ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2009. Том 16, № 6. С. 3–11

УДК 519.172

АЦИКЛИЧЕСКАЯ 4-РАСКРАШИВАЕМОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАФОВ БЕЗ ЦИКЛОВ ДЛИНЫ 4 И 6 *)

О. В. Бородин

Аннотация. Известно, что всякий плоский граф ациклически 5-раскрашиваем (О. В. Бородин, 1976), причём эта оценка неулучшаема. Получен также ряд достаточных условий ациклической 4-раскрашиваемости. В частности, ациклическая 4-раскрашиваемость доказана для следующих плоских графов: не содержащих 3- и 4-циклов (О. В. Бородин, А. В. Косточка и Вудал, 1999), без циклов длины 4, 5 и 6 (Монтасьер, Распо и Ванг, 2006), без 4-, 6- и 7-циклов, а также без циклов длины 4, 6 и 8 (Чен, Распо и Ванг, 2009).

В данной работе доказано, что всякий плоский граф, не содержащий 4- и 6-циклов, ациклически 4-раскрашиваем.

Ключевые слова: плоский граф, ациклическая раскраска, предписанная ациклическая раскраска.

Введение

Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ множества вершин и рёбер графа G, а обхват графа G, т. е. длину минимального цикла в G, — через $g(G)$.

Отображение $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $f(x) \neq f(y)$, если вершины x и y смежны, назовём *правильной k-раскраской* графа G.

По теореме Грецша [9] каждый плоский граф без треугольников 3-раскрашиваем. В 1976 г. Стейнберг предположил, что каждый плоский граф без 4- и 5-циклов является 3-раскрашиваемым. Эта гипотеза остаётся неподтверждённой. Эрдёш [17] предложил следующее ослабление гипотезы Стейнберга: существует ли такая константа C, что отсутствие циклов длины от 4 до C в плоском графе гарантирует его 3-раскрашиваемость? Аббот и Жу [4] доказали, что такое C существует, причём $C \leqslant 11$. Наилучший результат в данном направлении, $C \leqslant 7$, получен О. В. Бородиным и др. [8].

Правильная вершинная раскраска графа называется *ациклической*, если на любом цикле встречается не менее трёх цветов [10]. Отметим,

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09–01–00244 и 08–01–00673).

что ациклическая раскраска оказалась полезной при получении результатов для других типов раскрасок [11, 12]. Улучшая предыдущие оценки 9, 8, 7 и 6, полученные соответственно Грюнбаумом [10], Митчемом [14], Альбертсоном и Берманом [5] и А. В. Косточкой [3], О. В. Бородин [1, 6] доказал гипотезу Грюнбаума об ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов. Эта оценка неулучшаема, и, более того, существуют даже двудольные 2-вырожденные плоские графы, не являющиеся ациклически 4-раскрашиваемыми (А. В. Косточка, Л. С. Мельников [13]). В связи с этим естественно рассматривать достаточные условия для ациклической 3- и 4-раскрашиваемости в духе гипотезы Стейнберга, задавая ограничения на длины циклов.

Получен также ряд достаточных условий ациклической 4- и 3-раскрашиваемости плоских графов. Через $a(G)$ обозначим то минимальное k, при котором граф G является ациклически k-раскрашиваемым. Бородин, Косточка и Вудал [7] доказали, что если G — плоский граф обхвата g, то $a(G) \leqslant 4$ при $g \geqslant 5$ и $a(G) \leqslant 3$ при $g \geqslant 7$. Отметим, что первый из этих результатов уже неулучшаем в терминах обхвата ввиду упомянутой выше конструкции Косточки и Мельникова [13]. Бородин [2] доказал, что $a(G) \leqslant 3$ при условии, что в G нет циклов длины от 4 до 12.

Монтасьер, Распо и Ванг [15] доказали оценку $a(G) \leqslant 4$ для любого плоского графа G без 4-, 5- и 6-циклов, а Чен, Распо и Ванг (частное сообщение) — при условии, что в G нет либо 4-, 6- и 7-циклов, либо нет циклов длины 4, 6 и 8.

В данной работе доказано следующее достаточное условие ациклической 4-раскрашиваемости плоских графов, перекрывающее результаты, перечисленные в предыдущем абзаце.

