ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2009. Том 16, № 5. С. 41–51

УДК 519.178

КОНТИНУАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ГРАНИЧНЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧ О РАСКРАСКЕ

Д. С. Малышев

Аннотация. Для задач о вершинной 3-раскраске и о рёберной 3-раскраске указываются континуальные множества граничных классов графов. Это первые примеры задач на графах с множествами граничных классов такой мощности.

Ключевые слова: граничный класс графов, задачи о 3-раскраске, континуальные множества граничных классов.

Введение

Данная работа является продолжением цикла работ [1–5], в которых изучалась граница между «простыми» и «сложными» классами графов для некоторых задач на графах в семействе *наследственных классов графов*, т. е. классов графов, замкнутых относительно изоморфизма и удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс графов X может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов S, при этом принята запись $X = \mathrm{Free}(S)$. Для произвольного наследственного класса X минимальное множество запрещённых порождённых подграфов является единственным и обозначается через $\mathrm{Forb}(X)$. Если $\mathrm{Forb}(X)$ конечно, то класс X называется *конечно определённым*.

Пусть Π — какая-либо задача на графах. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если задача Π в этом классе полиномиально разрешима. Π-*сложным* называется наследственный класс графов, не являющийся Π-простым. Наследственный класс графов X называется Π-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность Π-сложных классов графов $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$, что $X = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Минимальный по включению Π-предельный класс называется Π-*граничным*. Значение понятия «граничный класс графов» раскрывает следующая теорема, доказанная в [5].

© **2009 Малышев Д. С.**

Теорема 1. *Если P≠NP, то конечно определённый класс графов X является* Π-*сложным тогда и только тогда, когда X содержит какой-нибудь* Π-*граничный класс.*

Основные результаты настоящей работы, как и работ [1, 2], справедливы в предположении, что P≠NP. Это предположение далее не включается явно в формулировки соответствующих утверждений.

Для некоторых задач на графах найдены отдельные граничные классы [1, 3–5]. Во всех этих результатах в качестве граничных фигурируют три класса. Один из них — класс T, состоящий из графов, каждая компонента связности которых является либо простым путём, либо гомеоморфна звезде $K_{1,3}$. Данный класс является граничным для задач о независимом множестве, о доминирующем множестве и некоторых других. Для задачи о доминирующем множестве и некоторых других задач граничным является класс D, состоящий из графов, являющихся графами рёбер графов класса T. В [2] доказано, что для задачи о рёберной 3-раскраске множество граничных классов бесконечно. Данное доказательство является неконструктивным, и для этой задачи не было найдено ни одного конкретного граничного класса. В настоящей статье описываются континуальные семейства конкретных граничных классов графов для задач о вершинной и рёберной 3-раскрасках.

В статье приняты следующие обозначения: $[X]$ — класс всех графов, изоморфных порождённым подграфам графов из X; X^+ — множество графов, у которых каждая из компонент связности принадлежит классу X; $\mathrm{Deg}(d)$ — класс графов, в которых степени вершин не превосходят d; nG — граф, состоящий из n вершинно не пересекающихся копий графа G; $T_{i,i,i}$ — дерево с тремя листьями, находящимися на расстоянии i от вершины степени 3; $D_{i,i,i}$ — граф рёбер графа $T_{i+1,i+1,i+1}$; граф $K_4 - e$ получается из графа K_4 удалением ребра e; граф B получается из графа $2K_3$ добавлением двух рёбер, не имеющих общих вершин; граф $\widetilde{B}$ — граф, получаемый добавлением одной вершины к графу P_5 и всех рёбер, соединяющих эту вершину с вершинами данного пути.

1. Задача о вершинной 3-раскраске

Правильной k-раскраской (далее просто *k-раскраской*) вершин графа G называется такое отображение $f : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$, что если $(a, b) \in E(G)$, то $f(a) \neq f(b)$. Задача о вершинной k-раскраске (задача k-ВР) состоит в том, чтобы определить, существует ли k-раскраска вершин данного графа.

Пусть некоторый граф G содержит ровно две вершины степени два,

а также автомофизм, переводящий эти вершины друг в друга. Операция *замены ребра* $e = (a, b)$ некоторого графа графом G состоит в удалении этого ребра с последующим отождествлением вершины a с одной вершиной степени 2 графа G и вершины b с другой вершиной степени 2 графа G. Понятно, что граф, получаемый при замене ребра, не зависит от того, какая именно вершина степени 2 графа G отождествляется с вершиной a.

