ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2009. Том 16, № 6. С. 52–67

УДК 519.716

О ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ k-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОДНИМ ЭНДОМОРФИЗМОМ *)

С. С. Марченков

Аннотация. Исследуются замкнутые классы в P_k, которые определяются единственным эндоморфизмом. Доказывается, что любой такой класс является позитивно замкнутым. В случае, когда эндоморфизм представляет собой нетождественную идемпотентную функцию, соответствующий ему замкнутый класс оказывается позитивно предполным в P_k. При $k = 2, 3$ все позитивно предполные классы в P_k определяются подобными эндоморфизмами. На основе полученных результатов находятся все позитивно субмаксимальные классы в P_3.

Ключевые слова: функция многозначной логики, эндоморфизм, позитивно замкнутый класс.

Один из распространённых способов задания замкнутых классов в многозначной логике — задание их в виде классов сохранения некоторых отношений. Важным частным случаем отношения является график одноместной функции. Если g — одноместная функция на E_k, f — функция из P_k и f сохраняет отношение $y = g(x)$ (график функции g), то g — эндоморфизм алгебры $\langle E_k; f\rangle$ [2]. В случае, когда g — перестановка на E_k, эндоморфизм g алгебры $\langle E_k; f\rangle$ называется *автоморфизмом алгебры* $\langle E_k; f\rangle$. В теории функций многозначной логики функции, сохраняющие график перестановки g, называют также *функциями, самодвойственными относительно перестановки* g.

В универсальной алгебре рассматривают полугруппу $\mathrm{End}\langle E_k; f\rangle$ всех эндоморфизмов и группу $\mathrm{Aut}\langle E_k; f\rangle$ всех автоморфизмов алгебры $\langle E_k; f\rangle$. Для любой функции f полугруппа $\mathrm{End}\langle E_k; f\rangle$ имеет единицу — тождественную функцию, т. е. представляет собой моноид.

Рядом авторов (см., например, [11]) ставился вопрос: если на множестве E_k задан моноид M, то каково множество всех функций из P_k, полугруппа эндоморфизмов которых содержит моноид M?

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00701).

Для моноидов M, включающих все перестановки на E_k, этот вопрос по существу решён в работах [3–5], где найдены все замкнутые классы однородных функций — функций, самодвойственных относительно любых перестановок на E_k. Для моноидов M, включающих все чётные перестановки на E_k, полное решение вопроса получено в [7].

Вместе с тем в вопросах классификации функций многозначной логики представляет интерес описание всех (замкнутых) классов функций, которые определяются одним эндоморфизмом. В частности, такое описание полезно при изучении сильных операторов замыкания на P_k.

В настоящей статье исследуются замкнутые классы в P_k, определяемые единственным эндоморфизмом. Доказывается, что в случае, когда эндоморфизм является нетождественной идемпотентной функцией, соответствующий ему замкнутый класс является позитивно предполным в P_k. При этом для $k = 2, 3$ все позитивно предполные в P_k классы определяются единственным эндоморфизмом. На основе полученных результатов с использованием эндоморфизмов удаётся описать все 34 позитивно субмаксимальных класса в P_3.

1. Основные понятия

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики). Если $Q \subseteq P_k$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех n-местных функций из Q. Для любых $n \geqslant 1$ и $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, через e_i^n обозначается селекторная функция из P_k, которая определяется тождеством

$$e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i.$$

На множестве P_k считаем заданной операцию суперпозиции [10]. Подмножества множества P_k, замкнутые относительно операции суперпозиции, называются *замкнутыми классами.*

Наряду с функциями на E_k рассматриваем конечноместные отношения на E_k. Пусть $f \in P_k^{(n)}$ и ρ — m-местное отношение на E_k. Говорят, что функция f *сохраняет отношение* ρ, если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$, удовлетворяющих отношению ρ, набор

$$(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{m1}, \dots, a_{mn}))$$

также удовлетворяет отношению ρ. Множество всех функций из P_k, сохраняющих отношение ρ, обозначим через $\mathrm{Pol}(\rho)$. Хорошо известно (см., например, [1]), что для любого отношения ρ множество $\mathrm{Pol}(\rho)$ является замкнутым классом, содержащим все селекторные функции.

Пусть $H = \{h_1(x), \dots, h_r(x)\}$ — множество функций из $P_k^{(1)}$ и $f \in P_k^{(n)}$. Говорят, что функция f *сохраняет множество функций* H, если для любых (не обязательно различных) чисел $i_1, \dots, i_r$ из $\{1, 2, \dots, r\}$ $f(h_{i_1}(x), \dots, h_{i_r}(x)) \in H$. Множество всех функций из P_k, сохраняющих множество H, обозначим через $\mathrm{Pol}(H)$. Нетрудно видеть, что для любого $H \subseteq P_k^{(1)}$ множество $\mathrm{Pol}(H)$ является замкнутым классом, содержащим все селекторные функции.

Если $f \in P_k^{(1)}$, то *графиком функции* f называем бинарное отношение $y = f(x)$. График функции f обозначаем через $\mathrm{Gr}(f)$.