Теорема 1. *Всякий плоский граф, не содержащий 4- и 6-циклов, ациклически 4-раскрашиваем.*

Проблема 1. *Верно ли, что любой плоский граф, не содержащий 4-циклов, ациклически 4-раскрашиваем?*

1. Доказательство теоремы 1

Предположим, граф G — наименьший по числу вершин контрпример к теореме 1. Очевидно, что G связен и не содержит 1-вершин. Через $F(G)$, $d(v)$ и $r(f)$ обозначим множество граней G, степень вершины v и ранг грани f соответственно.

Из формулы Эйлера $|V(G)| - |E(G)| + |F(F)| = 2$, используя известные равенства $\sum\limits_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = \sum\limits_{f \in F(G)} r(f)$, получаем

$$\sum_{v\in V(G)}(2d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(r(f)-6)<0. \tag{1}$$

Полагаем *начальные заряды* каждой вершины $v \in V(G)$ и грани $f \in F(G)$ равными $\mathrm{ch}(v) = 2d(v) - 6$ и $\mathrm{ch}(f) = r(f) - 6$ соответственно. Заметим, что только 2-вершины, а также 3- и 5-грани имеют отрицательные начальные заряды, равные -2, -3 и -1 соответственно. Далее мы дадим правила перераспределения зарядов, приводящие к *финальному заряду* ch^* такому, что

$$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}^*(x)=\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)<0.$$

Затем, основываясь на структурных свойствах графа G, мы получим противоречие, доказав, что $\mathrm{ch}^*(x) \geqslant 0$ для каждого $x \in V(G) \cup F(G)$.

1.1. Структурные свойства минимального контрпримера

Вершина и ребро называются *треугольными*, если они инцидентны 3-грани. Вершина степени не менее k (не более k) есть k^+- (k^--)*вершина.* Аналогичные наименования используются для граней.

Ясно, что в G нет треугольных 2-вершин. Отметим, что 3-грань не может быть смежна с 3- или 5-гранью, поскольку в G нет ни 4-, ни 6-циклов. Число 3-граней, инцидентных вершине v, обозначим через $\tau(v)$; всегда $\tau(v) \leqslant \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$.

Треугольная 3-вершина, соединённая с вершиной v нетреугольным ребром, называется *плохим соседом* вершины v, а число плохих соседей вершины v равно $\beta(v)$. Через $\nu_k(v)$ обозначим число k-вершин, смежных с вершиной v.

Лемма 1. *В графе G у 3-вершин нет плохих соседей.*

Доказательство. Пусть x — плохой сосед вершины v. Обозначим соседние с v вершины по часовой стрелке через v_1, v_2, x, и пусть x лежит в 3-грани xyz, сориентированной также по часовой стрелке. Ввиду минимальности графа G, граф $G \setminus \{x\}$ имеет ациклическую 4-раскраску c. Без ограничения общности можно считать, что $c(y) = 1$, $c(z) = 2$.

Мы легко завершаем доказательство, если $c(v) \notin \{1, 2\}$, поэтому будем считать, что $c(v) = 1$ и что через вершины v и y в $G \setminus \{x\}$ проходят двуцветные $(1, 3)$- и $(1, 4)$-цепи. Также ввиду симметрии можно считать, что v_1 и v_2 окрашены в 3 и 4 соответственно. Поскольку нет $(2, 4)$-цепи между v_2 и z, можно положить $c(x) = 4$, $c(v) = 2$.

Доказательства лемм 2 и 3 можно найти в [7].

Лемма 2 [7]. *Если* $v \in V(G)$, *то*

(i) $\nu_2(v) = 0$ *при* $d(v) \leqslant 3$;

(ii) $\nu_2(v) \leqslant 1$ *при* $d(v) = 4$ *и* $\nu_2(v) \leqslant d(v) - 2$ *при* $d(v) \leqslant 9$;

(iii) *если* $d(v) = 5$ *и* $\nu_2(v) = 3$, *то 2-вершины встречаются в циклическом порядке вокруг* v *подряд, причём обе грани между последовательными 2-вершинами являются* 7^+*-гранями*;

(iv) *если* $d(v) = 5$, $\nu_2(v) = 2$ *и* $\nu_3(v) = 3$, *то* v *инцидентна по меньшей мере одной* 7^+*-грани*;

(v) *если* $d(v) = 5$ *и* $\nu_2(v) = 3$, *либо* $d(v) = 6$ *и* $\nu_2(v) = 4$, *то* $\nu_3(v) = 0$.

