ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2009. Том 16, № 6. С. 23–42

УДК 519.865

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ВИДА ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ ПРИ НАЛИЧИИ ОТТОКА И ПРИТОКА КАПИТАЛА В БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ (B, S)-РЫНКА ЦЕННЫХ БУМАГ

Н. С. Дёмин, А. В. Ерлыкова, Е. А. Паньшина

Аннотация. Рассматривается задача нахождения стоимостей опционов, портфелей (хеджирующих стратегий) и капиталов для одного вида экзотических опционов европейского типа купли и продажи в биномиальной модели (B, S)-рынка ценных бумаг в случае притока и оттока капитала на основе комбинаторного метода. Исследуются свойства решения.

Ключевые слова: финансовый рынок, опцион, капитал, портфель, хеджирование.

Введение

Опционы, как производные (вторичные) ценные бумаги, играют существенную роль в теории и практике современного финансового рынка. К настоящему времени достаточно хорошо развита теория стандартных опционов европейского типа, платёжные обязательства по которым (платёжные функции) характеризуются фиксированной датой исполнения, ценой базисного (рискового) актива (спотовая цена) и ценой купли или продажи базисного актива (страйковая цена) в момент исполнения опциона [2, 7–10]. Поскольку выплаты по стандартным опционам могут быть достаточно большими, что представляет существенный риск для инвестора, то встаёт проблема их ограничения, для решения которой имеется два основных подхода. При первом подходе, определяемом как несовершенное хеджирование, осуществляются хеджирование в среднеквадратическом [4, 12] и с заданной вероятностью (квантильное хеджирование) [6, 11]. В первом случае минимизируется среднеквадратическое отклонение терминального значения капитала от значения платёжной функции, а во втором случае платёжное обязательство удовлетворяется

с вероятностью, меньшей единицы. Второй подход заключается во внесении дополнительных условий в платёжное обязательство, а опционы, соответствующие подобным обязательствам, получили название экзотических опционов [3, 13, 14]. В достаточно подробном обзоре [3] отмечается, что хотя экзотические опционы имеют широкое хождение на финансовых рынках, их теория является малоразработанной, и контракты по ним заключаются на основе опыта работы брокеров и эвристических соображений, в основе которых лежат классические формулы Блэка — Шоулса [9] и Кокса — Росса — Рубинштейна [10].

В данной статье для биномиальной модели (B, S)-рынка [5, 8, 10] в случае возможного притока и оттока капитала на основе комбинаторного подхода [1, 5] проводится исследование одного вида экзотических опционов купли и продажи европейского типа, когда выплаты по опционам ограничиваются заданной величиной. В разд. 1 приводится постановка задачи, в разд. 2 — некоторые общие результаты, необходимые для исследования задачи. В разд. 3 и 4 осуществляется вывод теоретических формул для стоимостей опционов, портфелей (хеджирующих стратегий) и капиталов для опционов купли и продажи и устанавливается связь с соответствующими результатами для стандартных опционов. В разд. 5 проводится анализ результатов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим финансовый (B, S)-рынок, на котором обращаются ценные бумаги двух видов: безрисковые (банковский счёт) и рисковые (акции). Пусть $\{B_0, B_1, \ldots, B_N\}$ и $\{S_0, S_1, \ldots, S_N\}$ — эволюции цен безрискового и рискового активов соответственно в промежутке времени $[0, N]$, имеющих в биномиальной модели представления в виде [5, 7, 8, 10]

$$B_{n+1} = \rho B_n,\ S_{n+1} = \xi_{n+1} S_n,\ n = \overline{0; N-1},\ B_0 > 0,\ S_0 > 0,$$

где $\rho > 1$ — некоторая постоянная, а величины ξ_n могут принимать только два значения u и d. Очевидно, что если $\rho = 1 + r,\ r > 0$, то r — постоянная процентная ставка. Пусть $u > 1$ — сдвиг цены акции вверх от текущей цены, а $d,\ 0 < d < 1$, — сдвиг вниз. Будем предполагать для предотвращения арбитража [8], т. е. для получения прибыли без риска, что $d < \rho < u$. Сценарий игры на финансовом рынке заключается в следующем. Обладая капиталом X_n в момент времени n, инвестор может им управлять, распределяя его между ценными бумагами указанных типов. Пусть β_n и γ_n — количество (доля) безрисковых активов и акций

соответственно, суммарная стоимость которых (капитал) равна

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

Предполагается, что возможен отток (например, налоги, операционные издержки, накладные расходы) и приток (например, дивиденды от акций) капитала, что характеризуется последовательностью g_n $(g_0 = 0)$. При этом если $g_n > 0$, то имеется отток, а если $g_n < 0$, то имеется приток капитала. Преобразование портфеля $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ в $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$ происходит с учётом значения g_{n+1}, т. е. β_{n+1} и γ_{n+1} должны быть такими, что

$$X_n - g_{n+1} = \beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n. \tag{1}$$

Предполагается, что последовательность g_n пропорциональна рисковой составляющей капитала с коэффициентом c, т. е. $g_{n+1} = c\gamma_{n+1} S_n$. В следующий момент времени $n+1$ за счёт изменения цен активов цена этого портфеля становится равной

$$X_{n+1} = \beta_{n+1} B_{n+1} + \gamma_{n+1} S_{n+1}. \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что условие самофинансируемости портфеля в стандартной задаче $\Delta\beta_{n+1} B_n + \Delta\gamma_{n+1} S_n = 0$ [8] заменяется на балансовое соотношение $\Delta\beta_{n+1} B_n + \Delta\gamma_{n+1} S_n + g_{n+1} = 0$, где $\Delta\beta_{n+1} = \beta_{n+1} - \beta_n$, $\Delta\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1} - \gamma_n$.

Далее процесс формирования капитала повторяется аналогичным образом. Целью игры на финансовом рынке является достижение неравенства $X_N \geqslant f(S_N)$, где N — дата исполнения опциона, а $f(\cdot) \geqslant 0$ — функция выплат. Инвестор (владелец портфеля), являющийся продавцом опциона, взимая за него определённую плату в начальный момент времени, в момент предъявления опциона к исполнению N обязуется выплатить сумму, не меньшую $f(\cdot)$. Чтобы обеспечить эту выплату, он должен играть на рынке, меняя содержание портфеля в зависимости от эволюции цен B_n, S_n и значения g_n. При этом *справедливой ценой* опциона называется минимальный начальный капитал X_0, который позволяет продавцу опциона добиться равенства

$$X_N = f(S_N), \tag{3}$$

если он следует оптимальной стратегии игры.

В случае стандартных опционов купли и продажи с платёжными функциями $\widetilde{f^C}(S_N) = (S_N - K)^+ = \max\{0, S_N - K\}$ и $\widetilde{f^P}(S_N) = (K - S_N)^+ = \max\{0, K - S_N\}$ соответственно, где S_N — стоимость рискового

актива в момент исполнения опциона N (спотовая цена), K — согласованная цена исполнения (страйковая цена), выплаты по опционам могут быть достаточно большими, что представляет существенный риск для инвестора. Одним из способов ограничения этого риска является решение задачи относительно платёжных функций, которые предусматривают выплаты, не превышающие заданной величины K_2, т. е. относительно функций для опционов купли $f^C(S)$ и продажи $f^P(S)$ вида

$$f^C(S_N) = \min\{(S_N - K_1)^+, K_2\}, \quad K_2 > 0, \tag{4}$$

$$f^P(S_N) = \min\{(K_1 - S_N)^+, K_2\}, \quad 0 < K_2 < K_1, \tag{5}$$

где K_2 — величина, ограничивающая выплаты по опциону. Опцион купли предъявляется к исполнению, если S_N превышает K_1, а опцион продажи предъявляется к исполнению, если S_N меньше K_1, но при этом выплаты ограничены величиной K_2. Очевидно, что опционы с платёжными функциями (4) и (5) переходят в стандартные опционы купли и продажи при $K_2 \to \infty$ и $K_2 \to K_1$ соответственно.

