ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2009. Том 16, № 5. С. 52–68

УДК 621.391.15

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ СОВЕРШЕННЫХ 2-РАСКРАСОК ГРАФОВ ДЖОНСОНА *)

И. Ю. Могильных

Аннотация. Совершенной раскраской в m цветов вершин графа G с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,m}$ называется раскраска множества вершин графа G в множество цветов $\{1,\dots,m\}$ такая, что число вершин цвета j, смежных с фиксированной вершиной цвета i, не зависит от выбора последней вершины и равно a_{ij}. В данной статье устанавливается нижняя оценка на параметр $a_{ij}, i \neq j$, совершенной раскраски графа Джонсона в два цвета. Также доказано несуществование некоторых совершенных раскрасок графов Джонсона в два цвета.

Ключевые слова: совершенная раскраска, полностью регулярный код, схема Джонсона.

Введение

Рассмотрим n-мерный куб $E^n = \{x = (x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \{0,1\}\}$. Каждому $x \in E^n$ отвечает множество номеров его единичных координат, называемое *носителем вектора* x и обозначаемое $\mathrm{supp}(x)$. *Расстояние по Хеммингу* между векторами $x, y \in E^n$ определяется по формуле $d(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i \oplus y_i)$, где $\oplus$ – сложение по модулю два. *Весом Хемминга* вектора x называется расстояние от x до вектора, состоящего из одних нулей. *Кодом* в E^n называется некоторое подмножество E^n. Вектор x из E^n *предшествует вектору* y из E^n (обозначается $x \preceq y$), если $x_i \leqslant y_i$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$.

Вершинами *графа Джонсона* $J(n,w)$ являются все векторы веса w из E^n, рёбрами соединяются векторы на расстоянии 2 друг от друга. Далее под носителем, координатой, весом вершины графа Джонсона, отношением предшествования одной вершины другой будем понимать эти понятия для соответствующих этим вершинам векторам n-куба E^n. Нетрудно убедиться в том, что граф Джонсона $J(n,w)$ — регулярный граф степени $w(n-w)$. Также легко видеть, что для графской метрики

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00244).

d_J этого графа, именуемой *метрикой Джонсона*, выполняется равенство $d_J(x, y) = d(x, y)/2$.

Под *совершенной раскраской в m цветов* (*совершенной m-раскраской*) графа G с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,m}$ понимается раскраска множества вершин графа G в множество цветов $\{1, \ldots, m\}$ такая, что число вершин цвета j, смежных с фиксированной вершиной цвета i, зависит не от выбора последней вершины, а только от её цвета и равно a_{ij}. Матрица A называется *матрицей параметров совершенной раскраски*. В случае $m = 2$ цвет под номером 1 будем называть белым, цвет под номером 2 — чёрным, совокупность всех вершин белого цвета будем обозначать через W, чёрного — через B.

В данной статье, анализируя структуру подграфов, индуцированных вершинами сфер радиуса 1 и 2 в графе Джонсона, докажем несуществование некоторых совершенных 2-раскрасок графа Джонсона. Используя тот факт, что подграф, индуцированный сферой радиуса 1 в графе Джонсона, изоморфен декартову произведению двух полных графов, в разд. 2 покажем, что параметр a_{21} совершенной 2-раскраски графа Джонсона оценивается снизу функцией от n, w, a_{12} (теорема 3). В разд. 3 докажем несуществование некоторых других совершенных 2-раскрасок графа Джонсона, анализируя подграф, индуцированный сферой радиуса 2, и некоторые дополнительные соображения. Впервые такой подход (метод «локальных аргументов») применён Д. Г. Фон-дер-Флаасом в [2] для доказательства необходимых условий существования совершенных раскрасок в два цвета графа n-мерного куба E^n. Отметим, что совершенные 2-раскраски графов Джонсона, несуществование которых показано в данной статье, выдерживают теоретико-числовые «атаки», возникающие из известных необходимых условий существования совершенных 2-раскрасок графа Джонсона (см. теоремы 1 и 2).

1. Обзор известных результатов

В этом разделе приведём некоторые известные результаты, касающиеся конструкций и необходимых условий существования совершенных раскрасок графов Джонсона, а также других близких к ним структур.

В 1973 г. Дельсарт выдвинул гипотезу о несуществовании нетривиальных e-совершенных кодов в графах Джонсона [3] для произвольного e. Несмотря на ряд полученных результатов, эта гипотеза так и остаётся неподтверждённой. Напомним, что *e-совершенным кодом* в графе Джонсона называется такое подмножество вершин этого графа, что шары радиуса e с центрами в вершинах этого кода образуют разбиение множества вершин этого графа. Покрасим все кодовые вершины некоторого 1-совершенного кода в графе $J(n,w)$ в белый цвет, все некодовые — в чёрный. Несложно видеть, что полученная раскраска будет совершенной с матрицей параметров

$$\begin{pmatrix} 0 & w(n-w) \\ 1 & w(n-w)-1 \end{pmatrix}.$$

Ряд работ, посвящённых проблеме существования 1-совершенных кодов в графах Джонсона, опубликован Этционом. В [4–6] им установлены и изучены такие свойства совершенных равновесных кодов, как наличие систем Штейнера, индуцируемых совершенными равновесными кодами; наличие соотношения, связывающего между собой число векторов, принадлежащих совершенным кодам, изоморфным данному совершенному коду C, на расстоянии i от кодовой вершины C; свойство k-регулярности e-совершенных кодов. Используя последнее свойство, Этцион и Шварц в [4] доказали, что не существует нетривиальных 1-совершенных кодов в графах Джонсона при $n \leqslant 50000$. Позднее, используя другой подход, Гордон [7] доказал несуществование 1-совершенных равновесных кодов в графах Джонсона $J(n,w)$ для $n \leqslant 2^{250}$.