Для произвольной бинарной последовательности $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ назовём π-*гирляндой* граф, получаемый из простого пути P_{2k+1} заменой каждого его ребра. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i-е и $(2k+1-i)$-е рёбра этого пути заменяются графом $K_4 - e$, если $\pi_i = 0$, или графом $\widetilde{B}$, если $\pi_i = 1$.

Введём понятие π-*преобразования вершины*. Пусть окрестность вершины v некоторого графа состоит из четырёх вершин x_1, x_2, y_1, y_2, причём порождённый этими четырьмя вершинами подграф содержит ровно два ребра (x_1, x_2) и (y_1, y_2). Применение π-преобразования к вершине v состоит в следующем:

1) вершину v заменяем двумя вершинами v_1 и v_2; вершину v_1 соединяем рёбрами с вершинами x_1, x_2, а вершину v_2 — с вершинами y_1, y_2;

2) вершину v_1 отождествляем с одной вершиной степени 2 π-гирлянды, а вершину v_2 — с другой такой вершиной.

Множество 4-регулярных графов класса $\mathrm{Free}(K_{1,3}, K_4, K_4 - e)$ обозначим через K. Пусть $G \in K$. Ясно, что окрестность любой вершины v этого графа представляет собой граф $2K_2$. π_V-*Преобразованием графа* G является последовательное применение π-преобразования ко всем вершинам, окрестности которых изоморфны графу $2K_2$ и которые не содержатся в порождённом подграфе $K_4 - e$. Заметим, что в получившемся графе нет вершин, окрестность которых порождает подграф $2K_2$. Обозначим через G_{π_V} граф, получаемый π_V-преобразованием из графа G. Всё множество графов, сформированных таким образом из графов класса K, обозначим через K_π.

Легко видеть, что справедлива следующая

Лемма 1. *Граф $G \in K$ является вершинно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда для любой конечной бинарной последовательности π граф G_{π_V} является вершинно 3-раскрашиваемым.*

Для произвольной конечной бинарной последовательности π через D_π будем обозначать граф, получаемый отождествлением трёх вершин степени 2, принадлежащих трём копиям π-гирлянды, с тремя различными вершинами графа C_3. Для произвольной бесконечной бинарной после-

довательности $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots\}$ через $\mathcal{D}_\pi$ обозначим множество графов $\left[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{D_{\pi^{(k)}}\}\right]^+$, где $\pi^{(k)} = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$.

Лемма 2. *Для любой бесконечной бинарной последовательности π класс $\mathcal{D}_\pi$ является* 3-ВР-*предельным.*

Доказательство. Известно [8], что задача 3-ВР для графов класса K является NP-полной. Отсюда и из леммы 1 следует, что для любого i эта задача NP-полна в классе $K_{\pi^{(i)}}$. Поэтому класс $X_s = \left[\bigcup\limits_{j=s}^{\infty} K_{\pi^{(j)}}\right]$ при любом s является 3-ВР-сложным. Докажем справедливость равенства $\mathcal{D}_\pi = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X_j$.

Для произвольного графа $G \in \mathcal{D}_\pi$ существуют такие натуральные числа n и k, что для любого $j \geqslant k$ граф G является порождённым подграфом графа $nD_{\pi^{(j)}}$. Очевидно, что для любых n, k, s граф $nD_{\pi^{(k)}}$ принадлежит классу X_s (поскольку при любом s класс X_s является наследственным). Таким образом, произвольный граф $G \in \mathcal{D}_\pi$ принадлежит классу $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X_j$, поэтому имеет место включение $\mathcal{D}_\pi \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X_j$.

Рассмотрим произвольный граф $G \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X_j$. Тогда существует такая бесконечная монотонно возрастающая последовательность $\{j_d\}$, что для любого натурального d граф G принадлежит классу $[K_{\pi^{(j_d)}}]$. Отсюда, положив $d = |V(G)|+1$, заключаем, что для некоторых n и $k < d$ граф G является порождённым подграфом графа $nD_{\pi^{(k)}}$. Таким образом, граф G принадлежит классу $\mathcal{D}_\pi$. Поэтому справедливо включение $\mathcal{D}_\pi \supseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X_j$. Лемма 2 доказана.

Пусть X — некоторый наследственный класс графов. Обозначим через $(X)^k$ множество графов класса X, в которых степень каждой вершины не менее k.