Если $f \in P_k^{(n)}$, $g \in P_k^{(1)}$ и выполняется тождество

$$f(g(x_1), \dots, g(x_n)) = g(f(x_1, \dots, x_n)), \tag{1}$$

то говорят, что g — *эндоморфизм алгебры* $\langle E_k; f\rangle$. Чуть менее строго будем также говорить, что g — эндоморфизм функции f. Легко видеть, что условие (1) эквивалентно тому, что функция f сохраняет отношение $\mathrm{Gr}(g)$. Множество $\mathrm{End}\langle E_k; f\rangle$ всех эндоморфизмов алгебры $\langle E_k; f\rangle$ образует моноид — полугруппу с операцией композиции (суперпозиции) и единицей (тождественным отображением).

Если $g \in P_k^{(1)}$, то моноид $\mathrm{End}\langle E_k; f\rangle$ содержит, очевидно, элемент g для любой функции f из $\mathrm{Pol}(\mathrm{Gr}(g))$. Для любого множества $Q \subseteq P_k^{(1)}$ положим

$$\varphi(Q) = \bigcap_{g \in Q} \mathrm{Pol}(\mathrm{Gr}(g)).$$

Из определения следует, что для любой функции f из $\varphi(Q)$ выполняется включение $Q \subseteq \mathrm{End}\langle E_k; f\rangle$. Таким образом, $\varphi(Q)$ — множество всех функций из P_k, у которых полугруппа эндоморфизмов $\mathrm{End}\langle E_k; f\rangle$ содержит множество функций Q.

Напомним основные понятия, связанные с оператором позитивного замыкания [6]. Вначале определим язык Pos. Исходными символами языка Pos являются символы предметных переменных $x_1, x_2, \dots$ (с областью значений E_k), символы $f_i^{(n)}$ для обозначения n-местных функций из P_k, знаки равенства $=$, конъюнкции $\&$, дизъюнкции $\vee$, квантор существования $\exists$, левая и правая скобки и запятая. Иногда вместо символов переменных $x_1, x_2, \dots$ будем использовать символы x, y, z.

Терм в языке Pos определим по индукции. Символ предметной переменной есть терм; если $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ — символы предметных переменных (не обязательно различные), а $f_i^{(n)}$ — символ n-местной функции, то $f_i^{(n)}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$ — терм; если $t_1, \dots, t_m$ — термы, а $f_l^{(m)}$ — символ

m-местной функции, то $f_l^{(m)}(t_1, \ldots, t_m)$ — терм. Других термов в языке Pos нет.

Всякий терм языка Pos очевидным образом определяет некоторую функцию класса P_k (переменная определяет тождественную функцию).

Если t_1, t_2 — термы языка Pos, то выражение $(t_1 = t_2)$ называем *элементарной формулой языка* Pos. Далее, если Φ_1, Φ_2 — формулы языка Pos, а x_i — символ предметной переменной, то

$$(\Phi_1 \& \Phi_2),\ (\Phi_1 \vee \Phi_2),\ (\exists x_i)\Phi_1$$

— также формулы языка Pos. Понятия свободной и связанной переменных предполагаем известными.

Всякая формула языка Pos с m свободными переменными определяет некоторое m-местное отношение на E_k. Пусть $Q \subseteq P_3$, $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ — формула языка Pos со свободными переменными $x_1, \ldots, x_m$, все функциональные символы которой суть обозначения функций из Q, и формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ определяет отношение $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ на E_k. В этом случае говорим, что *формула Φ позитивно выражает* отношение ρ через функции множества Q. Понятие позитивной выразимости перенесём с отношений на функции. Именно, если $g(x_1, \ldots, x_m)$ — функция из P_k, а формула $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y)$ языка Pos позитивно выражает отношение $y = g(x_1, \ldots, x_m)$ (график функции g) через функции множества Q, то говорим, что формула Φ позитивно выражает функцию g через функции множества Q. Совокупность всех функций, позитивно выразимых через функции множества Q, называем *позитивным замыканием* множества Q и обозначаем $\mathrm{Pos}[Q]$. Множества вида $\mathrm{Pos}[Q]$ называем *позитивно замкнутыми классами.*

Известные для операции суперпозиции понятия полноты, порождающей системы и базиса [10] распространяем на оператор позитивного замыкания. Отметим [6], что любой позитивно замкнутый класс содержит все селекторные функции и замкнут относительно операции суперпозиции.

2. Позитивно предполные классы

Теорема 1. *Пусть $Q \subset P_k$ и функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определяется позитивной формулой над Q. Тогда $End(Q) \subseteq \mathrm{End}(f)$.*

Доказательство. Пусть позитивная формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ над множеством Q определяет отношение $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Возьмём произвольный набор $(a_1, \ldots, a_n)$ из E_k^n, и пусть $b = f(a_1, \ldots, a_n)$. Тогда значение $\Phi(a_1, \ldots, a_n, b)$ истинно. Покажем, что для любого эндоморфизма $g \in \mathrm{End}(Q)$ значение $\Phi(g(a_1), \ldots, g(a_n), g(b))$ также истинно. Отсюда

будет следовать, что $g(b) = f(g(a_1), \dots, g(a_n))$, т. е. g — эндоморфизм функции f.