Приведём определение полностью регулярного кода по Ньюмайеру [13], эквивалентное введённому Дельсартом [3]. Для этого определим несколько дополнительных понятий. *Кодом* C *в графе* $G=(V,E)$ называется некоторое подмножество множества вершин V. *Слоями дистанционного разбиения* (*относительно кода* C) назовём множества $L_0(C)=C$ и $L_j(C)=\{y\in V \mid d_J(y,C)=j\}$ при $0\leqslant j\leqslant \rho_C$, а разбиение $V=\bigcup\limits_{0\leqslant j\leqslant\rho_C} L_j(C)$ — *дистанционным разбиением множества вершин графа* G *относительно кода* C. Здесь под *покрывающим радиусом* ρ_C кода C понимается максимальное расстояние от вершины графа до кода C. Покрасим каждый слой дистанционного расслоения относительно кода C в свой цвет. Если эта раскраска вершин графа является совершенной, то код C будем называть *полностью регулярным.* Отметим, что множество вершин фиксированного цвета произвольной совершенной раскраски в два цвета является полностью регулярным кодом с покрывающим радиусом $\rho=1$.

Пусть даны совершенная 2-раскраска графа G и полностью регулярный код C в этом графе. Зная количество белых вершин в C, можно найти распределение белых вершин во всех слоях дистанционного расслоения относительно C [11]. В следующей теореме приводится формальное описание этого факта для графов Джонсона и полностью регулярных кодов специального вида.

Теорема 1 [11]. *Пусть W — множество белых вершин совершенной 2-раскраски графа $J(n,w)$ с матрицей A, и пусть*

$$C = \{y \mid wt(y) = w, x \preceq y\}, \quad wt(x) = i.$$

Тогда для всякого j, $0 \leqslant j \leqslant \rho(C)$, имеем

$$|L_{j-1}(C) \cap W| d^{+}_{j-1} + |L_j(C) \cap W| \big(a_{21} - a_{11} + d^{0}_{j}\big) + |L_{j+1}(C) \cap W| d^{-}_{j+1} \\ = |L_j(C)| a_{21},$$

где $d^{+}_{j} = (i-j)(n-w-j)$, $d^{0}_{j} = (i-j)j + (w-i+j)(n-w-j)$, $d^{-}_{j} = j(w-i+j)$, $|L_j(C)| = C_i^j C_{n-i}^{w-i+j}$.

Совокупность k-элементных подмножеств n-элементного множества, именуемых блоками, такая, что любое t-элементное подмножество встречается в точности в λ блоках, называется t-(n,k,λ)-*схемой*. Возьмём $\{1,\dots,n\}$ в качестве n-элементного множества. Каждому блоку t-(n,k,λ)-схемы можно однозначно сопоставить вектор из E^n, носитель которого совпадает с этим блоком. Тогда t-(n,k,λ)-схему можно понимать как код в графе $J(n,k)$ такой, что всякая вершина из $J(n,t)$ предшествует ровно λ вершинам из этого кода. *Силой* схемы называется наибольшее t, для которого она является t-схемой. Схема называется *полностью регулярной*, если множество её блоков является полностью регулярным кодом в графе Джонсона. Такие структуры ранее исследовались Мейеровицем, Мартином. В [10] Мейеровиц описал все полностью регулярные схемы силы 0. Позднее Мартин описал в [8] все полностью регулярные схемы силы 1 с минимальным расстоянием $\delta \geqslant 2$. В [9] им установлены некоторые ограничения на параметры полностью регулярных схем.

Следующая теорема является обобщением свойства k-регулярности на класс совершенных раскрасок в два цвета графа Джонсона, установленного Этционом и Шварцем в [4] для совершенных кодов. Первый пункт этой теоремы является аналогом известной теоремы Ллойда для полностью регулярных кодов [13].

Теорема 2 [1]. *Пусть дана совершенная 2-раскраска графа Джонсона $J(n,w)$ с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Тогда*

1) *число $k_1 = (n + 1 - \sqrt{(n-2w+1)^2 + 4(w + a_{11} - a_{21})})/2$ является натуральным числом, не превосходящим w;*

2) *число белых вершин совершенной раскраски, принадлежащих произвольной грани* Γ_x^y, *где* $y \preceq x$, $wt(x) = i \leqslant k_1 - 1$, $wt(y) = j$, *равно*

$$\frac{a_{21}}{a_{12} + a_{21}} \cdot C_{n-i}^{w-i+j}, \ \ 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant k_1 - 1.$$

Здесь под *гранью* Γ_x^y понимаем множество $\{z + y - x \mid z \in E^n, x \preceq z\}$. Отметим, что из этой теоремы вытекает, что совокупность вершин фиксированного цвета совершенной 2-раскраски является схемой силы $k_1 - 1$, где k_1 — величина, определённая в теореме. Это свойство роднит совершенные раскраски с полностью регулярными блок-схемами, изученными Мартином [8, 9].