Под *слабой вершиной* понимается любая 3-вершина, а также такая 4-вершина v, что $\nu_2(v) = 1$ и $\nu_3(v) \geqslant 1$.

Лемма 3 [7]. *В графе* G *нет нетреугольной 3-вершины, смежной с более чем одной слабой вершиной.*

Лемма 4 [15]. *Если* v *— слабая 4-вершина в графе* G, *то* $\beta(v) = \tau(v) = 0$.

Идея следующей леммы возникла в [16].

Лемма 5. *В графе* G *слабая 4-вершина* v_4 *не может быть инцидентна такой 5-грани* $v_1 \ldots v_5$, *что* $d(v_3) = 3$, *а* $d(v_5) = 2$.

Лемма 6 [15]. *В графе* G *нет такой 5-вершины* v, *что* $\nu_2(v) = 3$ *и* $\tau(v) = 1$.

Лемма 7 [15]. *Если 3-грань* xyz *в графе* G *такая, что* $d(x) = d(y) = 3$, *то* $d(z) \geqslant 5$.

1.2. Завершение доказательства теоремы 1

Перераспределим заряды вершин и граней графа G следующим образом.

R0: Всякая 7^+-грань отдаёт заряд $\frac{1}{7}$ каждому инцидентному ребру xy. Затем эта $\frac{1}{7}$ отдаётся на соседнюю 3-грань, если ребро xy треугольное, а в противном случае:

(i) на y, если $d(x) = 2$ или x — нетреугольная 3-вершина, а $d(y) \geqslant 4$;

(ii) на 3-грань vwx, если x — треугольная 3-вершина;

(iii) на x и y по $\frac{1}{14}$, если $d(x) \geqslant 4$ и $d(y) \geqslant 4$.

R1: Пусть ребро xy инцидентно граням f_1 и f_2, причём $d(x) = 2$. Тогда x получает от y следующий заряд:

(i) $\frac{6}{5}$ при $r(f_1) = r(f_2) = 5$;
(ii) $\frac{11}{10}$ при $r(f_1) = 5$ и $r(f_2) \geqslant 7$;
(iii) 1 при $r(f_1) \geqslant 7$ и $r(f_2) \geqslant 7$.

R2: Пусть ребро xy инцидентно граням f_1 и f_2, причём x — нетреугольная 3-вершина, а вершина y не является слабой. Тогда x получает от y
(i) $\frac{3}{10}$ при $r(f_1) = r(f_2) = 5$;
(ii) $\frac{1}{5}$ при $r(f_1) = 5$ и $r(f_2) \geqslant 7$.

R3: Каждая 5-грань получает по $\frac{1}{5}$ от каждой инцидентной вершины.

R4: Если x — плохой сосед вершины v, то v даёт $\frac{1}{2}$ 3-грани xyz.

R5: Каждая 3-грань $f = uvw$ получает от 4^+-вершины v
(i) 1, если f инцидентна 3-вершине;
(ii) $\frac{6}{7}$ в противном случае.

Проверим теперь, что $\mathrm{ch}^*(x) \geqslant 0$ для всех $x \in V(G) \cup F(G)$.

Случай 1. $f \in F(G)$. Если $r(f) \geqslant 7$, то $\mathrm{ch}^*(f) = r(f) - 6 - \frac{r(f)}{7} \geqslant 0$ согласно R0. Если $r(f) = 5$, то $\mathrm{ch}^*(f) = 5 - 6 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$ по R3.

