ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2009. Том 16, № 6. С. 12–22

УДК 519.718

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМАХ В БАЗИСЕ $\{\&, \neg\}$ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. В. Васин

Аннотация. Рассматривается задача синтеза асимптотически оптимальных схем, реализующих булевы функции, при инверсных неисправностях на выходах элементов в базисе $\{\&, \neg\}$. Доказано, что почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надёжности схемами, которые функционируют с ненадёжностью, асимптотически равной 5ε при $\varepsilon \to 0$, где ε — вероятность инверсной неисправности на выходе базисного элемента.

Ключевые слова: ненадёжный элемент, инверсная неисправность на выходах элементов, асимптотически оптимальная по надёжности схема, синтез схем.

Схемой из функциональных элементов в базисе B будем называть ациклический упорядоченный орграф, в котором

каждому истоку (полюсу) приписана некоторая переменная, причём разным истокам приписаны разные переменные (истоки при этом называются *входами схемы*, а приписанные им переменные — *входными переменными*);

каждой вершине, в которую входят $k \geqslant 1$ дуг, приписана булева функция из базиса B, существенно зависящая от k переменных (вершина с приписанной функцией при этом называется *функциональным элементом*);

некоторые вершины выделены как *выходы* (истоки одновременно могут являться выходами).

Глубиной схемы будем называть длину максимального пути в ней. *Глубиной функционального элемента* схемы будем называть длину максимального пути между ним и выходным элементом схемы.

Слоем глубины k (или *k-м слоем*) назовём множество всех функциональных элементов схемы глубины k.

Далее будем предполагать, что $B = \{\&, \neg\}$ и элементы базиса подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию e, а в неисправном — функцию $\overline{e}$. Предполагается, что все элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0; 1/2)$.

Будем считать, что схема из ненадёжных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы набора $\widetilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на её выходе появляется значение $f(\widetilde{a})$.

Обозначим через $P_{\overline{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\widetilde{a}$ схемы S, реализующей функцию f. Число $P(S) = \max\limits_{\widetilde{a}} P_{\overline{f}(\widetilde{a})}(S, \widetilde{a})$ назовём *ненадёжностью схемы* S. *Надёжность схемы* S равна $1 - P(S)$.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf\limits_S P(S)$, где ε — вероятность инверсной неисправности на выходе функционального элемента, а инфимум берётся по всем схемам S из ненадёжных элементов, реализующим функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Схема A из ненадёжных элементов, реализующая функцию f, называется *асимптотически оптимальной* по надёжности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon(f)/P(A) = 1$.

С. И. Аксёновым [1] получена верхняя оценка ненадёжности схем в произвольном полном конечном базисе при инверсных неисправностях на выходах элементов. Он доказал, что при $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 < 1/2$, любую булеву функцию можно реализовать такой схемой S, что

$$P(S) \leqslant 5\varepsilon + c\varepsilon^2, \tag{1}$$

где константы c, ε_0 положительны и зависят от базиса.

Это утверждение верно и в базисе $\{\&, \neg\}$. В [3] явно найдены константы c, ε_0 и доказана

Теорема 1. *При* $\varepsilon \in [0, 1/240]$ *любую булеву функцию* f *в базисе* $\{\&, \neg\}$ *можно реализовать схемой* S *с ненадёжностью*

$$P(S) \leqslant 5\varepsilon + 99\varepsilon^2.$$

Вопрос о возможности понижения константы 5 в оценке ненадёжности до сих пор оставался открытым. В этой статье доказано, что для почти всех булевых функций константа 5 неулучшаема (теорема 4). Таким образом, асимптотически оптимальные по надёжности схемы в рассматриваемом базисе для почти всех булевых функций имеют ненадёжность 5ε

при $\varepsilon \to 0$. Для доказательства теоремы 4 нам потребуются некоторые утверждения.

Теорема 2 [2]. *Пусть f — произвольная булева функция, отличная от константы, S — любая схема, её реализующая. Пусть подсхема C схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию h с ненадёжностью $P(C) \leqslant 1/2$. Обозначим через $p_{11}, \dots, p_{1k}$ всевозможные различные вероятности ошибок на выходе схемы C при нулевых входных наборах $\widetilde{b}$, т. е. $h(\widetilde{b}) = 0$. Аналогично, пусть $p_{01}, \dots, p_{0m}$ — всевозможные различные вероятности ошибок на выходе схемы C при единичных входных наборах $\widetilde{b}$, т. е. $h(\widetilde{b}) = 1$. Полагаем $p^1 = \min\{p_{11}, \dots, p_{1k}\}$, $p^0 = \min\{p_{01}, \dots, p_{0m}\}$. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам $P_1(S, \widetilde{a}) \geqslant p^1$, если $f(\widetilde{a}) = 0$; $P_0(S, \widetilde{a}) \geqslant p^0$, если $f(\widetilde{a}) = 1$.*