В заключение этого раздела приведём краткий обзор конструкций совершенных 2-раскрасок графов Джонсона. Некоторые конструкции были получены Мартином [8] и автором [1]. Совместно с С. В. Августиновичем автором в [11] приведено конструктивное описание совершенных 2-раскрасок $J(6, 3)$ $J(7, 3)$. В [12] были анонсированы некоторые конструкции совершенных 2-раскрасок $J(8, 3)$, $J(8, 4)$, $J(9, 4)$, а также совершенных 2-раскрасок графа $J(2m, 3)$ для произвольного m. Более того, доказано, что матрица параметров любой совершенной 2-раскраски графов $J(8, 3)$, $J(8, 4)$ совпадает с матрицей параметров совершенной раскраски, полученной с помощью одной из этих конструкций.

2. Нижняя оценка параметра a_{21} совершенной 2-раскраски графа Джонсона

Пусть x — произвольная вершина графа $J(n, w)$. Рассмотрим $L_1(x)$ — множество вершин $J(n, w)$, находящихся на расстоянии Джонсона 1 от вершины x. Пусть $\Pi_{w\times(n-w)}$ — прямоугольник, разбитый на $w(n - w)$ одинаковых клеток, с $n - w$ клетками в каждой строке и с w клетками в каждом столбце. Зададим соответствие между вершинами $L_1(x)$ и клетками прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$. Занумеруем произвольным образом координаты $\mathrm{supp}(x)$ и $\{1, \ldots, n\} \setminus \mathrm{supp}(x)$ целыми числами от 1 до w и от 1 до $n - w$ соответственно. Произвольная вершина y из $L_1(x)$ отличается от вершины x в одной координате из $\mathrm{supp}(x)$ и в одной координате из $\{1, \ldots, n\} \setminus \mathrm{supp}(x)$. Пусть эти координаты имеют номера m и l в соответствии с нумерациями множеств $\mathrm{supp}(x)$ и $\{1, \ldots, n\} \setminus \mathrm{supp}(x)$. Отождествим вершину y из $L_1(x)$ с клеткой, стоящей в $\Pi_{w\times(n-w)}$ на пересечении m-й строки и l-го столбца. Аналогичным образом поставим в соответствие каждой вершине $L_1(x)$ клетку прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$. Это соответствие будет взаимно однозначным, так как всякая вершина из $L_1(x)$ однозначно характеризуется парой координат, в которых она отличается от x. Легко видеть, что при этом сопоставлении пара вершин из $L_1(x)$ смежна тогда и только тогда, когда отождествляемые с ними клетки прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$ лежат в одной строке или в одном столбце. В этом случае пару клеток будем называть *смежными*. По сути, мы показали, что подграф графа $J(n,w)$, индуцируемый вершинами сферы радиуса 1, изоморфен декартову произведению двух полных графов на w и $n-w$ вершинах.

Рассмотрим совершенную 2-раскраску графа $J(n,w)$, $2w \leqslant n$, с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Пусть x является произвольной вершиной белого цвета графа $J(n,w)$. Тогда слой $L_1(x)$ содержит a_{11} белых и a_{12} чёрных вершин. Поставим в соответствие вершинам $L_1(x)$ клетки прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$, покрашенные в соответствии с цветом отвечающих им вершин графа $J(n,w)$. Тогда в соответствии с цветом клетки $\Pi_{w\times(n-w)}$ разбиваются (вообще говоря, произвольно) на два множества W_1 и B_1 мощности a_{11} и a_{12}. Клетки, принадлежащие B_1, будем называть чёрными, а остальные клетки, т. е. принадлежащие W_1, — белыми. Пусть B'_1 — произвольное множество элементов $\Pi_{w\times(n-w)}$ мощности a_{12}. Обозначим через W'_1 оставшиеся клетки прямоугольника. Для любой клетки $b \in B'_1$ определим $a_{21}(b, B'_1)$ и $a_{22}(b, B'_1)$ как число клеток из W'_1 и B'_1 соответственно, находящихся в одной строке или в одном столбце прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$ с клеткой b. Используя введённые обозначения, получим оценку снизу на параметр a_{21} совершенной 2-раскраски графа Джонсона.

Лемма 1. *Пусть существует совершенная* 2-*раскраска* $J(n,w)$ *с матрицей параметров* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. *Тогда*

$$a_{21} \geqslant n - 1 - \max_{B'_1} \min_{b\in B'_1} a_{22}(b, B'_1),$$

где B'_1 *пробегает все подмножества множества клеток прямоугольника* $\Pi_{w\times(n-w)}$ *мощности* a_{12}.

Доказательство. Пусть x — произвольная вершина $J(n,w)$ белого цвета. Пусть W_1 и B_1 являются совокупностями клеток прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$, отвечающих множеству вершин белого и чёрного цветов соответственно, принадлежащих $L_1(x)$, $|W_1| = a_{11}, |B_1| = a_{12}$. Пусть b — произвольная чёрная клетка. Согласно сопоставлению вершин $L_1(x)$ с клетками прямоугольника чёрная вершина, отвечающая b, смежна с $a_{21}(b, B_1)+1$ белыми вершинами из множества $x \cup L_1(x)$. По определению совершенной раскраски это число не превосходит a_{21}, т. е. справедливо неравенство $a_{21} \geqslant a_{21}(b, B_1)+1$. Из этого неравенства в силу произвольности выбора b имеем $a_{21} \geqslant \max\limits_{b\in B_1} a_{21}(b, B_1)+1$, откуда следует

$$a_{21} \geqslant \min_{B_1'} \max_{b\in B_1'} a_{21}(b, B_1')+1. \tag{1}$$

Так как произвольная вершина из $L_1(x)$ смежна ровно с $n-2$ вершинами из $L_1(x)$, то $a_{21}(b, B_1')+a_{22}(b, B_1') = n-2$. Требуемое получим, выразив $a_{21}(b, B_1')$ из последнего равенства и подставив в (1).