Пусть $f = xyz$, где $d(x) \leqslant d(y) \leqslant d(z)$. Тогда

$$\mathrm{ch}(f) = r(f) - 6 = -3.$$

Вспомним, что f получает $\frac{3}{7}$ от смежных граней согласно R0. Если $d(x) = d(y) = 3$, то $d(z) \geqslant 5$ ввиду леммы 7, откуда

$$\mathrm{ch}^*(f) = -3 + \frac{7}{7} + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$$

согласно правилам R4 и R5(i), поскольку и x, и y приводят к дополнительной передаче в $\frac{2}{7}$ на f от смежных 7^+-граней согласно R0(ii). Если $d(x) = 3$, а $d(y) \geqslant 4$, то, аналогично, $\mathrm{ch}^*(f) = -3 + \frac{5}{7} + \frac{1}{2} + 2 \times 1 > 0$. Наконец, если $d(x) \geqslant 4$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -3 + \frac{3}{7} + 3 \times \frac{6}{7} = 0$.

Случай 2. $v \in V(G)$. Вспомним, что v даёт $\frac{1}{5}$ каждой инцидентной 5-грани согласно R3.

Подслучай 2.1. $d(v) = 2$. Как уже отмечалось, v не инцидентна 3-грани. Если v инцидентна двум 5-граням, то

$$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) + 2 \times \frac{6}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = 0$$

согласно R1(i). Аналогично, если у v имеется не более одной инцидентной 5-грани, то $\mathrm{ch}^*(v) = 0$ ввиду правил R1(ii) и R1(iii).

Подслучай 2.2. $d(v)=3$. Если вершина v — треугольная, то v не делает передач по правилам R0–R5, т.е. $\mathrm{ch}^*(v)=\mathrm{ch}(v)=0$. Пусть v окружена гранями f_1, f_2 и f_3, где $5 \leqslant r(f_1) \leqslant r(f_2) \leqslant r(f_3)$. Вспомним, что v смежна по меньшей мере с двумя неслабыми вершинами ввиду леммы 3, и что каждая такая вершина даёт v либо $\frac{3}{10}$, либо $\frac{1}{5}$, либо 0 согласно правилу R2.

Если $r(f_1)>5$, то $\mathrm{ch}^*(v)=\mathrm{ch}(v)=0$. Если $r(f_1)=5<r(f_2)$, то

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant \frac{1}{5}-\frac{1}{5}=0$$

согласно R2(ii). Если $r(f_2)=5<r(f_3)$, то

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2\times\frac{1}{5}-2\times\frac{1}{5}=0$$

согласно R2(i) и R2(ii). Наконец, если $r(f_3)=5$, то

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2\times\frac{3}{10}-3\times\frac{1}{5}=0$$

ввиду R2(i).

Подслучай 2.3. $d(v)=4$. Теперь $\mathrm{ch}(v)=2$, а $\nu_2(v)\leqslant 1$ согласно лемме 2(ii).

(A) Вершина v нетреугольная. Предположим, что $\nu_2(v)=1$. Тогда ввиду леммы 4 имеем $\beta(v)=0$. Вспомним, что если $\nu_3(v)\geqslant 1$, то v является слабой, а значит, не делает передач на 3-вершины по правилу R2, откуда следует, что при любом $\nu_3(v)$ согласно R1 и R3 имеем

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2-\frac{6}{5}-4\times\frac{1}{5}=0.$$

Теперь предположим, что $\nu_2(v)=0$, и пусть $\varphi_5(v)$ — число 5-граней при v. Заметим, что $\varphi_5(v)\leqslant 4-\beta(v)$; отсюда следует, что

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2-\frac{\beta(v)}{2}-\frac{3(4-\beta(v))}{10}-\frac{\varphi_5(v)}{5} \geqslant 2-\frac{\beta(v)}{2}-\frac{4-\beta(v)}{2}=0$$

согласно R2–R4.

(B) Вершина v треугольная. Если $\tau(v)=2$, то $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 2-2\times 1=0$ согласно R5. Пусть $\tau(v)=1$; тогда $\varphi_5(v)\leqslant 1$.