Лемма 3. *Если класс X является k-ВР-сложным, то класс $[(X)^k]$ является k-ВР-сложным.*

Доказательство. Пусть $G \in X$ и G имеет вершину v степени не более чем $k-1$, $G' = G \setminus \{v\}$. Очевидно, граф G является вершинно k-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G' является вершинно k-раскрашиваемым. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть B — k-ВР-граничный класс и граф $G_1 \in B$ содер-*

жит вершину x степени не более чем $k-1$. Тогда существует такой граф $G_2 \in B$, что G_1 является порождённым подграфом графа G_2, а вершина x в графе G_2 имеет степень k.

Доказательство. Так как B — k-ВР-граничный класс, то существуют такие наследственные k-ВР-сложные классы $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = B$. Пусть $B'_i = [(B_i)^k]$. Ясно, что $B'_1 \supseteq B'_2 \supseteq \ldots$ и при любом i класс B'_i является k-ВР-сложным. Поэтому если $B' = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B'_i$, то класс B' является предельным для задачи k-ВР. Так как $B'_i \subseteq B_i$ для любого i, то $B' \subseteq B$, но B — минимальный k-ВР-предельный класс, поэтому $B' = B$.

Так как $G_1 \in B$, то $G_1 \in B'$. Тогда $G_1 \in B'_1, G_1 \in B'_2, \ldots$. По построению класса B'_i для любого i существует такой граф $G_2^i \in B'_i$, что G_1 порождён в G_2^i, а вершина x имеет степень k. Пусть граф G_2^i является наименьшим с этим свойством, тогда $\left|V\left(G_2^i\right)\right| - |V(G_1)| < k+1$. Пусть $\mathbf{M} = \left\{G_2^1, G_2^2, \ldots\right\}$. Очевидно, $\mathbf{M}$ — конечное множество. Поэтому существует граф G_2, принадлежащий B'_s для бесконечно многих значений s. Отсюда и из включения $B'_1 \supseteq B'_2 \supseteq \ldots$ следует, что $G_2 \in B'_i$ для любого i, т. е. $G_2 \in B$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $G \in \mathrm{Free}(\{K_{1,s}\})$ — произвольный вершинно k-раскрашиваемый граф. Тогда $G \in \mathrm{Deg}((k-1)(s-1))$.*

Доказательство. Пусть x — произвольная вершина графа G. Рассмотрим окрестность этой вершины и любую вершинную k-раскраску графа G. Понятно, что мощность пересечения любого цветного класса и окрестности вершины x не превосходит $s-1$. Отсюда следует, что $\deg(x) \leqslant (k-1)(s-1)$. Лемма 5 доказана.

Известно, что многие NP-полные задачи полиномиально разрешимы в классе графов с ограниченной древесной шириной. Определение древесной ширины, а также список таких задач можно найти в [6].

Лемма 6 [9]. *Для любых графов $G_1 \in T$ и $G_2 \in D$ и любого натурального числа d существует такое число $t = t(G_1, G_2, d)$, что древесная ширина графов класса $\mathrm{Free}(\{G_1, G_2\}) \cap \mathrm{Deg}(d)$ не превосходит t.*

Лемма 7. *Для любого k-ВР-граничного класса B либо $B \supseteq T$, либо $B \supseteq D$, либо $B \supseteq S = \{K_{1,s}, s \in \{1, 2, \ldots\}\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторых натуральных чисел s, p, q, i, j справедливо включение

$$B \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{1,s}, pT_{i,i,i}, qD_{j,j,j}\}). \qquad (*)$$

Пусть $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ — произвольная сходящаяся к B последовательность k-ВР-сложных классов графов. В силу $(*)$ существует такое r^*, что $B_r \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{1,s}, pT_{i,i,i}, qD_{j,j,j}\})$ при любом $r > r^*$. Для любого r рассмотрим класс графов $B'_r = B_r \cap \mathrm{Deg}((k-1)(s-1))$. Из леммы 5 следует, что при любом $r > r^*$ все графы из $B_r \setminus B'_r$ не являются вершинно k-раскрашиваемыми. Поэтому при любом $r > r^*$ задача k-ВР в классе графов B_r полиномиально эквивалентна той же задаче в классе B'_r.