С помощью леммы 1 получим нижнюю оценку, зависящую от a_{12}, n, w, на параметр a_{21}. Для этого оценим

$$\max_{B_1'} \min_{b\in B_1'} a_{22}(b, B_1'), \tag{2}$$

где B_1' пробегает все подмножества множества клеток прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$, имеющие одинаковую мощность a_{12}. Отметим, что задача исследования (2) уже не связана с совершенными раскрасками и может быть сформулирована как задача дискретной оптимизации: найти максимальное значение целочисленной функции $\min\limits_{b\in B_1'} a_{22}(b, B_1')$, где B_1' пробегает все подмножества клеток прямоугольника фиксированной мощности. Мы получим верхние и нижние оценки на значение этой функции, отличающиеся друг от друга на единицу.

Введём дополнительное обозначение: $s(a_{12}) = \lceil a_{12}/(n-w)\rceil$. Если мощность некоторого подмножества множества клеток прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$ равна a_{12}, то согласно принципу Дирихле в прямоугольнике $\Pi_{w\times(n-w)}$ найдётся столбец, в котором имеется хотя бы $s(a_{12})$ клеток из этого множества.

Лемма 2. *Пусть a_{12} — такое натуральное число, не превосходящее $w(n-w)$, что $w \leqslant \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2$. Тогда*

$$\max_{|B_1'|=a_{12}} \min_{b\in B_1'} a_{22}(b, B_1') \leqslant \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + s(a_{12}) - 2, \tag{3}$$

где B_1' пробегает все подмножества множества клеток прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$ мощности a_{12}.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует множество клеток B_1' прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$ такое, что для всех клеток b, принадлежащих B_1', выполняется неравенство

$$a_{22}(b, B_1') \geqslant \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + s(a_{12}) - 1. \tag{4}$$

По определению $s(a_{12})$ в прямоугольнике $\Pi_{w\times(n-w)}$ существует столбец (без ограничения общности, первый), содержащий $s(a_{12})+i,\ i\geqslant 0$, клеток множества B_1'. Из оценки (4) получаем, что любая из этих $s(a_{12})+i$ клеток B_1', помимо $s(a_{12})-1+i$ клеток B_1', принадлежащих первому столбцу, смежна не менее чем с $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor - i$ клетками B_1'. Следовательно, в прямоугольнике $\Pi_{w\times(n-w)}$ найдётся $s(a_{12})+i$ строк, в каждой из которых не менее $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor - i + 1$ клеток множества B_1'. Так как $|B_1| = a_{12}$, то имеем оценку

$$a_{12} \geqslant (\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor - i + 1)(s(a_{12})+i). \tag{5}$$

Обозначим через $p(i)$ правую часть неравенства (5). Раскрывая скобки, получим

$$p(i) = -i^2 + i(\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor - s(a_{12}) + 1) + s(a_{12}) + s(a_{12})\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor.$$

При $i=0$ легко видеть, что оценка (5) не выполнена. Следовательно, первый столбец содержит не менее $s(a_{12})+1$ клеток, принадлежащих B_1'. Покажем, что оценка (5) для всех i, $i>0$, не выполнена.

Для этого сначала докажем, что $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor \geqslant s(a_{12})-1$. Предположим, что $s(a_{12})-1 > \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor$. Отсюда, так как $(n-w)\geqslant w\geqslant s(a_{12})$, имеем

$$s(a_{12})-1 > \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor \geqslant \lfloor a_{12}/(n-w)\rfloor.$$

Однако в силу того, что

$$s(a_{12})-1 = \lceil a_{12}/(n-w)\rceil - 1 \leqslant \lfloor a_{12}/(n-w)\rfloor,$$

имеем $\lfloor a_{12}/(n-w)\rfloor > \lfloor a_{12}/(n-w)\rfloor$; противоречие.

Так как $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor \geqslant s(a_{12})-1$, в полиноме $p(i)$ коэффициент при i является неотрицательным. Тогда полусумма корней $p(i)$, равная по теореме Виета $(\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor - s(a_{12})+1)/2$, является неотрицательной величиной. Отсюда, учитывая, что старший коэффициент $p(i)$ меньше нуля, имеем: $p(0)\leqslant p(i)$, если $0\leqslant i\leqslant \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor - s(a_{12})+1$. Так как $a_{12} < p(0)$, то при этих значениях i имеем $a_{12} < p(i)$, что противоречит неравенству (5). Следовательно, первый столбец содержит не менее $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2$ клеток из B_1'. В частности, отсюда следует утверждение леммы при $w\leqslant \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 1$.

Для доказательства леммы в случае $w = \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2$ потребуется следующее вспомогательное

Утверждение 1. *Если a_{12} — натуральное число, не превосходящее $w(n-w)$, $w\geqslant \lceil a_{12}/s(a_{12})\rceil$, то $s(a_{12}) = \lceil a_{12}/w\rceil$.*

Доказательство. В силу того, что $w \geqslant \lceil a_{12}/s(a_{12})\rceil$, имеем $s(a_{12}) \geqslant \lceil a_{12}/w\rceil$. Так как $n-w \geqslant w$, то

$$s(a_{12}) \geqslant \lceil a_{12}/w\rceil \geqslant \lceil a_{12}/(n-w)\rceil = s(a_{12}),$$

откуда следует требуемое. Утверждение 1 доказано.