Следствие 1 [2]. *$P(S) \geqslant p^i, i = 0, 1$.*

Пусть в схеме, реализующей булеву функцию, отличную от константы, выделена подсхема A, имеющая один вход и содержащая выход схемы. Обозначим через S' подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы A. Если выполнено неравенство $P(S) > P(S')$, то будем говорить, что схема S' *надёжнее* схемы S и получается из S удалением подсхемы A.

Так как схема S реализует функцию, отличную от константы, схема A реализует либо тождественную функцию, либо инверсию.

Схема S, реализующая функцию f, отличную от константы, является *bc-схемой*, если из неё нельзя получить более надёжную схему, реализующую f или $\overline{f}$, удалением подсхемы, реализующей тождественную функцию или инверсию.

Теорема 3 [3, 4]. *Пусть схема S, ненадёжность которой равна $P(S)$, реализует функцию f и является bc-схемой. Если в схеме S можно выделить подсхему, имеющую один вход, содержащую выход схемы и реализующую инверсию или тождественную функцию с вероятностями ошибок p_0 и p_1 такими, что $0 < p_0 + p_1 < 1$, то верно неравенство*

$$\min\left\{\frac{p_0}{p_0 + p_1}, \frac{p_1}{p_0 + p_1}\right\} \leqslant P(S).$$

Обозначим через $K(n)$ множество булевых функций f, зависящих от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, не представимых в виде $(x_i^a \& g(\widetilde{x}))^b$ $(i = 1, 2, \dots, n,\ a, b \in \{0, 1\})$.

Заметим, что константы $0, 1$ не принадлежат $K(n)$ и в базисе $\{\&, \neg\}$ любая схема S, реализующая функцию $f(\widetilde{x}) \in K(n)$, содержит не менее пяти элементов.

Утверждение 1. *Пусть функция* $f(x, y) = \min\{x/(x+y), y/(x+y)\}$ *задана в квадрате* $D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b,\ 0 < a < b\}$. *Тогда*

$$\max_D f(x, y) = 1/2, \quad \min_D f(x, y) = a/(a+b).$$

Доказательство. Функцию $f(x, y)$ в области D можно представить в виде

$$f(x, y) = \begin{cases} x/(x+y) \text{ при } x \leqslant y, \\ y/(x+y) \text{ при } x > y. \end{cases}$$

Найдём наибольшее и наименьшее значения для функции $h(x, y) = x/(x+y)$, $x \leqslant y$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$, $0 < a < b$.

Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2} = 0,$$
$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = \frac{-x}{(x+y)^2} = 0.$$

Эта система не имеет решения, так как $x, y > 0$. Следовательно, стационарных точек нет, максимальное и минимальное значения достигаются на границе области.

Если $x = a$, $a \leqslant y \leqslant b$, $0 < a < b$, то $h(a, y) = a/(a+y)$ — гипербола, монотонно убывающая на отрезке $a \leqslant y \leqslant b$, поэтому

$$\min_{a \leqslant y \leqslant b} h(a, y) = h(a, b) = \frac{a}{a+b}, \quad \max_{a \leqslant y \leqslant b} h(a, y) = h(a, a) = \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}.$$

Если $y = b$, $a \leqslant x \leqslant b$, $0 < a < b$, то

$$h(x, b) = x/(x+b) = 1 - b/(x+b)$$

— гипербола, монотонно возрастающая на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, следовательно,

$$\min_{a \leqslant x \leqslant b} h(x, b) = h(a, b) = \frac{a}{a+b}, \quad \max_{a \leqslant y \leqslant b} h(x, b) = h(b, b) = \frac{b}{b+b} = \frac{1}{2}.$$

Если $y = x$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$, $0 < a < b$, то $h(x, x) = x/(x+x) = 1/2$ и

$$\min_{a \leqslant x \leqslant b} h(x, x) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} h(x, x) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что функции $x/(x+y)$ и $y/(x+y)$ симметричны относительно прямой $y=x$, поэтому $\min\limits_D f(x,y) = a/(a+b)$, $\max\limits_D f(x,y) = 1/2$. Утверждение 1 доказано.