Рассмотрим случай $\nu_2(v)=1$. Теперь $\nu_3(v)=0$ согласно лемме 4. Если $\varphi_5(v)=0$, то $\mathrm{ch}^*(v)=2-2\times 1=0$ по R5 и R1(iii). В противном случае лемма 5 утверждает, что v получает $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}$ по R0(i) и R0(iii) и

отдаёт $\frac{6}{7}$ инцидентной 3-грани согласно R5(ii). Кроме того, v даёт $\frac{1}{5}$ своей 5-грани и $\frac{11}{10}$ — соседней 2-вершине. Таким образом,

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2 + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} - \frac{6}{7} - \frac{1}{5} - \frac{11}{10} = 1 + \frac{5}{14} - 1 - \frac{3}{10} > 0.$$

Теперь допустим, что $\nu_2(v) = 0$. Если $\beta(v) \geqslant 1$, то v не инцидентна 5-граням, откуда следует, что $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2 - 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R2, R4 и R5; в противном случае $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2 - 1 - \frac{1}{5} - 2 \times \frac{3}{10} > 0$ по R2, R3 и R5.

В дальнейшем для сокращения перебора вариантов воспользуемся следующим приёмом.

Замечание 1. Чтобы оценить суммарный расход зарядов 5^+-вершины v по правилам R1–R5, представим себе, что каждая 3- и 5-грань $\ldots uvw \ldots$ делит получаемый ею заряд 1 или $\frac{1}{5}$, соответственно, поровну между вершинами u и w. Тогда каждая смежная 2-вершина получит от v не более $\frac{6}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{7}{5}$, а любая другая смежная вершина — не более $\frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2d(v) - 6 - \nu_2(v) \times \frac{7}{5} - (d(v) - \nu_2(v)) \times \frac{1}{2} = \rho(v).$$

Подслучай 2.4. $d(v) = 5$. Теперь $\mathrm{ch}(v) = 4$, а $\nu_2(v) \leqslant 3$ ввиду леммы 2(ii).

Сначала предположим, что $\nu_2(v) = 3$. Ввиду леммы 3 вершина v нетреугольная, а из леммы 2(iii, v) известно, что $\nu_3(v) = \beta(v) = 0$, смежные с v вершины степени 2 идут по циклу подряд, а одна из них окружена 7^+-гранями. Отсюда $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 4 - 1 - 2 \times \frac{11}{10} - 4 \times \frac{1}{5} = 0$ согласно R1 и R3.

Если $\nu_2(v) \leqslant 1$, то $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant \rho(v) > 0$, поэтому будем далее считать, что $\nu_2(v) = 2$. Теперь $\rho(v) = -\frac{3}{10}$, но возможно усилить нижнюю оценку $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant -\frac{3}{10}$, привлекая дополнительные соображения.

Если v смежна с 4^+-вершиной z по нетреугольному ребру, то фактическая изменённая передача от v на z не превосходит $2 \times \frac{1}{10}$, а это меньше $\frac{1}{2}$, включённой в формулу для вычисления $\rho(v)$, т. е. получаем $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant \rho(v) + \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{10} = 0$.

Далее, если вершина v треугольная или имеет плохого соседа, то существуют по меньшей мере две *стыковочные* 7^+-грани $\ldots uvw \ldots$ такие, что либо ребро vu треугольное, либо u — плохой сосед для v, тогда как w — либо 2-вершина, либо нетреугольная 3-вершина. Каждая стыковочная грань экономит $\frac{1}{10}$ на ребре vw, а также приносит $\frac{1}{7}$ вершине v по правилу R0(ii), откуда

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant \rho(v) + 2 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{10} = -\frac{3}{10} + \frac{2}{7} + \frac{1}{5} > 0.$$

Остаётся допустить, что $\nu_2(v) = 2$, $\nu_3(v) = 3$ и $\tau(v) = \beta(v) = 0$. Ввиду леммы 2(iv) при v имеется 7^+-грань, поэтому снова имеем

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant \rho(v) + 2 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{10} > 0.$$

Подслучай 2.5. $d(v) = 6$. Теперь $\mathrm{ch}(v) = 6$, а $\nu_2(v) \leqslant 4$ согласно лемме 2. При $\nu_2(v) = 4$ эта же лемма утверждает, что $\nu_3(v) = 0$. Если $\tau(v) = 1$, то $\varphi_5(v) \leqslant 3$, а значит, v получает $\frac{1}{7}$ от инцидентных 7^+-граней по правилу R0(ii) по меньшей мере дважды, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 6 - 1 - 2 \times \frac{11}{10} - 2 \times \frac{6}{5} - 3 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{7} > 0$. При $\tau(v) = 0$ имеем $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 6 - 4 \times \frac{6}{5} - 5 \times \frac{1}{5} > 0$.