Покажем, что утверждение леммы верно при $w = \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2$. В этом случае по доказанному выше все клетки первого столбца принадлежат множеству B_1'. Так как $w = \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2$, то по утверждению 1 имеем $s(a_{12}) = \lceil a_{12}/w\rceil$. Следовательно, найдётся строка (скажем, первая), в которой имеется не менее $s(a_{12})$ клеток B_1'. Легко видеть, что аналогично рассуждениям выше (заменив слово «столбец», на слово «строка») доказывается, что первая строка содержит хотя бы $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor+2$ клеток множества B_1'. Аналогично доказательству случая $w \leqslant \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 1$, используя оценку (4), получаем, что в прямоугольнике $\Pi_{w\times(n-w)}$ найдётся не менее

$$(\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 1)(s(a_{12}) - 1) + \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2$$

клеток из множества B_1'. В силу того, что

$$\begin{aligned}&(\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 1)(s(a_{12}) - 1) + \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2\\ &\quad = (\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 1)(s(a_{12})) + 1 > (\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 1)(s(a_{12})) \geqslant a_{12},\end{aligned}$$

получаем $|B_1'| > a_{12}$; противоречие. Следовательно, в первом столбце имеется хотя бы $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 3$ клеток B_1', что противоречит тому, что $w = \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2$. Лемма 2 доказана.

Полученная в лемме 2 оценка является достаточно точной в том смысле, что она согласно следующему утверждению отличается от величины $\max\limits_{B_1'} \min\limits_{b\in B_1'} a_{22}(b, B_1')$ не более чем на единицу.

Утверждение 2. *Пусть a_{12} — натуральное число, не превосходящее $w(n-w)$. Тогда*

$$\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + s(a_{12}) - 3 \leqslant \max_{B_1'} \min_{b\in B_1'} a_{22}(b, B_1').$$

Доказательство. Из множества клеток, находящихся на пересечении некоторых $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor$ столбцов и $s(a_{12})$ строк прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$, удалим $s(a_{12}) - \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor$ клеток, попарно не смежных друг с другом. Полученное множество обозначим через B_1'. Нетрудно видеть, что

$$\min_{b\in B_1'} a_{22}(b, B_1') = \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + s(a_{12}) - 2,$$

если $a_{12} = 0,\ s(a_{12}) - 1(\operatorname{mod}\ s(a_{12}))$ и

$$\min_{b\in B_1'} a_{22}(b, B_1') = \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + s(a_{12}) - 3$$

в остальных случаях. Следовательно, так как $|B_1'| = a_{12}$, имеем

$$\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + s(a_{12}) - 3 \leqslant \min_{b\in B_1'} a_{22}(b, B_1'),$$

откуда получаем требуемое.

Непосредственно из лемм 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть существует совершенная 2-раскраска графа $J(n,w)$ с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ такой, что $w \leqslant \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 2$. Тогда*

$$a_{21} \geqslant n - s(a_{12}) + 1 - \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor.$$

Применяя теорему 3, удалось доказать несуществование некоторых совершенных 2-раскрасок графов Джонсона. Отметим, что эти раскраски удовлетворяют необходимым условиям существования совершенных раскрасок, т. е. теоремам 1 и 2.

Следствие 1. *Не существует совершенных раскрасок графов $J(10,5)$, $J(12,4)$, $J(12,5)$, $J(12,6)$ с матрицами параметров*

$$\begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 2 & 23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 2 & 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 2 & 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 2 & 34 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Следствие 2. *Пусть существует совершенная 2-раскраска графа $J(n,w)$ с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ такая, что $\lceil a_{12}/(n-w)\rceil \neq \lceil a_{12}/w\rceil$. Тогда $a_{21} \geqslant n - s(a_{12}) + 1 - \lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor$.*

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что w не превосходит $\lfloor a_{12}/s(a_{12})\rfloor + 1$. Применяя теорему 3, получаем требуемое.

3. Несуществование некоторых совершенных 2-раскрасок графов Джонсона

В этом разделе докажем несуществование совершенных 2-раскрасок графов Джонсона с небольшими значениями параметра a_{21}, удовлетворяющих необходимым условиям существования совершенных 2-раскрасок, описанным в теоремах 1–3. Через x обозначим произвольную вершину белого цвета графа Джонсона $J(n,w)$. Как в предыдущем разделе, вершины подграфа, порождённого $L_1(x)$, будем представлять как клетки прямоугольника $\Pi_{w\times(n-w)}$ с отношением смежности, заданным принадлежностью одной строке и одному столбцу. При этом клетки прямоугольника покрашены в цвета соответствующих им вершин из $L_1(x)$. Введём одно дополнительное определение. *Минором* порядка 2 в прямоугольнике $\Pi_{w\times(n-w)}$ будем называть совокупность клеток, находящихся на пересечении двух различных строк и двух различных столбцов этого прямоугольника.