Лемма 1. *Если в схеме S, реализующей булеву функцию $f \in K(n)$ с ненадёжностью $P(S) \leqslant 5\varepsilon + 99\varepsilon^2$, $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{240}\right]$, можно выделить связную подсхему A с ненадёжностью $P(A) \leqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, состоящую хотя бы из одного элемента, имеющую один вход и содержащую выход схемы, то схема S не является bc-схемой.*

Доказательство от противного. Пусть схема S является bc-схемой и A — связная подсхема схемы S, состоящая хотя бы из одного элемента, имеющая один вход и содержащая выход схемы S.

По условию ненадёжность схемы A удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon \leqslant P(A) \leqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4.$$

Следовательно, по определению ненадёжности вероятности ошибок p_0 и p_1 для схемы A также удовлетворяют этому неравенству. Тогда из утверждения 1 следует, что

$$\frac{1}{6} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4} \leqslant \min\left\{\frac{p_0}{p_0+p_1}, \frac{p_1}{p_0+p_1}\right\}.$$

С другой стороны, по теореме 3 верно неравенство

$$\min\left\{\frac{p_0}{p_0+p_1}, \frac{p_1}{p_0+p_1}\right\} \leqslant P(S).$$

Таким образом, $\frac{1}{6} < \min\left\{\frac{p_0}{p_0+p_1}, \frac{p_1}{p_0+p_1}\right\} \leqslant P(S) \leqslant 5\varepsilon + 99\varepsilon^2$, т. е. $\frac{1}{6} < 5\varepsilon + 99\varepsilon^2$, что неверно при $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{240}\right]$. Лемма 1 доказана.

Теорема 4. *Пусть $\varepsilon \in (0, 1/240]$, $f(\widetilde{x}) \in K(n)$ и S — любая схема, реализующая функцию f. Тогда $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$.*

Доказательство. Пусть S — произвольная схема, реализующая функцию $f(\widetilde{x}) \in K(n)$. Без ограничения общности схему S можно считать bc-схемой.

Пусть A — связная подсхема схемы S, состоящая хотя бы из одного элемента и содержащая выход схемы. Обозначим через $p_{11}, \ldots, p_{1k}$ всевозможные различные вероятности ошибок на выходе схемы A при нулевых входных наборах $\widetilde{b}$. Аналогично, пусть $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ — всевозможные

различные вероятности ошибок на выходе схемы A при единичных входных наборах $\widetilde{b}$. Полагаем $p^1 = \min\{p_{11}, \ldots, p_{1k}\}$, $p^0 = \min\{p_{01}, \ldots, p_{0m}\}$.

Оценим ненадёжность схемы S.

1. Если подсхема A имеет один вход, то A реализует тождественную функцию или инверсию (так как $f(\widetilde{x}) \in K(n)$ и $0, 1 \notin K(n)$). Возможны два случая.

1.1. Ненадёжность схемы A удовлетворяет неравенству

$$P(A) > 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4.$$

Тогда этому неравенству удовлетворяет хотя бы одно из чисел p^0, p^1, и $P(S) > 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ по следствию 1.

1.2. Ненадёжность схемы A удовлетворяет неравенству

$$P(A) \leqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4;$$

противоречие лемме 1.

2. Если в схеме S нельзя выделить подсхему A, имеющую ровно один вход и содержащую выход схемы, то выделим связную подсхему C схемы S из 5 элементов, содержащую выход схемы S (это возможно сделать, так как $f(\widetilde{x}) \in K(n)$). В этом случае выходной элемент E_1 — конъюнктор.

2.1. Пусть в схеме C элемент E_1 размещён на 0-м, E_2 и E_3 — на 1-м, E_4 и E_5 — на 2-м слое и удалением истоков (входных вершин) и некоторых рёбер из схемы C можно получить граф, изображённый на рис. 1.

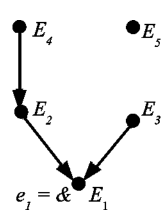

Рис. 1

Выходы элементов E_4 и E_5 могут быть соединены только с входами элементов E_2 и E_3. Для каждой из возможных схем этого типа ошибка в точности одного элемента на единичном наборе $\widetilde{\sigma}$ приводит к появлению нуля на выходе схемы C. Значит, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ по следствию 1.

2.2. Пусть в схеме C элемент E_1 размещён на 0-м, E_2 и E_3 — на 1-м, E_4 — на 2-м, E_5 — на 3-м слое и удалением истоков (входных вершин)

и некоторых рёбер из схемы C можно получить граф, изображённый на рис. 2.

2.2.1. Пусть элемент E_2 — конъюнктор (рис. 2). Тогда на единичном наборе при ошибке в одном элементе на выходе схемы C появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и по следствию 1 верно $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$.