2. Предварительные результаты

Утверждение 1. *Пусть $d/\rho - 1 < c < u/\rho - 1$. Для того чтобы обеспечить равенство* (3), *необходимо в предшествующий момент $N-1$ иметь капитал*

$$X_{N-1} = \rho^{-1}[\widehat{p} f(S_{N-1}u) + \widehat{q} f(S_{N-1}d)],$$

где

$$\widehat{p} = \frac{\rho(1+c) - d}{(u-d)}, \quad \widehat{q} = 1 - \widehat{p} = \frac{u - \rho(1+c)}{(u-d)}, \tag{6}$$

и этот капитал нужно распределить между безрисковым и рисковым активами в соответствии с портфелем

$$\beta_N = \frac{uX_{N-1} - (1+c) f(S_{N-1}u)}{(u - \rho(1+c))B_{N-1}}, \quad \gamma_N = \frac{f(S_{N-1}u) - \rho X_{N-1}}{(u - \rho(1+c))S_{N-1}}.$$

Утверждение 2. *Стоимость опциона X_0, капитал $X_k, k = \overline{1, N}$, и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_{k+1} = (\beta_{k+1}, \gamma_{k+1})$ определяются формулами*

$$X_0 = f_0(S_0), \tag{7}$$

$$X_k = \rho^{-1}[\widehat{p} f_{k+1}(S_k u) + \widehat{q} f_{k+1}(S_k d)], \tag{8}$$

$$\beta_{k+1} = \frac{uf_{k+1}(S_k d) - df_{k+1}(S_k u)}{\rho(u-d)B_k}, \tag{9}$$

$$\gamma_{k+1} = \frac{f_{k+1}(S_k u) - f_{k+1}(S_k d)}{(u-d)S_k}, \tag{10}$$

$$f_k(S) = \rho^{-(N-k)} \sum_{j=0}^{N-k} C_{N-k}^j \widehat{p}^j \widehat{q}^{N-k-j} f(Su^j d^{N-k-j}), \tag{11}$$

где C_m^n *— число сочетаний из* m *по* n.

Доказательство данных утверждений проводится аналогично доказательству леммы 1, теоремы 1 и следствия 1 в [1] и поэтому не приводится.

Замечание 1. Утверждение 2 определяет решение задачи в случае произвольной платёжной функции. Формулы (8)–(10) переходят в формулы (2.43), (2.45), (2.46) из [1] при $c = 0$, когда отток или приток капитала отсутствует. Свойства $C_N^1, X_k^1, \beta_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^1$, содержащиеся в теореме 2 и следствии 2 из [1], справедливы соответственно для $X_0, X_k, \beta_{k+1}, \gamma_{k+1}$, определяемых формулами (7)–(10).

3. Опцион купли

Ставится задача: найти стоимость опциона $\mathbb{C}_N = X_0^C$, портфель $\pi_{k+1}^C = \left(\beta_{k+1}^C, \gamma_{k+1}^C\right)$ и соответствующий им капитал X_k^C, обеспечивающие выполнение платёжного обязательства (3) для платёжной функции $f(S_N) = f^C(S_N)$ вида (4).

Замечание 2. Поскольку для решения поставленной задачи используется комбинаторный [1, 5], а не вероятностный [8] подход, то по постановке задачи вероятностный закон скачков цены рискового актива не задаётся. Величины $\widehat{p}$ и $\widehat{q}$, определяемые формулами (6), обладают свойствами

$$0 < \widehat{p} < 1, \quad 0 < \widehat{q} < 1, \quad \widehat{p} + \widehat{q} = 1, \tag{12}$$

т. е. имеют характер вероятностей мартингальной меры при вероятностном подходе [8].

Далее всюду

$$\widehat{p^*} = \frac{u\widehat{p}}{\rho(1+c)}, \ \widehat{q^*}{=}1 - \widehat{p^*}{=}\frac{d\widehat{q}}{\rho(1+c)}, \ \mathbb{B}(i,N,p){=}\sum_{j=i}^{N} C_N^j p^j (1-p)^{N-j}, \tag{13}$$

$$j_k^1 = \left[\ln \frac{K_1}{S_k d^{N-k}} \Big/ \ln \frac{u}{d}\right], \quad j_k^2 = \left[\ln \frac{K_1 + K_2}{S_k d^{N-k}} \Big/ \ln \frac{u}{d}\right], \tag{14}$$

где $0 \leqslant k \leqslant N$, $[D]$ — целая часть числа D, а $\widehat{p^*}$ и $\widehat{q^*}$ удовлетворяют свойствам вида (12).

Лемма 1. *Для $p > 0$, $q > 0$ таких, что $p + q = 1$, функция*

$$f^C_{k+1}(S) = \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=0}^{N-k-1} C^j_{N-k-1} p^j q^{N-k-1-j} \times \min\{(Su^j d^{N-k-1-j} - K_1)^+, K_2\} \quad (15)$$

обладает следующими свойствами:

(i) $f^C_{k+1}(S)$ *неотрицательная, т. е.*

$$f^C_{k+1}(S) \geqslant 0 \quad (16)$$

при $S > 0$;

(ii) $f^C_{k+1}(S)$ *неубывающая;*

(iii) *если* $\widetilde{S}$ *такое, что* $f^C_{k+1}(S) > 0$ *при* $S > \widetilde{S}$, *то* $f^C_{k+1}(S)$ — *возрастающая функция при* $S > \widetilde{S}$, *т. е. для* S_1 *и* S_2 *таких, что* $S_2 > S_1 > \widetilde{S}$,

$$f^C_{k+1}(S_2) > f^C_{k+1}(S_1); \quad (17)$$

(iv) $f^C_{k+1}(S)$ *положительная, т. е.*

$$f^C_{k+1}(S) > 0, \quad (18)$$

если

$$K_1 < Su^{N-k-1} < K_1 + K_2; \quad (19)$$

(v) $f^C_{k+1}(S)$ *равна нулю, т. е.*

$$f^C_{k+1}(S) = 0, \quad (20)$$

если

$$Su^{N-k-1} \leqslant K_1 \quad \text{или} \quad Su^{N-k-1} \geqslant K_1 + K_2. \quad (21)$$

Доказательство. Функция (15) получается из функции (11) при замене k на $k+1$, когда $f(S)$ имеет вид (4), и при замене $\widehat{p}$ и $\widehat{q}$ произвольными p и q с теми же свойствами (12). Свойство (16), неубывание функции $f^C_{k+1}(S)$ и свойство (17) непосредственно следуют из (15). Пусть $\widetilde{j}^1_k$ — наименьшее целое такое, что

$$Su^{\widetilde{j}^1_k} d^{N-k-1-\widetilde{j}^1_k} - K_1 > 0, \quad (22)$$

а $\widetilde{j}_k^2$ — наибольшее целое такое, что

$$Su^{\widetilde{j}_k^2}d^{N-k-1-\widetilde{j}_k^2} - K_1 < K_2. \tag{23}$$

Тогда (22) и (23) приводят к неравенствам

$$\left(\frac{u}{d}\right)^{\widetilde{j}_k^1} > \frac{K_1}{Sd^{N-k-1}}, \quad \left(\frac{u}{d}\right)^{\widetilde{j}_k^2} < \frac{K_1+K_2}{Sd^{N-k-1}}. \tag{24}$$

