. \tag{5}$$

Из (3)–(5) следует, что $|\mathcal{X}_n| < \left|\mathcal{O}^M_n\right| q^{-\alpha n^2 + o(n^2)}$, где

$$\alpha = \min\{\gamma, (1-\eta)(S_1+2S_2)\gamma^2\}$$

— положительная константа. Отсюда $h(\mathcal{X}) < h(\mathcal{O}^M)$. Теорема 1 доказана.

3. Заключительные замечания

Как показано в [1], при $q = 2$ (т. е. для обыкновенных графов) не существует других энтропийно минимальных классов q-графов, кроме тех, которые описываются теоремой 1. Мы предполагаем, что это верно и при любом q.

Сложной проблемой является вычисление энтропии при $q > 2$. При $q = 2$ полное описание энтропийно минимальных классов позволяет алгоритмически вычислять энтропию во всяком случае для классов, определяемых конечным числом запрещённых подграфов (хотя и посредством весьма трудоёмких алгоритмов). Даже если высказанная выше гипотеза верна, мы в настоящее время не видим, как при $q > 2$ такая информация об энтропийно минимальных классах может быть использована для вычисления энтропии конкретных наследственных классов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискрет. математика. — 1992. — Т. 4, вып. 2. — С. 148–157.
2. **Алексеев В. Е., Сорочан С. В.** Об энтропии наследственных классов цветных графов // Дискрет. математика. — 2000. — Т. 12, вып. 2. — С. 99–102.

3. **Сорочан С. В.** Об энтропии композиций наследственных классов цветных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2002. — Т. 9, № 1. — С. 59–83.
4. **Сорочан С. В.** О регулярных композициях наследственных классов цветных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 79–104.
5. **Bollobás B., Thomason A.** Projections of bodies and hereditary properties of hypergraphs // Bull. London Math. Soc. — 1995. — V. 27, N 5. — P. 417–424.

Алексеев Владимир Евгеньевич,
e-mail: ave@uic.nnov.ru

Сорочан Сергей Владимирович,
e-mail: svs-05@mail.ru

Статья поступила
16 апреля 2008 г.

Переработанный вариант —
8 мая 2009 г.