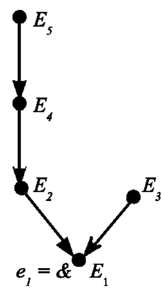

Рис. 2

2.2.2. Пусть элемент E_2 — инвертор (см. рис. 2). Так как схема S реализует функцию $f(\widetilde{x}) \in K(n)$, то ни один вход элемента E_3 не может быть соединён со входом схемы S (иначе $f(\widetilde{x}) \notin K(n)$). Возможны следующие случаи.

2.2.2.1. Один вход элемента E_3 соединён с выходом элемента E_4. Заметим, что элементы E_2 и E_3 — конъюнкторы (иначе $f(\widetilde{x}) \notin K(n)$). В этом случае на единичном наборе при ошибке одного элемента на выходе схемы C появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и по следствию 1 верно $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$.

2.2.2.2. Один вход элемента E_3 соединён с выходом элемента E_5. Тогда на единичном наборе при ошибке одного элемента на выходе схемы C появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ по следствию 1.

2.2.2.3. Ни один вход элемента E_3 не соединён с элементами схемы А. Тогда в схеме S существует элемент E_6, выход которого соединён со входом элемента E_3. Следовательно, в схеме S можно выделить подсхему C' из элементов E_1, E_2, E_3, E_4 и E_6. Схема C' удовлетворяет случаю 2.1.

2.3. Пусть в схеме C элемент E_1 размещён на 0-м, E_2 — на 1-м, E_3 и E_4 — на 2-м, E_5 — на 3-м слое и удалением истоков (входных вершин) и некоторых рёбер из схемы C можно получить граф, изображённый на рис. 3.

Для каждой схемы данного типа ошибка одного элемента на единичном наборе приводит к появлению нуля на выходе схемы C. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и по следствию 1 верно $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$.

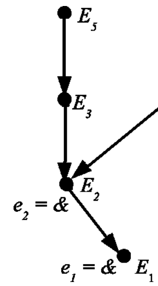

Рис. 3

2.4. Пусть в схеме C элемент E_1 размещён на 0-м, E_2 — на 1-м, E_3 — на 2-м, E_4, E_5 — на 3-м слое и удалением истоков (входных вершин) и некоторых из схемы C рёбер можно получить граф, изображённый на рис. 4.

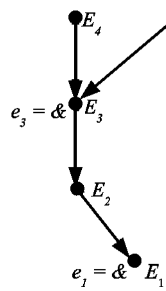

Рис. 4

2.4.1. Пусть элемент E_2 — конъюнктор (рис. 4). Тогда на единичном наборе при ошибке одного элемента на выходе схемы C появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ по следствию 1.

2.4.2. Пусть элемент E_2 — инвертор (см. рис. 4). Так как схема S реализует функцию $f(\widetilde{x}) \in K(n)$, то ни один вход элемента E_1 не может быть соединён с полюсом схемы S (иначе $f(\widetilde{x}) \notin K(n)$). Возможны следующие случаи.

2.4.2.1. Один вход элемента E_1 соединён с выходом элемента E_3. Тогда на единичном наборе при ошибке одного любого элемента на выходе схемы C появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и по следствию 1 верно $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$.

2.4.2.2. Один вход элемента E_1 соединён с выходом элемента $E_4(E_5)$. Тогда в схеме S существует элемент E_6, выход которого соединён со входом элемента $E_4(E_5)$. Следовательно, в схеме S можно выделить подсхему C' из элементов E_1, E_2, E_3, $E_4(E_5)$ и E_6. При ошибке одного элемента

на единичном наборе на выходе схемы C' появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ по следствию 1.

2.4.2.3. Ни один вход элемента E_1 не соединён с элементами схемы C. Тогда в схеме S существует элемент E_6, выход которого соединён со входом элемента E_1. Тогда в схеме S можно выделить подсхему C' (см. рис. 4), для которой утверждение теоремы верно.

2.5. Пусть в схеме C элемент E_1 размещён на 0-м, E_2 — на 1-м, E_3 — на 2-м, E_4 — на 3-м, E_5 — на 4-м слое и удалением истоков (входных вершин) и некоторых рёбер из схемы C можно получить граф, изображённый на рис. 5*а*.