Предположим, что $z_1, \dots, z_m$ — все связанные переменные формулы Φ. Пусть

$$t_1(x_1, \dots, x_n, y, z_1, \dots, z_m) = t_2(x_1, \dots, x_n, y, z_1, \dots, z_m) \tag{2}$$

— равенство над Q, входящее в формулу Φ, и h_1, h_2 — функции, реализуемые термами t_1, t_2. Будем далее предполагать, что при установлении истинности значения $\Phi(a_1, \dots, a_n, b)$ связанные переменные $z_1, \dots, z_m$ формулы Φ принимают значения $c_1, \dots, c_m$, а равенство (2) выполняется на наборе $(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m)$. Тогда

$$h_1(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m) = h_2(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m). \tag{3}$$

Поскольку функции h_1, h_2 либо реализуются суперпозициями функций из Q, либо совпадают с тождественной функцией и $g \in \mathrm{End}(Q)$, при $i = 1, 2$ будут справедливы равенства

$$h_i(g(a_1), \dots, g(a_n), g(b), g(c_1), \dots, g(c_m)) \\ = g(h_i(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m)). \tag{4}$$

Из (3), (4) следует, что

$$h_1(g(a_1), \dots, g(a_n), g(b), g(c_1), \dots, g(c_m)) \\ = h_2(g(a_1), \dots, g(a_n), g(b), g(c_1), \dots, g(c_m)).$$

Таким образом, из выполнимости равенства (2) на наборе $(a_1, \dots, a_n, b, c_1, \dots, c_m)$ вытекает его выполнимость на наборе

$$(g(a_1), \dots, g(a_n), g(b), g(c_1), \dots, g(c_m)).$$

Это означает, что если при установлении истинности $\Phi(a_1, \dots, a_n, b)$ в качестве значений связанных переменных $z_1, \dots, z_m$ были выбраны $c_1, \dots, c_m$, то для установления истинности $\Phi(g(a_1), \dots, g(a_n), g(b))$ в качестве значений переменных $z_1, \dots, z_m$ следует выбрать $g(c_1), \dots, g(c_m)$. Теорема 1 доказана.

Утверждение 1 [8]. *Пусть g — перестановка на E_k, которая разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины. Тогда класс $\varphi(g)$ позитивно предполон в P_k.*

Одноместная функция g называется *идемпотентной*, если $g(g) = g$.

Теорема 2. *Пусть g — идемпотентная функция из $P_k^{(1)}$, отличная от тождественной функции. Тогда класс $\varphi(g)$ позитивно предполон в P_k.*

Доказательство. Как отмечалось, класс $\varphi(g)$ состоит из всех функций, полугруппа эндоморфизмов которых содержит функцию g. Согласно теореме 1 класс $\varphi(g)$ позитивно замкнут. Кроме того, класс $\varphi(g)$ отличен от P_k, поскольку функция g не является тождественной и, следовательно, её график не является диагональю [1]. Итак, $\varphi(g)$ — позитивно замкнутый класс, отличный от класса P_k.

Из того, что g идемпотентна и отлична от тождественной функции, следует, что существуют такое разбиение $\{D_1, D_2, \ldots, D_s\}$ множества E_k на непустые попарно не пересекающиеся подмножества и такие элементы $d_1, d_2, \ldots, d_s$, что $1 \leqslant s < k$ и

$$d_1 \in D_1, \ldots, d_s \in D_s, \quad g(D_1) = d_1, \ldots, g(D_s) = d_s.$$

Установим принадлежность множеству $\varphi(g)$ некоторых одноместных функций. Выберем некоторое $i, 1 \leqslant i \leqslant s$, и рассмотрим какую-либо функцию $f_i(x)$, которая обладает следующими свойствами: f_i принимает значения только из множества D_i и $f_i\{d_1, \ldots, d_s\} = d_i$. Нетрудно видеть, что $g(f_i(x)) = f_i(g(x)) = d_i$, т. е. g — эндоморфизм функции f_i. Отметим, в частности, что функциями типа f_i являются все константы $d_1, \ldots, d_s$.

Покажем, что для некоторого элемента $a \in E_k$ и некоторых функций $h_1(x), \ldots, h_k(x)$ из $\varphi(g)$ выполняется соотношение

$$(h_1(a), h_2(a), \ldots, h_k(a)) = (0, 1, \ldots, k-1).$$

Пусть, например, $D_1 \neq \{d_1\}$, $a \in D_1$ и $a \neq d_1$. Если $j \in \{d_1, \ldots, d_s\}$, то в качестве функции h_{j+1} можно взять константу j. Если же $j \notin \{d_1, \ldots, d_s\}$ и $j \in D_i$, то в качестве функции h_{j+1} возьмём такую функцию f_i, что $f_i(a) = j$.

Из доказанного свойства класса $\varphi(g)$ и утверждения 3 [8] вытекает, что $\varphi(g) = \mathrm{Pos}[\varphi(g)^{(1)}]$ и, более того, $\varphi(g) = \mathrm{Pol}(\varphi(g)^{(1)})$.