Утверждение 3. *Пусть $y \in L_2(x)$. Тогда клетки $\Pi_{w\times(n-w)}$, отвечающие совокупности всех вершин из $L_1(x)$, которые смежны с y, образуют минор порядка 2 в прямоугольнике $\Pi_{w\times(n-w)}$.*

Доказательство. Очевидно, что $y = (\mathrm{supp}(x) \setminus \{s,t\}) \cup \{m,l\}$ для некоторых $\{s,t\} \in \mathrm{supp}(x), \{m,l\} \in \{1,\dots,n\} \setminus \mathrm{supp}(x)$. Тогда вершины $(\mathrm{supp}(x) \setminus t) \cup m$, $(\mathrm{supp}(x) \setminus t) \cup l$, $(\mathrm{supp}(x) \setminus s) \cup m$ и $(\mathrm{supp}(x) \setminus s) \cup l$ являются совокупностью всех вершин из $L_1(x)$, смежных с y. Согласно соответствию между клетками $\Pi_{w\times(n-w)}$ и вершинами $L_1(x)$ получаем, что клетки, отвечающие этим вершинам, образуют минор порядка 2 в прямоугольнике $\Pi_{w\times(n-w)}$. Принимая во внимание утверждение 3, вершины из $L_2(x)$ будем интерпретировать как миноры порядка 2 в прямоугольнике $\Pi_{w\times(n-w)}$. При этом пара вершин в $L_2(x)$ смежна в том и только в том случае, когда соответствующие им миноры имеют ровно две общие клетки. Утверждение 3 доказано.

Доказательство всех следующих лемм проводится от противного. Для доказательства некоторых из них потребуется следующее

Утверждение 4 [11]. *Пусть дана совершенная 2-раскраска графа $J(n,w)$ с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Тогда в графе $J(n,w)$ имеется ровно $a_{21}/(a_{12}+a_{21})C_n^w$ белых вершин.*

Лемма 3. *Не существует совершенной раскраски $J(11,3)$ с матрицей*

$$\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Покажем, что множество всех белых клеток в $\Pi_{3\times 8}$ является совокупностью всех клеток некоторой строки. Предположим, что это не так. Тогда любая строка $\Pi_{3\times 8}$ содержит не более трёх белых клеток (иначе существует чёрная вершина из $L_1(x)$, смежная с пятью белыми клетками из $x \cup L_1(x)$, что противоречит тому, что параметр a_{21} рассматриваемой совершенной раскраски равен 4). Более того, так как белых клеток в $\Pi_{3\times 8}$ всего восемь, а у прямоугольника $\Pi_{3\times 8}$

три строки, то в $\Pi_{3\times 8}$ две строки содержат по три белые клетки и одна строка (скажем, первая) содержит две белые. Заметим, что существуют три столбца, которым принадлежат все белые клетки из строк с тремя белыми клетками. В противном случае три столбца, содержащие три белые клетки второй строки, содержат чёрную клетку из третьей строки. Так как вершина, соответствующая этой чёрной клетке, смежна с пятью белыми клетками из $x \cup L_1(x)$, получаем противоречие. Тогда в строке, которая содержит две белые клетки, найдётся чёрная клетка, принадлежащая этим трём столбцам. Вершина, соответствующая этой клетке, смежна с пятью белыми вершинами из $x \cup L_1(x)$, что противоречит тому, что параметр a_{21} рассматриваемой совершенной раскраски равен 4.

Итак, все белые клетки $\Pi_{3\times 8}$ состоят из клеток $\Pi_{3\times 8}$, принадлежащих одной строке. Исходя из соответствия между смежностью, заданной в прямоугольнике $\Pi_{3\times 8}$, и смежностью в графе, порождённом $L_1(x)$, совокупность белых вершин $L_1(x)$ и вершина x образуют клику размера 9. Так как $a_{11} = 8$, то других белых вершин, смежных с этой кликой, нет, и множество белых вершин графа $J(11, 3)$ разбивается на независимые клики размера 9. Следовательно, число белых вершин в графе $J(11, 3)$ кратно 9. Однако, согласно утверждению 4, имеем $|W| = 33$; противоречие. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Не существует совершенных раскрасок графа* $J(12, 4)$ *с матрицами*

$$\begin{pmatrix} 4 & 28 \\ 2 & 30 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 4 & 28 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть существует совершенная раскраска с матрицей (6). Тогда поскольку $a_{21} = 2$, то любая чёрная клетка прямоугольника $\Pi_{4\times 8}$ смежна не более чем с одной белой клеткой. Очевидно, что это возможно только тогда, когда все белые клетки прямоугольника $\Pi_{4\times 8}$ заполняют все клетки некоторого столбца прямоугольника $\Pi_{4\times 8}$. Отсюда следует, что белые вершины разбиваются на независимые клики размера 5. Следовательно, $|W|$ делится на 5, что противоречит утверждению 3, согласно которому имеем $|W| = 31$.

Пусть существует совершенная раскраска графа $J(12, 4)$ с матрицей параметров (7). Покажем, что в прямоугольнике $\Pi_{4\times 8}$ существуют два столбца и одна строка, состоящие из белых клеток, и других белых клеток в $\Pi_{4\times 8}$ нет. Пусть не существует строки, целиком состоящей из белых клеток. По принципу Дирихле существует строка, в которой не менее $\lceil a_{11}/4 \rceil = 4$ белых клеток и хотя бы одна чёрная клетка. Вершина, соответствующая любой чёрной клетке из этой строки, смежна с 5 белыми вершинами из $x \cup L_1(x)$, что противоречит тому, что параметр a_{21} рассматриваемой совершенной раскраски равен 4. Следовательно, в прямоугольнике $\Pi_{4\times 8}$ существует строка (скажем, с номером 1), целиком состоящая из белых клеток. Так как $a_{21} = 4$, то среди строк с номерами 2, 3 и 4 нет строки, содержащей более двух белых клеток, и, следовательно, каждая из этих строк содержит ровно по две белые клетки из шести оставшихся. Более того, все белые клетки строк 2, 3 и 4 содержатся в двух столбцах. В противном случае два столбца, содержащие две белые клетки второй строки, содержат чёрную клетку из третьей или четвёртой строки. Так как вершина, соответствующая этой чёрной клетке, смежна с пятью белыми клетками из $x \cup L_1$, получаем противоречие. Следовательно, в прямоугольнике $\Pi_{4\times 8}$ существуют два столбца (без ограничения общности, первый и второй) и одна строка, целиком состоящие из белых клеток, и других белых клеток нет. Тогда всякая чёрная вершина из $L_1(x)$ смежна с 4 белыми вершинами из $x \cup L_1(x)$. Следовательно, так как $a_{21} = 4$, то никакая чёрная вершина из $L_1(x)$ не смежна ни с одной белой из $L_2(x)$.