Значит, из (24) следует

$$\widetilde{j}_k^1 = 1 + \left[\ln\frac{K_1}{Sd^{N-k-1}}\Big/\ln\frac{u}{d}\right], \quad \widetilde{j}_k^2 = \left[\ln\frac{K_1+K_2}{Sd^{N-k-1}}\Big/\ln\frac{u}{d}\right], \tag{25}$$

и $f_{k+1}^C(S)$ согласно (15) и (25) принимает вид

$$\begin{aligned} f_{k+1}^C(S) = \rho^{-(N-k-1)}\sum_{j=\widetilde{j}_k^1}^{\widetilde{j}_k^2} C_{N-k-1}^j p^j q^{N-k-1-j}(Su^j d^{N-k-1-j} - K_1) \\ + \rho^{-(N-k-1)}K_2\sum_{j=\widetilde{j}_k^2+1}^{N-k-1} C_{N-k-1}^j p^j q^{N-k-1-j}. \end{aligned} \tag{26}$$

Согласно (15), (26) свойство (18) выполняется, если $\widetilde{j}_k^1 < N-k$ и $\widetilde{j}_k^2 \leqslant N-k$, а из (25) следует, что $\widetilde{j}_k^1 < N-k$ и $\widetilde{j}_k^2 \leqslant N-k$, если

$$\ln\frac{K_1}{Sd^{N-k-1}} < (N-k-1)\ln\frac{u}{d} < \ln\frac{K_1+K_2}{Sd^{N-k-1}}. \tag{27}$$

Отсюда следует (19), а свойство (20) при условиях (21) следует очевидным образом. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Стоимость опциона $\mathbb{C}_N$, портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_{k+1}^C = \left(\beta_{k+1}^C, \gamma_{k+1}^C\right)$ и капитал X_k^C определяются формулой*

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}_N = S_0(1+c)^N\left[\mathbb{B}\left(j_0^1+1, N; \widehat{p^*}\right) - \mathbb{B}\left(j_0^2+1, N; \widehat{p^*}\right)\right] \\ &- \rho^{-N}K_1\left[\mathbb{B}\left(j_0^1+1, N; \widehat{p}\right) - \mathbb{B}\left(j_0^2+1, N; \widehat{p}\right)\right] + \rho^{-N}K_2\mathbb{B}\left(j_0^2+1, N; \widehat{p}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

и формулами (8)–(10), где

$$\begin{aligned} f_{k+1}(S_k u) &= f_{k+1}^C(S_k u) \\ &= S_k(1+c)^{N-k-1}u\left[\mathbb{B}\left(j_k^1, N-k-1; \widehat{p^*}\right) - \mathbb{B}\left(j_k^2, N-k-1; \widehat{p^*}\right)\right] \\ &\quad - \rho^{-(N-k-1)}K_1[\mathbb{B}\left(j_k^1, N-k-1; \widehat{p}\right) - \mathbb{B}\left(j_k^2, N-k-1; \widehat{p}\right)] \\ &\quad + \rho^{-(N-k-1)}K_2\mathbb{B}\left(j_k^2, N-k-1; \widehat{p}\right), \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
&f_{k+1}(S_k d) = f^C_{k+1}(S_k d)\\
&= S_k(1+c)^{N-k-1} d\big[\mathbb{B}\big(j^1_k+1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(j^2_k+1, N-k-1; \widehat{p^*}\big)\big]\\
&\quad - \rho^{-(N-k-1)} K_1\big[\mathbb{B}\big(j^1_k+1, N-k-1; \widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(j^2_k+1, N-k-1; \widehat{p}\big)\big]\\
&\qquad + \rho^{-(N-k-1)} K_2 \mathbb{B}(j^2_k+1, N-k-1; \widehat{p}). \quad (30)
\end{aligned}$$

Доказательство. Формула (26) с заменой p на $\widehat{p}$ и q на $\widehat{q}$ с учётом (6) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
f^C_{k+1}(S) &= S(1+c)^{N-k-1} \sum_{j=\widetilde{j}^1_k}^{\widetilde{j}^2_k} C^j_{N-k-1} \left(\frac{\widehat{p}u}{\rho(1+c)}\right)^j \left(\frac{(1-\widehat{p})d}{\rho(1+c)}\right)^{N-k-1-j}\\
&\quad - K_1 \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=\widetilde{j}^1_k}^{\widetilde{j}^2_k} C^j_{N-k-1} \widehat{p}^j (1-\widehat{p})^{N-k-1-j}\\
&\quad + K_2 \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=\widetilde{j}^2_k+1}^{N-k-1} C^j_{N-k-1} \widehat{p}^j (1-\widehat{p})^{N-k-1-j}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Из (6) и (13) следует, что

$$\frac{(1-\widehat{p})d}{\rho(1+c)} = (1-\widehat{p^*}). \quad (32)$$

Воспользовавшись (13), (32), из (31) получаем представление $f^C_{k+1}(S)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
f^C_{k+1}(S) &= S(1+c)^{N-k-1}\big[\mathbb{B}\big(\widetilde{j}^1_k, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^2_k+1, N-k-1; \widehat{p^*}\big)\big]\\
&\quad - \rho^{-(N-k-1)} K_1\big[\mathbb{B}\big(\widetilde{j}^1_k, N-k-1; \widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^2_k+1, N-k-1; \widehat{p}\big)\big]\\
&\qquad + \rho^{-(N-k-1)} K_2 \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^2_k+1, N-k-1; \widehat{p}\big). \quad (33)
\end{aligned}$$

Из (25) с учётом (14) следует, что

$$\widetilde{j}^1_k\big|_{S=S_k u} = j^1_k, \quad \widetilde{j}^1_k\big|_{S=S_k d} = j^1_k + 1, \quad (34)$$

$$\widetilde{j}^2_k\big|_{S=S_k u} = j^2_k - 1, \quad \widetilde{j}^2_k\big|_{S=S_k d} = j^2_k. \quad (35)$$

Так как

$$f^C_{k+1}(S_k u) = f^C_{k+1}(S)_{|S=S_k u}, \quad f^C_{k+1}(S_k d) = f^C_{k+1}(S)_{|S=S_k d}, \quad (36)$$

то (29), (30) следуют из (33)–(36). Согласно (7) и (33) имеем

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}_N = f_0^C(S_0) = S_0(1+c)^N \big[\mathbb{B}\big(\widetilde{j}^1_{(-1)}, N; \widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^2_{(-1)} + 1, N; \widehat{p^*}\big)\big] \\
- \rho^{-N} K_1 \big[\mathbb{B}\big(\widetilde{j}^1_{(-1)}, N; \widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^2_{(-1)} + 1, N; \widehat{p}\big)\big] \\
+ \rho^{-N} K_2 \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^2_{(-1)} + 1, N; \widehat{p}\big). \quad (37)
\end{aligned}
$$

Из (14), (25) получаем, что $\widetilde{j}^1_{(-1)} = j^1_0 + 1$, $\widetilde{j}^2_{(-1)} = j^2_0$. Тогда (28) следует из (37). Теорема 1 доказана.