Установим теперь, что класс $\varphi(g)$ позитивно предполон в P_k. Возьмём произвольную функцию f, не входящую в класс $\varphi(g)$. Из соотношения $\varphi(g) = \mathrm{Pol}(\varphi(g)^{(1)})$ следует, что подстановками подходящих функций множества $\varphi(g)^{(1)}$ в функцию f можно получить функцию $h(x)$, не входящую в $\varphi(g)^{(1)}$. Это означает, что для некоторого элемента $a \in E_k$ должно выполняться неравенство

$$g(h(a)) \neq h(g(a)). \tag{5}$$

Если для некоторого i выполняется соотношение $h(d_i) \notin \{d_1, \dots, d_s\}$, то (см. доказательство выше) для любого $b \notin \{d_1, \dots, d_s\}$ найдётся такая функция f_j, что $f_j(h(d_i)) = b$. Поскольку константа d_i принадлежит классу $\varphi(g)$, в замыкании $\mathrm{Pos}[\varphi(g) \cup \{f\}]$ образуются все функции-константы. Согласно утверждению 1 из [8] система $\varphi(g) \cup \{f\}$ в этом случае является позитивно полной в P_k.

Пусть теперь при любом i значение $h(d_i)$ совпадает с одним из значений $d_1, \dots, d_s$. Если $g(a) = d_i$, то, очевидно, $a \in D_i$. Пусть, например, $h(d_i) = d_j$. Тогда ввиду неравенства (5) имеем $h(a) \notin D_j$. Предположим, что $h(a) \in D_l$, где $l \neq j$. Тогда отношение $(g(x) = d_i) \,\&\, (g(h(x)) = d_l)$ — отношение вида $x \in D$, где D — подмножество множества D_i, которое содержит a и не содержит d_i. Далее рассматриваем в $\varphi(g)$ такую функцию f_i, что $f_i(a) = a$ и $f_i(b) = d_i$ для любого элемента b из $D \setminus \{a\}$. Тогда отношение

$$(x \in D) \,\&\, (f_i(x) = x)$$

совпадает с отношением $x = a$. Следовательно, формула

$$(x = x) \,\&\, (y = a)$$

определяет функцию-константу a, отличную от $d_1, \dots, d_s$. Далее продолжаем так же, как в рассмотренном выше случае $h(d_i) \notin \{d_1, \dots, d_s\}$. Теорема 2 доказана.

Будем задавать одноместные функции f из P_3 вектором значений $(f(0), f(1), f(2))$.

Для $k = 2, 3$ утверждение 1 и теорема 2 дают полный перечень позитивно предполных классов в P_k. Как установлено в [6], все позитивно предполные в P_2 классы суть T_0, T_1 (классы сохранения констант 0, 1) и S (класс самодвойственных функций). Они определяются (в смысле отображения φ) эндоморфизмами 0, 1 и $\bar{x}$. Далее, в [8] показано, что все позитивно предполные классы в P_3 суть T_0, T_1, T_2 (классы сохранения констант 0, 1, 2), S_{x+1} (класс функций, самодвойственных относительно перестановки $x + 1$), а также классы

$$V_{01}, \quad V_{02}, \quad V_{10}, \quad V_{12}, \quad V_{20}, \quad V_{21}. \tag{6}$$

Классы T_0, T_1, T_2, S_{x+1} определяются соответственно эндоморфизмами 0, 1, 2 и $x+1 \pmod 3$. Для остальных классов (6) доказано, что каждый из них является позитивным замыканием множества всех своих одноместных функций. Более того, каждый из этих классов есть класс сохранения множества соответствующих одноместных функций. Для классов из (6)

приведём множества всех одноместных функций (порядок из (6) сохраняем):

$$\{0,(002),(010),(012),(220),2\},\quad \{0,(002),(010),(012),(101),1\},$$
$$\{(011),(012),1,(112),(221),2\},\quad \{0,(011),(012),(100),1,(112)\},$$
$$\{(012),(022),1,(121),(212),2\},\quad \{0,(012),(022),(200),(212),2\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эндоморфизмами приведённых множеств одноместных функций будут соответственно функции

$$(002),\quad (010),\quad (112),\quad (011),\quad (212),\quad (022).$$

Следовательно, данные эндоморфизмы определяют позитивно предполные классы (6). Обозначим классы (6) в связи с этим через $T_{(002)}, T_{(010)}$, $T_{(112)}, T_{(011)}, T_{(212)}, T_{(022)}$.

3. Позитивно субмаксимальные классы в P_3

В этом разделе найдём все классы, которые являются позитивно предполными в позитивно предполных в P_3 классах, — позитивно субмаксимальные классы в P_3. Начнём с класса S_{x+1}.

Утверждение 2. *Единственным позитивно предполным в S_{x+1} классом является класс $S_{x+1} \cap T_0$.*

Доказательство. Пусть $f \in S_{x+1} \setminus T_0$. Тогда $f(0,\dots,0) \neq 0$ и функция $f(x,\dots,x)$ входит в множество $S_{x+1} \setminus T_0$. Множеству $S^{(1)}_{x+1}$ принадлежат только две функции, не сохраняющие 0, — функции $x+1$ и $x+2$. Согласно результатам из [8] каждая из них позитивно порождает класс S_{x+1}. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Каждая из систем функций*

$$\begin{array}{llll} \{(001),(002)\}, & \{(001),(010)\}, & \{(001),(011)\}, & \{(001),(020)\}, \\ \{(001),(022)\}, & \{(002),(011)\}, & \{(002),(020)\}, & \{(010),(020)\}, \\ \{(010),(022)\}, & \{(011),(020)\}, & \{(011),(022)\}, & \{(020),(022)\} \end{array} \quad (7)$$

позитивно порождает класс T_0.