Рассмотрим белую клетку v прямоугольника $\Pi_{4\times 8}$, принадлежащую его 1-й строке (состоящей целиком из белых вершин), но не принадлежащую первым двум столбцам (которыми покрываются все белые клетки, не принадлежащие первой строке). Вершина, соответствующая v, смежна с 8 белыми вершинами из $L_1(x) \cup x$, следовательно, существует вершина y белого цвета из $L_2(x)$, смежная с z. По утверждению 3 совокупность всех клеток из $L_1(x)$, смежных с y, в прямоугольнике $\Pi_{4\times 8}$ образует минор порядка 2. Поэтому в одном столбце с клеткой v найдётся клетка, отличная от неё, которой соответствует вершина, смежная с y. Из доказаного выше следует, что эта вершина имеет чёрный цвет и смежна с пятью белыми вершинами из $x \cup L_1(x) \cup L_2(x)$; противоречие. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Не существует совершенной раскраски графа $J(12,5)$ с матрицей*

$$\begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 4 & 31 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Доказательство. Аналогично рассуждениям, приведённым выше в лемме 4 для совершенной раскраски $J(12,4)$ с матрицей параметров (7), доказывается, что совокупность белых клеток $\Pi_{5\times 7}$ состоит из всех клеток некоторых двух строк и некоторого столбца. Возьмём произвольную клетку v из столбца, состоящего из белых клеток, но не принадлежащего строкам, целиком состоящим из белых клеток. Аналогично лемме 4 показывается, что в строке, содержащей v, найдётся некоторая чёрная клетка такая, что соответствующая ей вершина из $L_1(x)$ смежна с белой вершиной из $L_2(x)$. Следовательно, в $L_1(x)$ существует чёрная вершина, смежная с пятью белыми вершинами, что противоречит тому, что параметр a_{21} рассматриваемой совершенной раскраски равен 4. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Не существует совершенной раскраски графа* $J(13,4)$ *с матрицей*

$$\begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 3 & 33 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как $a_{11} = 6$, то по принципу Дирихле среди четырёх строк прямоугольника $\Pi_{4\times 9}$ найдётся строка, в которой не менее двух белых клеток. Поскольку $a_{21} = 3$, строк, содержащих более двух белых клеток, в прямоугольнике $\Pi_{4\times 9}$ нет, и, следовательно, существуют две строки (без ограничения общности, строки с номерами 1 и 2) с двумя белыми клетками в каждой. Заметим, что белые клетки этих строк принадлежат двум столбцам (иначе найдётся чёрная вершина, смежная с четырьмя белыми вершинами из $x \cup L_1(x)$, что противоречит тому что параметр a_{21} рассматриваемой совершенной раскраски равен 3). Так как в $\Pi_{4\times 9}$ всего 6 белых клеток, то в одном из этих столбцов найдётся чёрная клетка из строк с номерами, не равными 1 и 2. Так как вершина, соответствующая этой клетке, смежна с четырьмя белыми вершинами из $x \cup L_1(x)$, получаем противоречие. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Не существует совершенной раскраски* $J(9,3)$ *с матрицей*

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Покажем, что в прямоугольнике $\Pi_{3\times 6}$ нет столбца, целиком состоящего из чёрных вершин. Предположим противное. Пусть первый столбец состоит из чёрных клеток. Обозначим через t_i количество белых вершин в i-й строке, $t_1+t_2+t_3 = a_{11} = 6$. Тогда вершина, отвечающая чёрной клетке, принадлежащей i-й строке и 1-му столбцу, смежна с $1 + t_i$ белыми вершинами из $x \cup L_1(x)$. Так как $a_{21} = 4$, то эта вершина смежна ровно с $3 - t_i$ белыми вершинами из $L_2(x)$. Рассмотрим совокупность рёбер графа $J(9,3)$, соединяющих вершины, отвечающие клеткам первого столбца (чёрного цвета), с белыми вершинами из $L_2(x)$. С одной стороны, из вышесказанного следует, что число этих рёбер равно $9 - t_1 - t_2 - t_3$. Так как $t_1 + t_2 + t_3 = 6$, то существуют ровно три таких ребра. С другой стороны, согласно утверждению 3 произвольная вершина из $L_2(x)$ либо смежна с двумя вершинами из первого столбца, либо не смежна с ними вовсе, поэтому число таких рёбер должно быть кратно двум; противоречие.

Следовательно, в прямоугольнике $\Pi_{3\times 6}$ все столбцы содержат хотя бы по одной белой клетке. Так как $a_{21} = 4$, то либо в каждой строке по две белые клетки, либо существует строка, состоящая целиком из белых клеток.