Известно [6], что для любых заданных натуральных чисел d и t класс $\mathcal{TW}(d,t)$ является k-ВР-простым ($\mathcal{TW}(d,t)$ — множество графов класса $\mathrm{Deg}(d)$, древесная ширина которых не превосходит t). Отсюда и из леммы 6 следует, что при любом $r > r^*$ класс B'_r является k-ВР-простым. Значит, при любом $r > r^*$ класс B_r является k-ВР-простым. Получаем противоречие с граничностью класса B. Таким образом, предположение неверно. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть для некоторой бесконечной бинарной последовательности π и некоторого* 3-ВР-*граничного класса B выполняется включение $B \subseteq \mathcal{D}_\pi$, причём для некоторого k граф $kD_{1,1,1}$ принадлежит классу B. Тогда $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kD_{\pi(i)}\}\right] \subseteq B$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда для некоторого i граф $kD_{\pi(i)}$ не принадлежит классу B.

Рассмотрим граф $G \in B$ — максимальный по включению порождённый подграф графа $kD_{\pi(i)}$, содержащий порождённый подграф $kD_{1,1,1}$. Очевидно, что граф G обязательно содержит вершину x степени не более чем 2, которая в графе $kD_{\pi(i)}$ имеет степень не менее чем 3. Тогда из доказательства леммы 4 следует, что в классе B существует такой граф G', в котором граф G является собственным порождённым подграфом и $\deg(x) \geqslant 3$. Поэтому граф G не является максимальным по включению; противоречие. Лемма 8 доказана.

Основной результат этого раздела составляет следующая

Теорема 2. *Для любой бесконечной бинарной последовательности π класс $\mathcal{D}_\pi$ является* 3-ВР-*граничным.*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{D}_\pi \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{1,4}, T_{2,2,2}\})$. Таким образом, если для некоторого 3-ВР-граничного класса B выполнено включение $B \subseteq \mathcal{D}_\pi$, то $B \not\supseteq S$ и $B \not\supseteq T$. Из леммы 7 следует, что при любом k граф $kD_{1,1,1}$ принадлежит классу B. Тогда из леммы 8 следует, что при любом k выполнено включение $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kD_{\pi(i)}\}\right] \subseteq B$. Поэтому $\mathcal{D}_\pi \subseteq B$. Та-

ким образом, $B = \mathcal{D}_\pi$, т. е. класс $\mathcal{D}_\pi$ является 3-ВР-граничным. Теорема 2 доказана.

Ясно, что для различных бесконечных бинарных последовательностей π_1 и π_2 классы $\mathcal{D}_{\pi_1}$ и $\mathcal{D}_{\pi_2}$ различны. Отсюда и из теоремы 2 следует, что множество 3-ВР-граничных классов является континуальным.

2. Задача о рёберной 3-раскраске

Рёберной k-раскраской графа G называется такое отображение $f : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, что если e_1 и e_2 — два смежных ребра графа G, то $f(e_1) \neq f(e_2)$. Задача о рёберной k-раскраске (задача k-РР) для данного графа состоит в том, чтобы определить, имеет ли данный граф k-раскраску рёбер.

Для произвольной последовательности π длины k назовём *π-связкой* граф, получаемый из простого пути P_{4k+2} заменами его рёбер. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ $2i$-е и $(4k + 2 - 2i)$-е рёбра этого пути заменяются графом $K_4 - e$, если $\pi_i = 0$, или графом B, если $\pi_i = 1$.

π_E-Преобразованием графа G является операция замены каждого ребра этого графа π-связкой. Обозначим через G_{π_E} граф, получаемый π_E-преобразованием из графа G.

Следующее утверждение легко проверяется.

Лемма 9. *Для любой конечной бинарной последовательности π граф G_{π_E} является рёберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G является рёберно 3-раскрашиваемым.*

Введём понятие *$\triangle$-преобразования вершины*. Пусть окрестность вершины x некоторого графа состоит в точности из трёх попарно не смежных вершин y_1, y_2, y_3. Применение $\triangle$-преобразования к вершине x состоит в следующем:

1) вершина x заменяется на три попарно смежных вершины x_1, x_2 и x_3;

2) добавляются рёбра $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Пусть G — произвольный граф класса $\mathrm{Deg}(3)$. *$\triangle$-Преобразование графа G* состоит в последовательном применении $\triangle$-преобразования к вершинам, окрестность которых порождает подграф $\overline{K}_3$. Ясно, что граф, полученный в результате $\triangle$-преобразования графа G, определяется однозначным образом. Обозначим этот граф через $(G)_\triangle$. Через $(X)_\triangle$ обозначим множество графов, получаемых в результате применения $\triangle$-преобразования к графам из $X \subseteq \mathrm{Deg}(3)$.