Доказательство. Начнём с системы $\{(001),(002)\}$. Суперпозицией функции (001) получаем константу 0. Далее имеем

$$(y=2x) \equiv (\exists z)(((001)(z)=x) \;\&\; ((002)(z)=y)) \vee ((002)(x)=x) \\ \& \; (y=(001)(x)).$$

Функция $2x \pmod 3$ образует позитивный базис класса S_{2x} — множества всех функций из P_3, самодвойственных относительно перестановки $2x$ [9]. Таким образом, $S_{2x} \subset \mathrm{Pos}[(001),(002)]$. Как показано в [9], класс S_{2x} непосредственно содержится только в классе T_0. Поскольку $(001) \notin S_{2x}$, получаем, что $\mathrm{Pos}[(001),(002)] = T_0$.

В случае системы $\{(001),(010)\}$ получаем функцию (002):

$$(y = (002)(x)) \equiv ((001)(x) = 0)\,\&\,(y = 0) \vee ((010)(x) = 0)\&(y = x).$$

В случае системы $\{(001),(011)\}$ получаем функцию (010):

$$(y = (010)(x)) \equiv ((001)(x) = 0)\,\&\,(y = x) \vee ((001)(x) = (011)(x))\,\&\,(y = 0).$$

В случае системы $\{(001),(020)\}$ получаем функцию (002):

$$(y = (002)(x)) \equiv ((001)(x) = 0)\,\&\,(y = 0) \vee ((020)(x) = 0)\,\&\,(y = x).$$

В случае системы $\{(001),(022)\}$ получаем функцию (020):

$$(y = (020)(x)) \equiv ((001)(x) = 0)\,\&\,(y = (022)(x)) \vee ((022)(x) = x)\,\&\,(y = 0).$$

В случае системы $\{(002),(011)\}$ получаем функцию (001):

$$(y = (001)(x)) \equiv ((002)(x) = 0)\,\&\,(y = 0) \vee ((002)(x) = x)\,\&\,(y = (011)(x)).$$

Остальные системы списка (7) двойственны рассмотренным системам относительно перестановки $2x$ (класс T_0 перестановкой $2x$ переводится в себя). Утверждение 3 доказано.

Обозначим через $T_{(001)}, T_{(020)}$ двойственные друг другу (относительно перестановки $2x$) классы $\varphi\{(001)\}$ и $\varphi\{(020)\}$. Легко видеть, что $T_{(001)} \subset T_0$ и $T_{(020)} \subset T_0$. В самом деле, константа 0 получается суперпозицией каждой из функций (001), (020). Поэтому функции из классов $T_{(001)}$ и $T_{(020)}$ выдерживают эндоморфизм 0, т. е. принадлежат классу T_0.

Теорема 3. *Позитивно предполными в T_0 классами являются только следующие 9 классов*:

$$T_0 \cap T_1,\ T_0 \cap T_2,\ T_{(001)},\ T_{(020)},\ T_0 \cap T_{(002)},\ T_0 \cap T_{(010)},\ T_0 \cap T_{(011)},\ T_0 \cap T_{(022)},\ S_{2x}. \quad (8)$$

Доказательство. Мы опускаем проверку того, что ни один из классов списка (8) целиком не содержится ни в каком другом классе этого списка.

Пусть система функций $Q \subseteq T_0$ целиком не входит ни в один из классов списка (8). Покажем, что система Q позитивно полна в классе T_0.

Установим, что в классе $\mathrm{Pos}[Q]$ содержится константа 0. Пусть $f_1 \in Q \setminus T_1$ и $f_2 \in Q \setminus T_2$. Тогда функции $f_1(x,\ldots,x)$, $f_2(x,\ldots,x)$ входят соответственно в множества

$$\{0,(001),(002),(020),(021),(022)\}, \quad \{0,(001),(010),(011),(020),(021)\}.$$

Суперпозициями каждой из функций (001), (020) можно получить константу 0. Функция (021) (перестановка $2x$) позитивно порождает класс S_{2x}, и константа 0 принадлежит классу S_{2x}. Константу 0 можно также получить суперпозициями любой пары функций

$$\{(002),(010)\}, \quad \{(002),(011)\}, \quad \{(022),(010)\}.$$

Остаётся рассмотреть пару функций (022), (011). Для неё имеем

$$(x=0) \equiv ((022)(x) = (011)(x)).$$

Далее покажем, что в замыкание $\mathrm{Pos}[Q]$ входит одноместная функция, отличная от функций $0, x$. Для этого рассмотрим классы $T_{(001)}, T_{(020)}$ и $T_0 \cap T_{(011)}$. Пусть $f_1(x_1,\ldots,x_n) \in Q \setminus T_{(001)}$. Тогда найдётся такой набор $(a_1,\ldots,a_n) \in E_3^n$, что