Капитал и портфель в явном виде определяет

Следствие 1. *Для портфеля* $\pi^C_{k+1} = \big(\gamma^C_{k+1}, \beta^C_{k+1}\big)$ *и капитала* X^C_k *справедливы представления*:

$$
\begin{aligned}
\gamma^C_{k+1} = (1+c)^{N-k-1} \big[\mathbb{B}\big(j^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(j^2_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big)\big] \\
+ C^{j^1_k}_{N-k-1} \widehat{p}^{j^1_k} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j^1_k} \frac{d^{N-k}}{(u-d)\rho^{N-k-1}} \left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j^1_k+1} - \frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right] \\
+ C^{j^2_k}_{N-k-1} \widehat{p}^{j^2_k} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j^2_k} \frac{d^{N-k}}{(u-d)\rho^{N-k-1}} \left[\frac{K_1+K_2}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j^2_k+1}\right], \quad (38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^C_{k+1} = -\frac{K_1}{B_k \rho^{N-k}} \big[\mathbb{B}\big(j^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(j^2_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big)\big] \\
- C^{j^1_k}_{N-k-1} \widehat{p}^{j^1_k} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j^1_k} \frac{S_k d^{N-k+1}}{(u-d) B_k \rho^{N-k}} \left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j^1_k+1} - \frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right] \\
- C^{j^2_k}_{N-k-1} \widehat{p}^{j^2_k} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j^2_k} \frac{S_k d^{N-k+1}}{(u-d) B_k \rho^{N-k}} \left[\frac{K_1+K_2}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j^2_k+1}\right] \\
+ \frac{K_2}{B_k \rho^{N-k}} \mathbb{B}\big(j^2_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big), \quad (39)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X^C_k = S_k (1+c)^{N-k-1} \big[\mathbb{B}\big(j^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(j^2_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big)\big] \\
- K_1 \rho^{-(N-k)} \big[\mathbb{B}\big(j^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(j^2_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big)\big] \\
+ C^{j^1_k}_{N-k-1} \widehat{p}^{j^1_k} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j^1_k} \frac{S_k d^{N-k}(\rho - d)}{(u-d)\rho^{N-k}} \left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j^1_k+1} - \frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right] \\
+ C^{j^2_k}_{N-k-1} \widehat{p}^{j^2_k} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j^2_k} \frac{S_k d^{N-k}(\rho - d)}{(u-d)\rho^{N-k}} \left[\frac{K_1+K_2}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j^2_k+1}\right] \\
+ K_2 \rho^{-(N-k)} \mathbb{B}\big(j^2_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big). \quad (40)
\end{aligned}
$$

Доказательство. Так как

$$
\mathbb{B}(i, N, p) = \mathbb{B}(i+1, N, p) + C^i_N p^i (1-p)^{N-i}, \quad (41)
$$

то использование (41) в (29), (30) с последующей подстановкой (29) и (30) в (8)–(10) приводит к (38)–(40). Следствие 1 доказано.

Утверждение 3. *Пусть* $\widetilde{\mathbb{C}_N}$, $\widetilde{X_k^C}$, $\widetilde{\gamma_{k+1}^C}$, $\widetilde{\beta_{k+1}^C}$ *суть пределы* $\mathbb{C}_N$, X_k^C, γ_{k+1}^C, β_{k+1}^C *при* $K_2 \to \infty$. *Тогда*

$$\widetilde{\mathbb{C}_N} = S_0(1+c)^N \mathbb{B}\big(j_0^1+1, N; \widehat{p^*}\big) - \rho^{-N} K_1 \mathbb{B}\big(j_0^1+1, N; \widehat{p}\big), \qquad (42)$$

а $\widetilde{X_k^C}$, $\widetilde{\gamma_{k+1}^C}$, $\widetilde{\beta_{k+1}^C}$ *определяются формулами* (8)–(10), *где*

$$f_{k+1}(S_k u) = \widetilde{f_{k+1}^C}(S_k u) = S_k(1+c)^{N-k-1} u \mathbb{B}\big(j_k^1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \rho^{-(N-k-1)} K_1 \mathbb{B}(j_k^1, N-k-1; \widehat{p}), \qquad (43)$$

$$f_{k+1}(S_k d) = \widetilde{f_{k+1}^C}(S_k d) = S_k(1+c)^{N-k-1} d \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \rho^{-(N-k-1)} K_1 \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1; \widehat{p}\big). \qquad (44)$$

Для $\widetilde{X_k^C}$, $\widetilde{\gamma_{k+1}^C}$ *и* $\widetilde{\beta_{k+1}^C}$ *справедливы представления*

$$\widetilde{X_k^C} = S_k(1+c)^{N-k-1} \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - K_1 \rho^{-(N-k)} \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1; \widehat{p}\big) + C_{N-k-1}^{j_k^1} \widehat{p}^{j_k^1} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^1} \frac{S_k d^{N-k}(\rho-d)}{(u-d)\rho^{N-k}} \left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^1+1} - \frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right], \qquad (45)$$

$$\widetilde{\gamma_{k+1}^C} = (1+c)^{N-k-1} \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) + C_{N-k-1}^{j_k^1} \widehat{p}^{j_k^1} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^1} \frac{d^{N-k}}{(u-d)\rho^{N-k-1}} \left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^1+1} - \frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right], \qquad (46)$$

$$\widetilde{\beta_{k+1}^C} = -\frac{K_1}{B_k \rho^{N-k}} \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1; \widehat{p}\big) - C_{N-k-1}^{j_k^1} \widehat{p}^{j_k^1} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^1} \frac{S_k d^{N-k+1}}{(u-d) B_k \rho^{N-k}} \left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^1+1} - \frac{K_1}{S_k d^{N-k}}\right]. \qquad (47)$$

Доказательство. Из определения $\widetilde{j_k^2}$ согласно (13), (14), (23), (25) следует, что $\mathbb{B}\big(j_k^2, N-k-1; p\big) = 0$ при $K_2 = \infty$. Тогда (42)–(44) следуют из (28)–(30), а формулы (45)–(47) получаются из (42)–(44) аналогично тому, как формулы (38)–(40) были получены из (28)–(30). Утверждение 3 доказано.

Замечание 3. Формулы (42)–(44) и (45)–(47) совпадают в случае отсутствия притока или оттока капитала, когда $c = 0$, соответственно с

формулами (4.15)–(4.17) и (4.27)–(4.29) из [1]. Поскольку при $K_2 \to \infty$ платёжная функция (4) переходит в платёжную функцию для стандартного опциона купли, утверждение 3 определяет полное решение задачи хеджирования в случае стандартного опциона купли с притоком и оттоком капитала, как предельный случай соответствующего экзотического опциона. В частности, при $c = 0$ формула (42) совпадает с формулой (4.23) из [8].

4. Опцион продажи

Ставится задача: найти стоимость опциона $\mathbb{P}_N = X_0^P$, портфель $\pi_{k+1}^P = \left(\beta_{k+1}^P, \gamma_{k+1}^P\right)$ и соответствующий им капитал X_k^P, обеспечивающие выполнение платёжного обязательства (3) для платёжной функции $f(S_N) = f^P(S_N)$ вида (5).