Пусть каждая строка $\Pi_{3\times 6}$ содержит по две белые клетки и каждый столбец содержит по одной белой клетке. Тогда любая чёрная вершина из $L_1(x)$ смежна с четырьмя белыми вершинами из $x \cup L_1(x)$ и, следовательно, не смежна ни с одной белой вершиной из $L_2(x)$. Пусть z — произвольная белая вершина из $L_1(x)$. Вершина z смежна с двумя белыми вершинами из $x \cup L_1(x)$ и, следовательно, смежна с четырьмя белыми вершинами из $L_2(x)$. По утверждению 3 любая из этих четырёх белых вершин из $L_2(x)$ смежна с вершиной, которой соответствует клетка в том же столбце, который содержит клетку, отвечающую вершине z. Так как эта вершина имеет чёрный цвет, получаем противоречие.

Следовательно, все белые клетки являются совокупностью всех клеток некоторой строки прямоугольника $\Pi_{3\times 6}$. Вершины, соответствующие этим клеткам, в совокупности с вершиной x образуют клику размера 7. Из утверждения 4 в графе $J(9,3)$ имеется $\frac{C_9^3}{7\cdot 4} = 3$ клики, состоящие из белых вершин. Причём в силу соответствия между вершинами $J(9,3)$ и клетками $\Pi_{3\times 6}$ каждая такая клика является совокупностью всех векторов $J(9,3)$, содержащих пару фиксированных единичных координат. Легко видеть, что двух независимых клик размера 7, обладающих таким свойством в $J(9,3)$, нет. Действительно, пусть K_1, K_2 — все векторы веса 3 длины 9, содержащие пары единичных координат $\{i,j\}$ и $\{m,l\}$ соответственно, $\{i,j\} \cap \{m,l\} = 0$. Тогда вершины $y \in K_1$, $z \in K_2$, $\mathrm{supp}(y) = \{i,j,l\}$, $\mathrm{supp}(z) = \{i,m,l\}$, являются смежными в графе $J(9,3)$. Следовательно, рассматриваемой совершенной раскраски не существует. Лемма 7 доказана.

Из лемм 3–7 вытекает

Теорема 4. *Не существует совершенных* 2*-раскрасок графов* $J(11,3)$,

$J(12,5)$, $J(13,4)$, $J(9,3)$ *с матрицами*

$$\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 4 & 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 3 & 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

соответственно. Кроме того, не существует совершенных раскрасок графа $J(12,4)$ *с матрицами* $\begin{pmatrix} 4 & 28 \\ 2 & 30 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 4 & 28 \end{pmatrix}$.

В заключение приведём матрицы, для которых открыт вопрос существования совершенных 2-раскрасок графов Джонсона $J(9,3)$ и $J(9,4)$: $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ соответственно. В силу того, что все матрицы параметров существующих совершенных 2-раскрасок графов $J(n,w)$ при n, не больших 8, уже описаны в [12], графы $J(9,3)$ и $J(9,4)$ являются графами с наименьшими параметрами, для которых проблема существования совершенных 2-раскрасок является нерешённой.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. В. Августиновичу за постановку задачи и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Могильных И. Ю.** О регулярности совершенных раскрасок графа Джонсона в два цвета // Пробл. передачи информ. — 2007. — Т. 43, № 4. — С. 37–44.
2. **Фон-дер-Флаас Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 924–931.
3. **Delsarte P.** An algebraic approach to the association schemes of coding theory // Philips Res. Rep. Suppl. — 1973. — Vol. 10. — P. 1–97.
4. **Etzion T., Schwarz M.** Perfect constant-weight codes // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2004. — Vol. 50, N 9. — P. 2156–2165.
5. **Etzion T.** Configuration distribution and designs of codes in the Johnson scheme // J. Combin. Designs. — 2007. — Vol. 15. — P. 15–34.
6. **Etzion T.** On the nonexistence of perfect codes in the Johnson scheme // SIAM J. Discr. Math. — 1996. — Vol. 9, N 2. — P. 201–209.
7. **Gordon M. D.** Perfect single error-correcting codes in the Johnson scheme // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2006. — Vol. 52, N 10. — P. 4670–4672.
8. **Martin W. J.** Completely regular designs of strength one // J. Alg. Combin. — 1994. — Vol. 3. — P. 17–185.
9. **Martin W. J.** Completely regular designs // J. Combin. Designs. — 1998. — Vol. 6, N 4. — P. 261–273.

10. **Meyerowitz A.** Cycle–balanced partitions in distance–regular graphs // Discr. Math. — 2003. — Vol. 264. — P. 149–165.
11. **Mogilnykh I. Yu., Avgustinovich S. V.** Perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(6,3)$ and $J(7,3)$ // Lect. Notes Comp. Sci. — 2008. — V. 5228. — P. 11–19.
12. **Mogilnykh I. Yu., Avgustinovich S. V.** Perfect colorings of Johnson graph in two colors // Proc. of XI Intern. symposium on problems of redundancy in information and control systems (Saint-Petersburg, Russia, July 2–6, 2007). — СПб.: ГУАП, 2007. — P. 205–209.
13. **Neumaier A.** Completely regular codes // Discrete Math. — 1992. — Vol. 106/107. — P. 353–360.

Могильных Иван Юрьевич,
e-mail: ivmog84@gmail.com

Статья поступила
15 мая 2009 г.