$$(001)(f_1(a_1,\ldots,a_n)) \neq f_1((001)(a_1),\ldots,(001)(a_n)).$$

Заменим в функции $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ переменной x все переменные x_i, для которых $a_i = 1$, переменной y — все переменные x_j, для которых $a_j = 2$, и функцией 0 (которая имеется в $\mathrm{Pos}[Q]$) — все остальные переменные. Получим функцию $g_1(x,y)$ из множества $\mathrm{Pos}[Q]$ такую, что

$$(001)(g_1(1,2)) \neq g_1(0,1).$$

Аналогичным образом из функций $f_2 \in Q \setminus T_{(020)}$ и $f_3 \in Q \setminus T_{(011)}$ получаем такие функции $g_2(x,y)$, $g_3(x,y)$, что

$$(020)(g_2(1,2)) \neq g_2(2,0), \quad (011)(g_3(1,2)) \neq g_3(1,1).$$

Будем сразу предполагать, что каждая из функций $g_1(0,x), g_2(x,0), g_3(x,x)$ совпадает с одной из функций $0, x$.

Если $g_1(0,x)=0$, то обязательно $g_1(1,2)=2$, а в случае $g_1(0,x)=x$ возможны лишь значения $g_1(1,2)\neq 2$. Соответственно этим трём случаям отношениям

$$g_1(x,y)=y,\quad g_1(x,y)=0,\quad g_1(x,y)=x$$

удовлетворяют наборы (0,0), (1,2) и не удовлетворяют (0,1), (0,2).

Аналогично рассматриваем функцию $g_2(x,y)$, разбираем возможности $g_2(x,0)=0$, $g_2(x,0)=x$ и получаем, что одному из отношений

$$g_2(x,y)=x,\quad g_2(x,y)=0,\quad g_2(x,y)=y$$

удовлетворяют наборы (0,0), (1,2) и не удовлетворяют (1,0), (2,0).

Наконец, для функции $g_3(x,y)$ образуем отношения

$$g_3(x,y)=x,\quad g_3(x,y)=y,\quad g_3(x,y)=0,$$

одному из которых удовлетворяют наборы (0,0), (1,2) и не удовлетворяют (1,1), (2,2).

Пусть отношения $\gamma_1(x,y),\gamma_2(x,y),\gamma_3(x,y)$ выбраны указанным выше способом для функций g_1,g_2,g_3. Тогда отношению

$$\gamma(x,y)\equiv\gamma_1(x,y)\ \&\ \gamma_2(x,y)\ \&\ \gamma_3(x,y)$$

удовлетворяют наборы (0,0), (1,2) и не удовлетворяют (0,1), (0,2), (1,0), (2,0), (1,1), (2,2). Если отношению γ удовлетворяет набор (2,1), то $\gamma(x,y)$ — график функции $2x$. В противном случае вместо отношения γ следует взять отношение

$$\gamma(x,y)\vee\gamma(y,x).$$

Итак, в позитивное замыкание системы Q входят константа 0 и одноместная функция $f(x)$, отличная от функций $0,x$. Далее рассмотрим все возможные случаи для $f(x)$.

Пусть $f=(001)$. Проверяем, что все одноместные функции из класса $T_{(001)}$ суть $0,(001),x$. Поэтому согласно утверждению 3 из [8] имеет место равенство $T_{(001)}=\mathrm{Pol}\{0,(001),x\}$. Далее берём функцию из системы Q, не входящую в класс $T_{(001)}$, и подстановкой в неё функций $0,(001),x$ получаем $g_1(x)$, отличную от $0,(001),x$. Если функция $g_1(x)$ не совпадает с $2x$, то позитивная полнота системы $\{(001),g_1\}$ в классе T_0 следует из утверждения 3. В противном случае подстановкой функции $2x$ в (001) получаем (010).

Пусть $f=(020)$. В этом случае замечаем, что функция (020) двойственна (001) относительно перестановки $2x$ (которая оставляет на месте элемент 0).

Пусть $f = (002)$. Из функций $0, (002),\ x$ позитивной формулой получаем (010):

$$(y = (010)(x)) \equiv ((002)(x) = 0)\ \&\ (y = x) \vee ((002)(x) = x)\ \&\ (y = 0).$$

Как и выше, из функции множества $Q \setminus T_{(002)}$ подстановкой вместо всех переменных константы 0 и переменных x, y образуем такую функцию $g_2'(x, y)$ из $\mathrm{Pos}[Q]$, что

$$(002)(g_2'(1, 2)) \neq g_2'(0, 2).$$

Положим

$$g_2(x, y) = g_2'((010)(x), (002)(y)).$$

Тогда также будем иметь

$$(002)(g_2(1, 2)) \neq g_2(0, 2). \tag{9}$$

Пусть

$$a = g_2(0, 2), \quad b = g_2(1, 0), \quad c = g_2(1, 2).$$

Тогда

$$g_2(0, 0) = g_2(0, 1) = g_2(2, 0) = g_2(2, 1) = 0,\ g_2(1, 1) = b,\ g_2(2, 2) = a$$

и $a \neq c$.