Далее в дополнение к (13), (14) введём

$$j_k^3 = \left[\ln \frac{K_1 - K_2}{S_k d^{N-k}} / \ln \frac{u}{d}\right], \quad 0 \leqslant k \leqslant N. \tag{48}$$

Лемма 2. *Для* $p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1$ *функция*

$$f_{k+1}^P(S) = \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=0}^{N-k-1} C_{N-k-1}^j p^j q^{N-k-1-j} \times \min\{(K_1 - S u^j d^{N-k-1-j})^+, K_2\} \tag{49}$$

обладает следующими свойствами:

(i) $f_{k+1}^P(S)$ *неотрицательная, т. е.*

$$f_{k+1}^P(S) \geqslant 0 \tag{50}$$

при $S > 0$;

(ii) $f_{k+1}^P(S)$ *невозрастающая*;

(iii) *если* $\widetilde{S}$ *такое, что* $f_{k+1}^P(S) > 0$ *при* $S > \widetilde{S}$, *то* $f_{k+1}^P(S)$ — *убывающая функция при* $S > \widetilde{S}$, *т. е. для* S_1 *и* S_2 *таких, что* $S_2 > S_1 > \widetilde{S}$,

$$f_{k+1}^P(S_2) < f_{k+1}^P(S_1); \tag{51}$$

(iv) $f_{k+1}^P(S)$ *положительная, т. е.*

$$f_{k+1}^P(S) > 0, \tag{52}$$

если

$$K_1 - K_2 < Su^{N-k-1} < K_1; \tag{53}$$

(v) $f^P_{k+1}(S)$ *равна нулю, т. е.*

$$f^P_{k+1}(S) = 0, \tag{54}$$

если

$$Su^{N-k-1} \geqslant K_1 \quad \text{или} \quad Su^{N-k-1} \leqslant K_1 - K_2. \tag{55}$$

Доказательство. Функция (49) получается из функции (11) при замене k на $k+1$, когда $f(S)$ имеет вид (5), и при замене $\widehat{p}$ и $\widehat{q}$ произвольными p и q с теми же свойствами (12). Аналогично (26) имеем

$$f^P_{k+1}(S) = \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=\widetilde{j}^3_k}^{\widetilde{j}^1_k} C^j_{N-k-1} p^j q^{N-k-1-j} (K_1 - Su^j d^{N-k-1-j}) + \rho^{-(N-k-1)} K_2 \sum_{j=0}^{\widetilde{j}^3_k - 1} C^j_{N-k-1} p^j q^{N-k-1-j}, \tag{56}$$

где

$$\widetilde{j}^1_k = \left[\ln \frac{K_1}{Sd^{N-k-1}} \Big/ \ln \frac{u}{d}\right], \ \widetilde{j}^3_k = 1 + \left[\ln \frac{K_1 - K_2}{Sd^{N-k-1}} \Big/ \ln \frac{u}{d}\right] \tag{57}$$

и являются соответственно наибольшим и наименьшим целым, для которых

$$K_1 - Su^{\widetilde{j}^1_k} d^{N-k-1-\widetilde{j}^1_k} > 0, \ \ K_1 - Su^{\widetilde{j}^3_k} d^{N-k-1-\widetilde{j}^3_k} < K_2. \tag{58}$$

Дальнейшее доказательство проводится по схеме доказательства леммы 1. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Стоимость опциона $\mathbb{P}_N$, портфель (хеджирующая стратегия) $\pi^P_{k+1} = \left(\beta^P_{k+1}, \gamma^P_{k+1}\right)$ и капитал X^P_k определяются формулой*

$$\mathbb{P}_N = \rho^{-N} K_1 \left[\mathbb{B}\left(j^3_0+1, N; \widehat{p}\right) - \mathbb{B}\left(j^1_0+1, N; \widehat{p}\right)\right] - S_0(1+c)^N \left[\mathbb{B}\left(j^3_0+1, N; \widehat{p^*}\right) - \mathbb{B}\left(j^1_0 + 1, N; \widehat{p^*}\right)\right] + \rho^{-N} K_2 \left[1 - \mathbb{B}\left(j^3_0 + 1, N; \widehat{p}\right)\right] \tag{59}$$

и формулами (8)–(10), *где*

$$\begin{aligned} f_{k+1}(S_k u) &= f^P_{k+1}(S_k u) \\ &= \rho^{-(N-k-1)} K_1 \left[\mathbb{B}\left(j^3_k, N-k-1; \widehat{p}\right) - \mathbb{B}\left(j^1_k, N-k-1; \widehat{p}\right)\right] \\ &\quad - S_k(1+c)^{N-k-1} u \left[\mathbb{B}\left(j^3_k, N-k-1; \widehat{p^*}\right) - \mathbb{B}\left(j^1_k, N-k-1; \widehat{p^*}\right)\right] \\ &\quad + \rho^{-(N-k-1)} K_2 \left[1 - \mathbb{B}\left(j^3_k, N-k-1; \widehat{p}\right)\right], \end{aligned} \tag{60}$$

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(S_k d) &= f^P_{k+1}(S_k d)\\
&= \rho^{-(N-k-1)} K_1 \big[\mathbb{B}\big(j^3_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(j^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big)\big]\\
&- S_k(1+c)^{N-k-1} d \big[\mathbb{B}\big(j^3_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(j^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big)\big]\\
&+ \rho^{-(N-k-1)} K_2 \big[1 - \mathbb{B}\big(j^3_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big)\big]. \quad (61)
\end{aligned}
$$

Доказательство. Формула (56) заменой p на $\widehat{p}$ и q на $\widehat{q}$ с учётом (6) и того, что $\mathbb{B}(0, N-k-1; p) = 1$, может быть представлена в виде

$$
\begin{aligned}
f^P_{k+1}(S) &= K_1 \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=\widetilde{j}^3_k}^{\widetilde{j}^1_k} C^j_{N-k-1} \widehat{p}^j (1-\widehat{p})^{N-k-1-j}\\
&- S(1+c)^{N-k-1} \sum_{j=\widetilde{j}^3_k}^{\widetilde{j}^1_k} C^j_{N-k-1} \left(\frac{\widehat{p}u}{\rho(1+c)}\right)^j \left(\frac{(1-\widehat{p})d}{\rho(1+c)}\right)^{N-k-1-j}\\
&+ K_2 \rho^{-(N-k-1)} \left[1 - \sum_{j=\widetilde{j}^3_k}^{N-k-1} C^j_{N-k-1} \widehat{p}^j (1-\widehat{p})^{N-k-1-j}\right]. \quad (62)
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись (13), (32) из (62) получаем представление $f^P_{k+1}(S)$ в виде

$$
\begin{aligned}
f^P_{k+1}(S) &= \rho^{-(N-k-1)} K_1 \big[\mathbb{B}\big(\widetilde{j}^3_k, N-k-1; \widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p}\big)\big]\\
&- S(1+c)^{N-k-1} \big[\mathbb{B}\big(\widetilde{j}^3_k, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big)\big]\\
&+ \rho^{-(N-k-1)} K_2 \big[1 - \mathbb{B}\big(\widetilde{j}^3_k, N-k-1; \widehat{p}\big)\big]. \quad (63)
\end{aligned}
$$

Дальнейшее доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Следующее утверждение определяет капитал и портфель в явном виде.