Легко проверить, что справедлива следующая

Лемма 10. *Граф $G \in \mathrm{Deg}(3)$ является рёберно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф $(G)_\triangle$.*

Через Z_π обозначим множество графов, получаемых применением π_E-преобразования к графам класса $\mathrm{Deg}(3)$. Через T'_π будем обозначать граф, получаемый применением π_E-преобразования к графу $T_{1,1,1}$. Обозначим через D'_π граф $(T'_\pi)_\triangle$. Для произвольной бесконечной бинарной последовательности π множество графов $\left[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{T'_{\pi(k)}\}\right]^+$ обозначим через $\mathcal{T}'_\pi$, а класс графов $(\mathcal{T}'_\pi)_\Delta$ — через $\mathcal{D}'_\pi$.

Лемма 11. *Для любой бесконечной бинарной последовательности π классы $\mathcal{T}'_\pi$ и $\mathcal{D}'_\pi$ являются 3-РР-предельными.*

Доказательство. Известно, что класс $\mathrm{Deg}(3) \cap \mathrm{Free}(\{C_3\})$ является 3-РР-сложным [7]. Отсюда и из леммы 9 следует, что для любого k класс $[Z_{\pi(k)}]$ является 3-РР-сложным. Таким образом, при любом k класс $X_k = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty}[Z_{\pi(j)}]$ является 3-РР-сложным. По аналогии с соответствующими рассуждениями леммы 2 можно показать справедливость равенства $\mathcal{T}'_\pi = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X_j$. Отсюда следует, что класс $\mathcal{T}'_\pi$ — 3-РР-предельный.

Из проделанных рассуждений и леммы 10 следует, что при любом k класс $([Z_{\pi(k)}])_\triangle$ является 3-РР-сложным. Поэтому для произвольного k класс $X'_k = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty}[([Z_{\pi(j)}])_\triangle]$ также является 3-РР-сложным. Из равенства $\mathcal{D}'_\pi = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} X'_j$, доказательство которого аналогично доказательству соответствующего равенства из предыдущего абзаца, следует 3-РР-предельность класса $\mathcal{D}'_\pi$. Лемма 11 доказана.

Вершину x некоторого графа G назовём 3-РР-*аннигилируемой*, если выполняется одно из следующих условий:

1) $\deg(x) \leqslant 1$;

2) $\deg(x) = 2$ и существует такая вершина y графа G, что $\deg(y) \leqslant 2$ и $(x, y) \in E(G)$;

3) $\deg(x) = 2$ и x принадлежит некоторому порождённому подграфу $K_4 - e$ графа G;

4) $\deg(x) = 2$ и x принадлежит некоторому порождённому подграфу B графа G.

Лемма 12 [2]. *Пусть B — 3-РР-граничный класс и граф $G_1 \in B$ содержит 3-РР-аннигилируемую вершину x. Тогда существует такой граф*

$G_2 \in B$, что G_1 является порождённым подграфом графа G_2, а вершина x в графе G_2 не является 3-РР-*аннигилируемой.*

Лемма 13. *Любой* k-РР-*граничный класс содержит либо класс T, либо класс D.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ — произвольная сходящаяся к 3-РР-граничному классу B последовательность из 3-РР-сложных классов графов. Поскольку ни один из графов класса $\mathrm{Deg}(k+1) \setminus \mathrm{Deg}(k)$ заведомо не является рёберно k-раскрашиваемым, можно считать, что при любом i выполняется включение $B_i \subseteq \mathrm{Deg}(k)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям леммы 7 и используют тот факт, что для любых заданных чисел d и t класс $\mathcal{TW}(d,t)$ является k-РР-простым [6]. Лемма 13 доказана.

Доказательство следующих двух лемм аналогично доказательству леммы 8 и использует лемму 12.