Если $g_2(0, 2) = a = 1$, то $g_2(0, x) = (001)(x)$ и по утверждению 3 приходим к позитивно полной в T_0 системе.

По аналогичным причинам можно считать, что $b \neq 2$. Более того, если $(a, c) \in \{(0, 2), (2, 0), (2, 1)\}$, то можно предполагать, что $b = 0$, поскольку в противном случае вместо функции $g_2(x, y)$ можно рассмотреть функцию $(002)(g_2(x, y))$. Следует также отметить, что при этом преобразовании случай $(a, c) = (2, 1)$ переходит в случай $(a, c) = (2, 0)$. Тем самым нам необходимо исследовать только такие функции g_2, у которых параметры a, b, c принимают значения (0,0,2) и (2,0,0) (случай $(a, c) = (0, 1)$ невозможен ввиду неравенства (9)).

Функция (010) двойственна (002) относительно перестановки $2x$. Поэтому, применяя двойственные рассуждения к функции из множества $Q \setminus T_{(010)}$, получаем такую $g_3(x, y)$, у которой параметры a, b, c принимают лишь значения (0,0,1) и (0,1,0). Далее рассматриваем все четыре варианта для функций g_2, g_3.

Если функции g_2, g_3 отличны от 0 только в точке (1,2), то отношению

$$(g_2(x, y) = y)\ \&\ (g_3(x, y) = x)$$

удовлетворяют только наборы (0,0) и (1,2). Как и выше, из данного отношения получаем график $2x$.

Если функция g_2 отлична от 0 только в точке (1,2), а g_3 — только в точках (1,0) и (1,1), то отношение

$$(g_2(x,y)=y)\,\&\,(g_3(x,y)=0)$$

— график функции (020).

Если функция g_2 отлична от 0 только в точках (0,2) и (2,2), а g_3 — только в точке (1,2), то отношение

$$(g_2(y,x)=0)\,\&\,(g_3(y,x)=y)$$

— график функции (001).

Наконец, если функция g_2 отлична от 0 только в точках (0,2) и (2,2), а g_3 — только в точках (1,0) и (1,1), то отношение

$$(g_2(x,y)=0)\,\&\,(g_2(y,x)=0)\,\&\,(g_3(x,y)=0)\,\&\,(g_3(y,x)=0)$$

— график функции $2x$.

Пусть $f=(010)$. Эта функция двойственна (002) относительно перестановки $2x$.

Пусть $f=(011)$. Из функции множества $Q\setminus T_{(011)}$ подстановкой вместо всех переменных константы 0 и переменных x,y получаем такую функцию $g_4'(x,y)$, что

$$(011)(g_4'(1,2))\neq g_4'(1,1).$$

Положим

$$g_4(x,y)=g_4'((011)(x),y).$$

Тогда также будем иметь

$$(011)(g_4(1,2))\neq g_4(1,1). \tag{10}$$

Если $g_4(1,1)=0$, то из соотношений $g_4(1,2)=g_4(2,2)$ и (10) следует, что $g_4(x,x)\in\{(001),(002)\}$. Согласно утверждению 3 функция (011) вместе с любой из функций (001), (002) образуют позитивно полную в T_0 систему.

Если $g_4(1,1)=1$, то должно быть $g_4(1,2)=g_4(2,2)=0$, т. е. $g_4(x,x)=(010)(x)$. Из функций 0, (010), (011), x получаем (001):

$$(y=(001)(x))\equiv((010)(x)=x)\,\&\,(y=0)\vee((010)(x)=0)\,\&\,(y=(011)(x)).$$

Если $g_4(1,1) = 2$, то должно быть $g_4(x,x) \in \{(020),(021),(022)\}$. Согласно утверждению 3 функция (011) вместе с любой из функций (020), (022) позитивно порождают класс T_0. Функция (021), как уже отмечалось, образует позитивный базис класса S_{2x}.

Пусть $f = (022)$. Функция (022) двойственна функции (011) относительно перестановки $2x$.

Пусть $f = (021)$. Функция (021) образует позитивный базис класса S_{2x}, который позитивно предполон в классе T_0 [9], и $Q \not\subseteq S_{2x}$. Следовательно, система Q позитивно полна в классе T_0. Теорема 3 доказана.

Двойственным образом находятся все позитивно предполные классы в классах T_1 и T_2.

Теорема 4. *Позитивно предполными в $T_{(002)}$ являются только следующие четыре класса*:

$$T_{(002)} \cap T_0, \quad T_{(002)} \cap T_2, \quad T_{(002)} \cap T_{(022)}, \quad T_{(220)}. \tag{11}$$

Доказательство. Мы опускаем проверку попарной несравнимости по включению классов списка (11).

Пусть Q — система функций из $T_{(002)}$, которая целиком не содержится ни в одном из классов списка (11). Из функции множества $Q \setminus T_0$ отождествлением всех переменных получаем одну из функций 2 или (220). Аналогично из функции множества $Q \setminus T_2$ отождествлением всех переменных получаем одну из функций 0, (010) или (220). Подстановка константы 2 в функции 0, (010), (220) даёт константу 0. Таким образом, класс $\mathrm{Pos}[Q]$ содержит либо обе константы 0, 2, либо функцию (220) (а также (002), которая получается суперпозицией функции (220)).