Пусть $\nu_2(v) \leqslant 3$. Тогда $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 6 - 3 \times \frac{7}{5} - 3 \times \frac{1}{2} > 0$.

Подслучай 2.6. $7 \leqslant d(v) \leqslant 9$. Ввиду леммы 2 имеем $\nu_2(v) \leqslant d(v) - 2$. Согласно замечанию 1

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2d(v) - 6 - (d(v) - 2) \times \frac{7}{5} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}(d(v) - 7) \geqslant 0.$$

Подслучай 2.7. $d(v) \geqslant 10$. По замечанию 1

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2d(v) - 6 - d(v) \times \frac{7}{5} = \frac{3}{5}(d(v) - 10) \geqslant 0.$$

Итак, после перераспределения зарядов согласно правилам R0–R5 заряды всех вершин и граней графа G неотрицательны, что противоречит (1).

Автор благодарит университет Бордо-1 за приглашение на первую половину 2009 г. и лично Андре Распо за гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В.** Доказательство гипотезы Б. Грюнбаума об ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов // Докл. АН СССР. — 1976 — Т. 231. — С. 18–20.
2. **Бородин О. В.** Ациклическая предписанная 3-раскрашиваемость плоских графов, не содержащих циклов длины от 4 до 12 // Дискрет. анализ и иссл. операций. — 2009. — Т. 16, № 5. — С. 26–32.
3. **Косточка А. В.** Ациклическая 6-раскраска плоских графов // Методы дискрет. анализа. — 1976. — Вып. 28. — С. 40—56.
4. **Abbott H. L., Zhou B.** On small faces in 4-critical graphs // Ars Combinatoria. — 1991. — Vol. 32. — P. 203–207.
5. **Albertson M. O., Berman D.** Every planar graph has an acyclic 7-coloring // Israel J. Math. — 1977. — Vol. 28 — P. 169—177.
6. **Borodin O. V.** On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. — 1979. — Vol. 25. — P. 211–236.

7. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.** Acyclic colorings of planar graphs with large girth // J. London Math. Soc. — 1999. — Vol. 60. — P. 344–352.
8. **Borodin O. V., Glebov A. N., Raspaud A., Salavatipour M. R.** Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable // J. Combin. Theory. Ser. B. — 2005. — Vol. 93. — P. 303–311.
9. **Grötzsch H.** Ein Dreifarbenzatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel // Wiss. Z. Martin–Luther–Univ. Halle–Wittenberg Math.–Natur. Reihe 8. — 1959. — S. 109–120.
10. **Grünbaum B.** Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. — 1973. — Vol. 14, N 3. — P. 390–408.
11. **Hell P., Nešetřil J.** Graphs and homomorphisms // Oxford Lect. Ser. Math. Appl. — Vol. 28. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. — 244 p.
12. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. New York: Wiley Interscience, 1995. — 245 p.
13. **Kostochka A. V., Mel'nikov L. S.** Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings // Discrete Math. — 1976. — Vol. 14. — P. 403–406.
14. **Mitchem J.** Every planar graph has an acyclic 8-coloring // Duke Math. J. — 1974. — Vol. 14. — P. 177—181.
15. **Montassier M., Raspaud A., Wang W.** Acyclic 4-choosability of planar graphs without cycles of specific lengths // Topics in discrete mathematics. Algorithms Combin. — Vol. 26. Berlin: Springer-Verl., 2006. — P. 473–491.
16. **Montassier M., Raspaud A., Wang W.** Acyclic 5-choosability of planar graphs without small cycles // J. Graph Theory. —2007. — Vol. 54. — P. 245–260.
17. **Steinberg R.** The state of the three color problem / Quo Vadis, Graph Theory? // Ann. Discrete Math. —1993. — Vol. 55. — P. 211–248.

Бородин Олег Вениаминович,
e-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

Статья поступила
13 мая 2009 г.
Переработанный вариант —
17 июня 2009 г.