Следствие 2. *Для портфеля* $\pi^P_{k+1} = \big(\gamma^P_{k+1}, \beta^P_{k+1}\big)$ *и капитала* X^P_k *справедливы представления*:

$$
\begin{aligned}
\gamma^P_{k+1} &= -(1+c)^{N-k-1} \big[\mathbb{B}\big(j^3_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(j^1_k + 1, N-k-1; \widehat{p^*}\big)\big]\\
&- C^{j^1_k}_{N-k-1} \widehat{p}^{j^1_k} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j^1_k} \frac{d^{N-k}}{(u-d)\rho^{N-k-1}} \left[\frac{K_1}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j^1_k+1}\right]\\
&- C^{j^3_k}_{N-k-1} \widehat{p}^{j^3_k} (1-\widehat{p})^{N-k-1-j^3_k} \frac{d^{N-k}}{(u-d)\rho^{N-k-1}} \left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j^3_k+1} - \frac{K_1 - K_2}{S_k d^{N-k}}\right], \quad (64)
\end{aligned}
$$

$$\beta_{k+1}^P = \frac{K_1}{B_k\rho^{N-k}}\big[\mathbb{B}\big(j_k^3+1, N-k-1;\widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1;\widehat{p}\big)\big]$$
$$+ \frac{K_2}{B_k\rho^{N-k}}\big[1-\mathbb{B}\big(j_k^3+1, N-k-1;\widehat{p}\big)\big]$$
$$+ C_{N-k-1}^{j_k^1}\widehat{p}^{j_k^1}(1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^1}\frac{S_k d^{N-k+1}}{(u-d)B_k\rho^{N-k}}\left[\frac{K_1}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^1+1}\right]$$
$$+ C_{N-k-1}^{j_k^3}\widehat{p}^{j_k^3}(1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^3}\frac{S_k d^{N-k+1}}{(u-d)B_k\rho^{N-k}}\left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^3+1} - \frac{K_1-K_2}{S_k d^{N-k}}\right], \quad (65)$$
$$X_k^P = K_1\rho^{-(N-k)}\big[\mathbb{B}\big(j_k^3+1, N-k-1;\widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1;\widehat{p}\big)\big]$$
$$- S_k(1+c)^{N-k-1}\big[\mathbb{B}\big(j_k^3+1, N-k-1;\widehat{p^*}\big) - \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1;\widehat{p^*}\big)\big]$$
$$+ K_2\rho^{-(N-k)}\big[1-\mathbb{B}\big(j_k^3+1, N-k-1;\widehat{p}\big)\big]$$
$$- C_{N-k-1}^{j_k^1}\widehat{p}^{j_k^1}(1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^1}\frac{S_k d^{N-k}(\rho-d)}{(u-d)\rho^{N-k}}\left[\frac{K_1}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^1+1}\right]$$
$$- C_{N-k-1}^{j_k^3}\widehat{p}^{j_k^3}(1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^3}\frac{S_k d^{N-k}(\rho-d)}{(u-d)\rho^{N-k}}\left[\left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^3+1} - \frac{K_1-K_2}{S_k d^{N-k}}\right]. \quad (66)$$

Доказательство. Использование (41) в (60), (61) с последующей подстановкой (60) и (61) в (8)–(10) приводит к (64)–(66). Следствие 2 доказано.

Утверждение 4. *Пусть* $\widetilde{\mathbb{P}_N}$, $\widetilde{X_k^P}$, $\widetilde{\gamma_{k+1}^P}$, $\widetilde{\beta_{k+1}^P}$ *суть пределы* $\mathbb{P}_N$, X_k^P, γ_{k+1}^P, β_{k+1}^P *при* $K_2 \to K_1$. *Тогда*

$$\widetilde{\mathbb{P}_N} = \rho^{-N}K_1\big[1-\mathbb{B}\big(j_0^1+1, N;\widehat{p}\big)\big] - S_0(1+c)^N\big[1-\mathbb{B}\big(j_0^1+1, N;\widehat{p^*}\big)\big], \quad (67)$$

а $\widetilde{X_k^P}$, $\widetilde{\gamma_{k+1}^P}$, $\widetilde{\beta_{k+1}^P}$ *определяются формулами* (8)–(10), *где*

$$f_{k+1}(S_k u) = \widetilde{f_{k+1}^P}(S_k u) = \rho^{-(N-k-1)}K_1\big[1-\mathbb{B}\big(j_k^1, N-k-1;\widehat{p}\big)\big]$$
$$- S_k(1+c)^{N-k-1}u\big[1-\mathbb{B}\big(j_k^1, N-k-1;\widehat{p^*}\big)\big], \quad (68)$$
$$f_{k+1}(S_k d) = \widetilde{f_{k+1}^P}(S_k d) = \rho^{-(N-k-1)}K_1\big[1-\mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1;\widehat{p}\big)\big]$$
$$- S_k(1+c)^{N-k-1}d\big[1-\mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1;\widehat{p^*}\big)\big]. \quad (69)$$

Для $\widetilde{X_k^P}$, $\widetilde{\gamma_{k+1}^P}$ *и* $\widetilde{\beta_{k+1}^P}$ *справедливы представления*:

$$\widetilde{X_k^P} = K_1\rho^{-(N-k)}\big[1-\mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1;\widehat{p}\big)\big]$$
$$- S_k(1+c)^{N-k-1}\big[1-\mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1;\widehat{p^*}\big)\big]$$
$$- C_{N-k-1}^{j_k^1}\widehat{p}^{j_k^1}(1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^1}\frac{S_k d^{N-k}(\rho-d)}{(u-d)\rho^{N-k}}\left[\frac{K_1}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^1+1}\right], \quad (70)$$

$$\widetilde{\gamma_{k+1}^{P}} = -(1+c)^{N-k-1}\big[1 - \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1; \widehat{p^*}\big)\big]$$
$$- C_{N-k-1}^{j_k^1}\widehat{p}^{j_k^1}(1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^1}\frac{d^{N-k}}{(u-d)\rho^{N-k-1}}\left[\frac{K_1}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^1+1}\right], \quad (71)$$

$$\widetilde{\beta_{k+1}^{P}} = \frac{K_1}{B_k\rho^{N-k}}\big[1 - \mathbb{B}\big(j_k^1+1, N-k-1; \widehat{p}\big)\big]$$
$$+ C_{N-k-1}^{j_k^1}\widehat{p}^{j_k^1}(1-\widehat{p})^{N-k-1-j_k^1}\frac{S_k d^{N-k+1}}{(u-d)B_k\rho^{N-k}}\left[\frac{K_1}{S_k d^{N-k}} - \left(\frac{u}{d}\right)^{j_k^1+1}\right]. \quad (72)$$

Доказательство. Из определения $\widetilde{j_k^3}$ согласно (13), (48), (57), (58) следует, что $\mathbb{B}\big(j_k^3+1, N-k-1; p\big) = 1$ при $K_2 = K_1$. Тогда (67)–(69) следуют из (59)–(61), а формулы (70)–(72) получаются из (67)–(69) аналогично тому, как формулы (64)–(66) были получены из (59)–(61).

Замечание 4. Поскольку при $K_2 = K_1$ платёжная функция (5) переходит в платёжную функцию для стандартного опциона продажи, то утверждение 4 определяет полное решение задачи хеджирования в случае стандартного опциона продажи с притоком и оттоком капитала, как предельный случай соответствующего экзотического опциона. При $c = 0$ формулы (67)–(72) определяют решение задачи для стандартного опциона продажи при отсутствии притока и оттока капитала. В частности, при $c = 0$ формула (67) с учётом (42) совпадает с формулой (4.25) из [8].