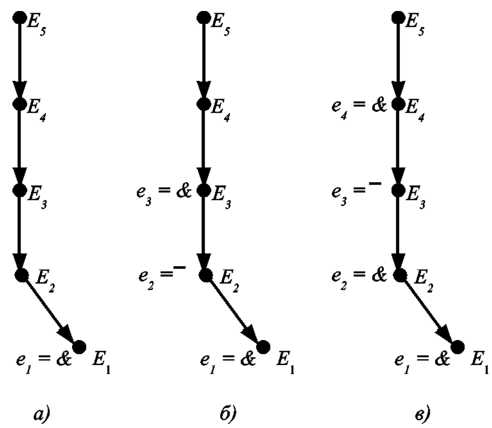

Рис. 5

Во всех схемах, за исключением случаев, изображённых на рис. 5*б, в*, ошибка одного элемента в схеме C приводит к появлению нуля на выходе элемента. Следовательно, в этих случаях $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и по следствию 1 верно $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$. Рассмотрим варианты схем, попадающих в случаи на рис. 5*б, в*.

2.5.1. Для схем C (рис. 5*б*) элемент E_1 не может быть соединён со входом схемы S (иначе $f(\widetilde{x}) \notin K(n)$). Возможны следующие варианты.

2.5.1.1. Один вход элемента E_1 соединён с выходом одного элемента E_3 или E_4. Тогда на единичном наборе при ошибке одного элемента на выходе схемы C появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и по следствию 1 верно $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$.

2.5.1.2. Один вход элемента E_1 соединён с выходом элемента E_5. Тогда в схеме S существует элемент E_6, выход которого соединён со входом элемента E$_5$. Следовательно, в схеме S можно выделить подсхему C' из элементов E_1, E_2, E_3, E_5 и E_6. При ошибке одного элемента на

единичном наборе на выходе схемы C' появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ по следствию 1.

2.5.1.3. Ни один вход элемента E_1 не соединён с другими элементами схемы C. Тогда в схеме S существует элемент E_6, выход которого соединён со входом элемента E_1. Тогда в схеме S можно выделить подсхему C' (см. рис. 2).

2.5.2. Для схем C (рис. 5*в*) элемент E_2 не может быть соединён с полюсом схемы S (иначе $f(\widetilde{x}) \notin K(n)$). Возможны следующие варианты.

2.5.2.1. Один вход элемента E_2 соединён с выходом одного элемента E_4 или E_5. Тогда на единичном наборе при ошибке одного элемента на выходе схемы C появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и по следствию 1 верно $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$.

2.5.2.2. Ни один вход элемента E_2 не соединён с элементами схемы C. Тогда в схеме S существует элемент E_6, выход которого соединён со входом элемента E_1, и в схеме S можно выделить подсхему C' (см. рис. 3).

2.5.2.3. Один вход элемента E_2 соединён с выходом элемента E_3, а свободный вход элемента E_1 соединён с выходом элемента E_4 или E_5. Тогда на единичном наборе при ошибке одного элемента на выходе схемы C появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ по следствию 1.

2.5.2.4. Один вход элемента E_2 соединён с выходом элемента E_3, а свободный вход элемента E_1 не соединён с другими элементами схемы C. Тогда в схеме S существует элемент E_6, выход которого соединён с входом элемента E_1. Следовательно, в схеме S можно выделить подсхему C' из элементов E_1, E_2, E_3, E_4 и E_6. При ошибке одного элемента на единичном наборе на выходе схемы C' появится нуль. Следовательно, $p^0 \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$, и по следствию 1 верно $P(S) \geqslant 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что при $\varepsilon \in (0, 1/240]$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 3 и реализующая булеву функцию $f(\widetilde{x}) \in K(n)$, является асимптотически оптимальной по надёжности и функционирует с ненадёжностью, асимптотически равной 5ε при $\varepsilon \to 0$.

Также из теоремы 4 следует, что оценка (1), полученная С. И. Аксёновым [1] для произвольного конечного полного базиса B, не может быть снижена в общем случае, так как в базисе $\{\&, \neg\}$ асимптотически оптимальные по надёжности схемы функционируют с ненадёжностью, равной 5ε при $\varepsilon \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аксенов С. И.** О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. вузов. Поволжский регион. Естественные науки. — 2005. — № 6(21). — С. 42–55.
2. **Алехина М. А.** Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов. — Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006. — 184 с.
3. **Алехина М. А., Шилов А. В.** Верхние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. вузов. Поволжский регион. Естественные науки. — 2006. — № 5(26). — С. 4–12.
4. **Чугунова В. В.** Синтез асимптотически оптимальных по надёжности схем при инверсных неисправностях на входах элементов // Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Пенза: Пензенский гос. ун-т, 2007. — 110 с.

Васин Алексей Валерьевич,
e-mail: alvarvasin@mail.ru

Статья поступила
25 июня 2009 г.
Переработанный вариант —
19 октября 2009 г.