Предположим, что имеются обе константы 0, 2. Тогда из функции множества $Q \setminus T_{(022)}$ подстановкой констант 0, 2 и отождествлением остальных переменных получаем такую функцию $f(x)$ (из класса $T_{(002)}$), что $(022)(f(1)) \neq f(2)$. В силу определения класса $T_{(002)}$ имеем $f(2) \neq 1$. Если $f(2) = 0$, то $f \in \{(010),(220)\}$, если же $f(2) = 2$, то, учитывая неравенство $(022)(f(1)) \neq f(2)$, получаем $f = (002)$. Константы 0, 2 вместе с любой из функций (010), (002), (220) позитивно порождают класс $T_{(002)}$. В самом деле, из функции (010) получаем (220) (и (002)):

$$(y = (220)(x)) \equiv ((010)(x) = x) \mathbin{\&} (y = 2) \vee (x = 2) \mathbin{\&} (y = 0);$$

из (002) — функцию (220):

$$(y = (220)(x)) \equiv ((002)(x) = 0) \mathbin{\&} (y = 2) \vee (x = 2) \mathbin{\&} (y = 0);$$

из (220) — функцию (010):

$$(y = (010)(x)) \equiv ((220)(x) = 2)\ \&\ (y = x) \vee (x = 2)\ (\ y = 0).$$

Далее пользуемся тем, что система функций $\{0, (002), (010), (220), 2\}$ позитивно полна в классе $T_{(002)}$ [8].

Предположим теперь, что имеется функция (220). Нетрудно проверить, что множество $T^{(1)}_{(220)}$ состоит только из функций $(002), x, (220)$. В силу утверждения 3 из [8] будем иметь

$$T_{(220)} = \mathrm{Pol}\{(002), x, (220)\}.$$

Поэтому из функции множества $Q \backslash T_{(220)}$ подстановкой функций (002), x, (220) можно получить одну из функций 0, 2, (010). Путём подстановки любой из этих функций в (002) и (220) получаем константы 0, 2. Далее применяем рассуждения из рассмотренного выше случая двух констант. Теорема 4 доказана.

Двойственными рассуждениями можно определить все позитивно предполные классы в остальных позитивно предполных в P_3 классах из списка (6).

Из утверждения 3, теорем 3, 4 (и двойственных им теорем) следует, что в P_3 имеется ровно 34 позитивно субмаксимальных класса. Они определяются следующими множествами эндоморфизмов:

$\{(001)\},\ \{(020)\},\ \{(021)\},\ \{(100)\},\ \{(101)\},\ \{(102)\},\ \{(110)\},\ \{(121)\},$
$\{(122)\},\ \{(200)\},\ \{(202)\},\ \{(210)\},\ \{(211)\},\ \{(220)\},\ \{221)\},$
$\{0, (002)\},\ \{0, (010)\},\ \{0, (011)\},\ \{0, (022)\},\ \{0, 1\},\ \{0, (120)\},\ \{0, 2\},$
$\{(002), (022)\},\ \{(002), 2\},\ \{(010), (011)\},\ \{(010), 1\},\ \{(011), 1\},\ \{(022), 2\},$
$\{1, (112)\},\ \{1, (212)\},\ \{1, 2\},\ \{(112), (212)\},\ \{(112), 2\},\ \{(212), 2\}.$

Таким образом, 27 одноместных функций из P_3 определяют в P_3 (в смысле отображения φ) 26 позитивно замкнутых классов: тождественная функция x определяет весь класс P_3, функции 0, (002), (010), (011), (022), 1, (112), (120), (212), 2 — позитивно предполные в P_3 классы (функция (201) определяет тот же класс S_{x+1}, что и функция (120)), остальные 15 функций — позитивно субмаксимальные классы в P_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10; № 5. С. 1–9.
2. **Кон П.** Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968. — 351 с.
3. **Марченков С. С.** О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики, вып. 36. — М.: Наука, 1979. — С. 5–22.
4. **Марченков С. С.** Об однородных алгебрах // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 256, № 4. — С. 787–790.
5. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Проблемы кибернетики, вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 85–106.
6. **Марченков С. С.** О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискрет. математика. — 1999. — Т. 11, вып. 4. — С. 110–126.
7. **Марченков С. С.** Клоны, определяемые знакопеременными моноидами // Дискрет. математика. — 2002. — Т. 14, вып. 2. — С. 3–8.
8. **Марченков С. С.** Критерий позитивной полноты в трёхзначной логике // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1 — 2006. — Т. 13, № 3. — С. 27–39.
9. **Марченков С. С.** Дискриминаторные позитивно замкнутые классы трёхзначной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 53–66.
10. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.
11. **Machida H., Miyakawa M., Rosenberg I. G.** Relations between clones and full monoids // Proc. 31 Int. Symp. on Multiple-Valued Logic (Warsaw, Poland, May 22–24, 2001). — Warsaw: IEEE Computer Society Press, 2001. — P. 279–284.

Марченков Сергей Серафимович,
e-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
8 апреля 2009 г.