Лемма 14. *Пусть для некоторой бесконечной бинарной последовательности π и некоторого* 3-РР-*граничного класса B выполняется включение $B \subseteq \mathcal{T}'_\pi$, причём для некоторого k граф $kT_{1,1,1}$ принадлежит классу B. Тогда $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{kT'_{\pi(i)}\}\right] \subseteq B$.*

Лемма 15. *Пусть для некоторой бесконечной бинарной последовательности π и некоторого* 3-РР-*граничного класса B выполняется включение $B \subseteq D'_\pi$, причём для некоторого k граф $kD_{1,1,1}$ принадлежит классу B. Тогда $\left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{k\mathcal{D}'_{\pi(i)}\}\right] \subseteq B$.*

Основным результатом этого раздела является

Теорема 3. *Для любой бесконечной бинарной последовательности π классы $\mathcal{T}'_\pi$ и $\mathcal{D}'_\pi$ являются* 3-РР-*граничными.*

Доказательство. Заметим, что

$$\mathcal{T}'_\pi \subseteq \mathrm{Free}(\{D_{1,1,1}\}) \text{ и } \mathcal{D}'_\pi \subseteq \mathrm{Free}(\{T_{1,1,1}\}).$$

Дальнейшее доказательство полностью аналогично рассуждениям теоремы 2 и использует леммы 13–15. Теорема 3 доказана.

Понятно, что для различных бесконечных бинарных последовательностей π_1 и π_2 выполняются условия $\mathcal{T}'_{\pi_1} \neq \mathcal{T}'_{\pi_2}$ и $\mathcal{D}'_{\pi_1} \neq \mathcal{D}'_{\pi_2}$, поэтому множество всех 3-РР-граничных классов имеет мощность континуума.

3. Заключительные замечания

В теоремах 2 и 3 было установлено, что некоторые классы графов являются граничными для задач о 3-раскраске. Логически следующим за получением такого описания является вопрос о его полноте. Покажем, что найденные множества классов графов не совпадают с множеством граничных классов ни для одной из рассматриваемых задач.

Напомним, что в работе [8] показано, что класс $\mathrm{Free}(\{K_4 - e\})$ является 3-ВР-сложным. Согласно теореме 1 конечно определённый класс $\mathrm{Free}(\{K_4 - e\})$ должен содержать некоторый 3-ВР-граничный класс B. В то же время данный класс отличен от описываемых в теореме 2, поскольку для любой бесконечной бинарной последовательности π класс $\mathcal{D}_\pi$ содержит граф $K_4 - e$.

Класс $\mathrm{Deg}(3) \cap \mathrm{Free}(\{C_3\})$ является 3-РР-сложным. Поскольку для любой бесконечной бинарной последовательности π ни класс $\mathcal{T}'_\pi$, ни класс $\mathcal{D}'_\pi$ не принадлежат классу $\mathrm{Free}(\{C_3\})$, существует 3-РР-граничный класс B_1, не совпадающий ни с одним из ранее указанных. Из леммы 10 следует, что класс $(\mathrm{Deg}(3) \cap \mathrm{Free}(\{C_3\}))_\triangle$ является 3-РР-сложным. Так как $(\mathrm{Deg}(3) \cap \mathrm{Free}(\{C_3\}))_\triangle \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{1,3}, K_4 - e, B\})$, то класс

$$\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, K_4 - e, B\})$$

является 3-РР-сложным. Таким образом, существует 3-РР-граничный класс $B_2 \subseteq \mathrm{Free}(\{K_{1,3}, K_4 - e, B\})$. Из леммы 13 следует, что $B_1 \neq B_2$. Поэтому в множестве всех 3-РР-граничных классов существует два различных класса, не принадлежащих множеству классов, описываемых в теореме 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Критерий граничности и его применения // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 3–11.
2. **Малышев Д. С.** О бесконечности множества граничных классов в задаче о рёберной 3-раскраске // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 1. — С. 37–43.
3. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. — 2004. — V. 132. — P. 17–26.
4. **Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Math. — 2004. — V. 285. — P. 1–6.

5. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoret. Comput. Sci. — 2007. — V. 389. — P. 219–236.
6. **Bodlaender H. L.** Dynamic programming on graphs with bounded treewidth // Automata, languages and programming (Tampere, 1988). Proc. — Berlin: Springer–Verl., 1988. — P. 105–118. (Lect. Notes in Comput. Sci.; V. 317).
7. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. — 1981. — V. 10, № 4. — P. 718–720.
8. **Kochol M., Lozin V., Randerath B.** The 3-colorability problem on graphs with maximum degree four // SIAM J. Comput. — 2003. — V. 32, № 5. — P. 1128–1139.
9. **Lozin V. V., Rautenbach D.** On the band-, tree- and clique-width of graphs with bounded vertex degree // Discrete Math. — 2004. — V. 18. — P. 195–206.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
21 января 2009 г.
Переработанный вариант —
27 июня 2009 г.