5. Анализ результатов

I. Имея в виду, что отрицательные значения составляющих β_k и γ_k портфеля $\pi_k = (\beta_k, \gamma_k)$ означают взятие соответствующего актива в долг для перераспределения его в пользу другого актива, при этом одновременно оба актива в долг не могут браться, т. е. одновременно β_k и γ_k не могут быть отрицательными [8], проведём анализ структуры π_k^c и π_k^p и сравним со структурой портфелей $\widetilde{\pi}_k^c$ и $\widetilde{\pi}_k^p$, соответствующих стандартным опционам.

Опцион купли. Из (10) в силу леммы 1(i),(ii) следует, что $\gamma_{k+1}^c \geqslant 0$, т. е. в этом случае рисковый актив не может браться в долг. Согласно лемме 1(iii),(iv) из (10) следует, что $\gamma_{k+1}^c > 0$, если

$$K_1 < S_k u^{N-k} < K_1 + K_2. \quad (73)$$

Очевидно, что $S_N(u) = S_k u^{N-k}$ есть стоимость рискового актива в конечный момент времени N, если сдвиги его цены, начиная с момента k, происходят только вверх. Таким образом, условие (73) означает, что

в текущем значении капитала обязательно будет присутствовать рисковая составляющая, если конечное значение цены рискового актива $S_N(u)$ будет принадлежать интервалу $(K_1, K_1 + K_2)$.

Так как согласно (14) $j_k^1 \leqslant j_k^2$, то

$$\mathbb{B}\big(j_k^1 + 1, N - k - 1, \widehat{p}\big) - \mathbb{B}\big(j_k^2 + 1, N - k - 1, \widehat{p}\big) \geqslant 0.$$

Из (14), (24), (25) следует, что

$$j_k^1 + 1 > \ln \frac{K_1}{S_k d^{N-k}} / \ln \frac{u}{d}, \quad j_k^2 + 1 < \ln \frac{K_1 + K_2}{S_k d^{N-k}} / \ln \frac{u}{d}. \tag{74}$$

Тогда согласно (74)

$$\Big(\frac{u}{d}\Big)^{j_k^1+1} - \frac{K_1}{S_k d^{N-k}} > 0, \quad \Big(\frac{u}{d}\Big)^{j_k^2+1} - \frac{K_1 + K_2}{S_k d^{N-k}} < 0. \tag{75}$$

Поскольку в правой части (39) все слагаемые, кроме последнего, неположительные, а последнее — неотрицательное, о знакоопределённости β_{k+1}^c ничего сказать нельзя. Таким образом, нерисковый актив может как присутствовать в качестве текущей составляющей капитала, так и браться в долг для перераспределения его в пользу рискового актива.

Из (9), (10), (46), (47) следует, что $\widetilde{\gamma}_{k+1}^c \geqslant 0$ и $\widetilde{\gamma}_{k+1}^c > 0$, если выполняется левая часть неравенства (73), а $\widetilde{\beta}_{k+1}^c \leqslant 0$. Таким образом, свойства рисковой части капитала в случае стандартного опциона купли те же, что и для экзотического опциона, а безрисковый актив может браться только в долг.

Опцион продажи. Из (9), (10) с учётом леммы 2(i),(ii) следует, что $\beta_{k+1}^c \geqslant 0$, $\gamma_{k+1}^c \leqslant 0$, т. е. в этом случае безрисковый актив не может браться в долг, а рисковый актив может браться только в долг. Согласно лемме 2(iii),(iv) из (9), (10) следует, что $\beta_{k+1}^c > 0$, $\gamma_{k+1}^c < 0$, если

$$K_1 - K_2 < S_k u^{N-k} < K_1. \tag{76}$$

Условие (76) означает, что в текущем значении капитала обязательно будет присутствовать безрисковая составляющая с обязательным взятием в долг рискового актива, если конечное значение цены рискового актива $S_N(u) = S_k u^{N-k}$ будет принадлежать интервалу $(K_1 - K_2, K_1)$. Как следует из (13), (14), (48), (57) и (58), аналогичные выводы вытекают из (64), (65) с учётом того, что $j_k^1 \geqslant j_k^3$, $\mathbb{B}(j_k^3 + 1, N - k - 1, \widehat{p}) \leqslant 1$ и аналогично (75) для опциона продажи

$$\Big(\frac{u}{d}\Big)^{j_k^1+1} - \frac{K_1}{S_k d^{N-k}} < 0, \quad \Big(\frac{u}{d}\Big)^{j_k^3+1} - \frac{K_1 - K_2}{S_k d^{N-k}} > 0. \tag{77}$$

Из (9), (10), (71), (72) следует, что $\widetilde{\beta}^c_{k+1} \geqslant 0$, $\widetilde{\gamma}^c_{k+1} \leqslant 0$, и $\widetilde{\beta}^c_{k+1} > 0$, $\widetilde{\gamma}^c_{k+1} < 0$, если выполняется правая часть неравенства (76). Таким образом, свойства портфеля в случае стандартного опциона продажи те же, что и для экзотического опциона.

II. Относительно свойств цен опционов представляют интерес следующие вопросы: 1) зависимости $\mathbb{C}_N$ и $\mathbb{P}_N$ от u и d — сдвигов цены вверх и вниз; 2) зависимости $\mathbb{C}_N$ и $\mathbb{P}_N$ от величины K_2, ограничивающей выплаты по опционам; 3) соотношение между ценами экзотических и стандартных опционов, т. е. между $\mathbb{C}_N$ и $\widetilde{\mathbb{C}_N}$, $\mathbb{P}_N$ и $\widetilde{\mathbb{P}_N}$. Из-за очень сложных зависимостей $\mathbb{C}_N$ и $\mathbb{P}_N$ от указанных параметров точное аналитическое исследование указанных вопросов провести не удаётся. В качестве примера на рис. 1, 2 представлены численные результаты, дающие ответы на некоторые поставленные вопросы. Проведём обсуждение этих результатов.

Общие значения параметров: $S_0 = K_1 = 1$; $\rho = 1{,}1$; $d = 0,1$; $c = 0$; $N = 10$. На рис. 1: $K_2^1 = 5$; $K_2^2 = 7$; $K_2^3 = 10$; $K_2^4 = 100$. На рис. 2: $K_2^1 = 0{,}3$; $K_2^2 = 0{,}5$; $K_2^3 = 0{,}7$; $K_2^4 = 0{,}9$.

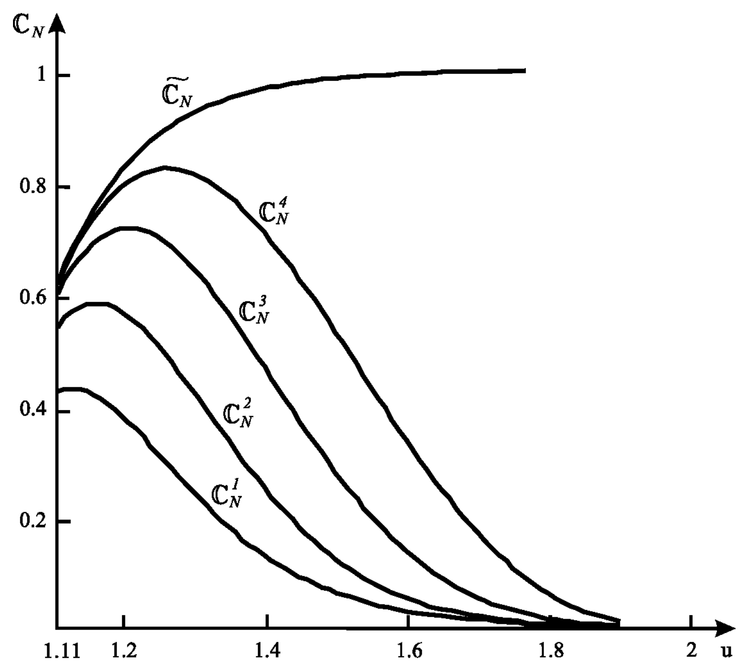

Рис. 1. Зависимость $\mathbb{C}_N$ от сдвига рискового актива u вверх

На рис. 1 изображены зависимости $\mathbb{C}_N$ от сдвига цены рискового ак-

тива u вверх при различных значениях величины K_2. При этом наблюдается возрастание $\mathbb{C}_N$ по K_2 (кривые поднимаются с ростом K_2), причём значения $\mathbb{C}_N$ остаются меньше значений $\widetilde{\mathbb{C}_N}$, определяющих стоимость стандартного опциона. Возрастание $\mathbb{C}_N$ с ростом K_2 объясняется тем, что с ростом K_2 увеличивается величина, ограничивающая доход от реализации опциона, а за возможность получить больший доход следует больше платить. Свойство $\mathbb{C}_N(u) < \widetilde{\mathbb{C}_N}(u)$ очевидно, так как в случае стандартного опциона отсутствует ограничение на величину выплаты. Зависимость $\mathbb{C}_N$ от u носит экстремальный характер: на некотором интервале $u \in [u_0, u^*]$ функция $\mathbb{C}_N(u)$ является возрастающей, а для $u > u^*$ — убывающей. Интерпретация этого свойства заключается в следующем: на интервале $u \in [u_0, u^*]$ возрастание u приводит к увеличению вероятности того, что S_N превзойдёт K_1, т. е. повышается вероятность предъявления опциона к исполнению, а за уменьшение риска следует больше платить. Начиная с некоторого значения $u = u^*$ возрастает вероятность того, что S_N превысит величину $K = K_1 + K_2$, когда выплата по экзотическому опциону ограничивается величиной $f^c = K_2$, а по стандартному опциону она не ограничивается и по-прежнему равна $\widetilde{f^c} = S_N - K_1$. Таким образом, убывание $\mathbb{C}_N$ с дальнейшим ростом u объясняется возрастающей потерей в доходе от экзотического опциона по сравнению со стандартным опционом.

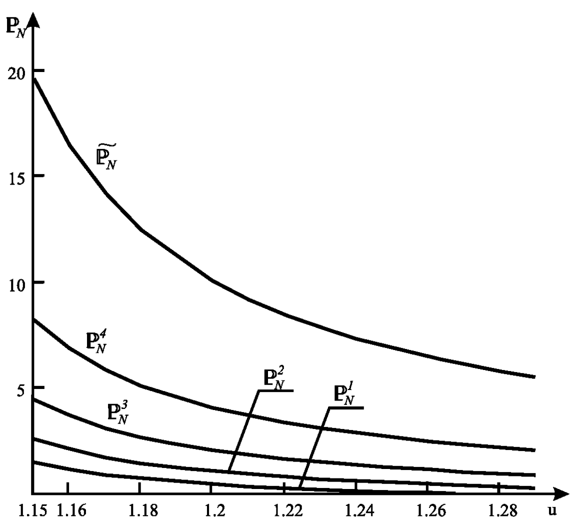

Рис. 2. Зависимость $\mathbb{P}_N$ от сдвига цены рискового актива u вверх

На рис. 2 изображены зависимости $\mathbb{P}_N$ от сдвига цены рискового ак-

тива u вверх при различных значениях K_2. Свойство $\mathbb{P}_N < \widetilde{\mathbb{P}}_N$ и возрастание $\mathbb{P}_N$ с ростом K_2 объясняются аналогично опциону купли. Свойство убывания функции $P_N(u)$ объясняется тем, что с ростом u увеличивается вероятность того, что S_N превзойдёт величину K_1 (вероятность непредъявления опциона к исполнению), а за увеличение риска следует меньше платить. Отсутствие свойства экстремальности в зависимости $\mathbb{P}_N(u)$ по сравнению с $\mathbb{C}_N(u)$ объясняется тем, что в случае стандартного опциона продажи выплата $\widetilde{f}^p = K_1 - S_N$ ограничена величиной K_1 и не может неограниченно возрастать, как в случае опциона купли.

Расчёты проводились по формулам (28), (42), (59), (67).

Заключение

В данной статье для биномиальной модели (B, S)-финансового рынка с возможным оттоком и притоком капитала рассмотрен один вид экзотических опционов купли и продажи европейского типа, когда выплаты по опционам ограничиваются заданной величиной. Осуществлён вывод соотношений, которые определяют стоимости опционов, составляющие портфелей (хеджирующих стратегий) и капиталы для опционов купли (теорема 1, следствие 1) и продажи (теорема 2, следствие 2). Как предельные случаи экзотических опционов получены решения задач хеджирования в случае стандартных опционов купли (утверждение 3) и продажи (утверждение 4). Проведён анализ структуры портфелей и численные расчёты, по результатам которых (см. рис. 1, 2) осуществлён анализ свойств цен опционов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дёмин Н. С., Шиширин М. Ю.** Европейский опцион с произвольным числом рисковых ценных бумаг в случае дискретного времени // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2002. — Т. 9, № 1. — С. 3–20.
2. **Инглис-Тейлор Э.** Производные финансовые инструменты. — М.: ИНФРА-М., 2001. — 224 с.
3. **Кожин К.** Всё об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. — 2002. — № 15. — С. 53–57; № 16. — С. 60–64; № 17. — С. 68–73.
4. **Мельников А. В., Нечаев М. Л.** К вопросу о хеджировании платежных обязательств в среднеквадратическом // Теория вероятностей и ее применения. — 1998. — Т. 43, № 4. — С. 672–691.
5. **Нагаев А. В.** К вопросу о вычислении справедливой цены опциона // Экономика и мат. методы. — 1998. — Т. 34, № 1. — С. 166–171.
6. **Новиков А. А.** Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее применения. — 1998. — Т. 43, № 1. — С. 152–161.

7. **Халл Д. К.** Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. — М.: Вильямс, 2007. — 1051 с.
8. **Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В.** К теории расчетов опционов европейского и американского типов. Дискретное время // Теория вероятностей и ее применения. — 1994. — Т. 39, № 1. — С. 23–79.
9. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Economy. — 1973. — Vol. 81, N 3. — P. 637–657.
10. **Cox J. C., Ross R. A., Rubinstein M.** Option pricing: a simplified approach // J. Financial Economy. — 1976. — Vol. 7. — P. 229–263.
11. **Follmer H., Leukert P.** Quantile hedging // Finance and Stochastic. — 1999. — Vol. 3, N 3. — P. 251–273.
12. **Laurent J. P., Pham H.** Dynamic programming and mean-variance hedging // Finance and Stochastic. — 1999. — Vol. 3, N 1. — P. 83–110.
13. **Rubinstein M.** Exotic option // Finance working paper. — Berkeley: Inst. of Business and Econ. Research, 1991. — 43 p.
14. **Zhang P. G.** An introduction to exotic option // European Financial Management. — 1995. — Vol. 1 , N 1. — P. 87–95.

Дёмин Николай Серапионович

Ерлыкова Алёна Владимировна,
e-mail: AErlykova@list.ru

Паньшина Екатерина Александровна,
e-mail: PanshinaEA_87@inbox.ru

Статья поступила
10 декабря 2008 г.
Переработанный вариант —
12 октября 2009 г.