ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2009. Том 16, № 6. С. 68–73

УДК 519.2+621.391

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ МАКСИМАЛЬНОЙ СУММАРНОЙ ДЛИНЫ *)

А. В. Пяткин

Аннотация. Рассматривается задача выбора подмножества векторов максимальной суммарной длины. В случае фиксированной размерности пространства эта задача является полиномиально разрешимой. Доказана NP-полнота задачи при нефиксированной размерности пространства.

Ключевые слова: суммирование векторов, сложность, NP-полнота.

Введение

Пусть в k-мерном евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^k$ задано конечное семейство ненулевых векторов $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Определим функцию $S_V(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i x_i$ от булевых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Требуется максимизировать $\|S_V(x)\|$. Другими словами, нужно в заданном семействе V выбрать подмножество векторов максимальной суммарной длины.

Эта задача (с дополнительным условием, что сумма всех векторов из V равна 0) была поставлена в работе [5]. В [2] было доказано, что её оптимальное решение может быть найдено за время $O(k^2 n^k)$. Таким образом, задача полиномиально разрешима при фиксированной размерности пространства. Однако вопрос о её сложностном статусе в общем случае оставался открытым. В настоящей заметке этот пробел заполнен — доказана NP-трудность задачи при нефиксированной размерности пространства.

Заметим, что подобная ситуация (полиномиальная разрешимость задачи при фиксированной размерности пространства и NP-трудность в общем случае) является типичной для задач суммирования векторов.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06–01–00058, 07–07–00022 и 08–01–00516).

Так, задача максимизации $\|S_V(x)\|$ при заданной мощности подмножества (т. е. при дополнительном ограничении $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$) является NP-трудной [1], однако, как показано в [3], её можно решить за время $O(k^2 n^{2k})$. Там же показано, что за это же время решается и задача сумирования векторов с усреднением, т. е. с целевой функцией $\|S_V(x)\|^2 / \sum_{i=1}^{n} x_i$ при условии, что $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 1$. При этом в [6] доказана NP-трудность задачи сумирования векторов с усреднением.

1. Основной результат

Сформулируем изучаемую задачу в форме верификации свойств.

Задача ВВ (выбора векторов). Дано: множество ненулевых векторов $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ и число $K > 0$. Вопрос: существует ли такое подмножество $V' \subseteq V$, что $\|\sum_{v \in V'} v\| \geqslant K$?

Нам потребуется известная NP-полная задача 3-Выполнимость [4]:

Задача 3-SAT. Дано: m дизъюнкций $C_1, C_2, \ldots, C_m$ над множеством из n переменных, причём каждая из дизъюнкций содержит по 3 литерала (под литералом понимается переменная или её отрицание). Вопрос: можно ли назначить этим переменным такие значения истинности, чтобы каждая дизъюнкция содержала по крайней мере один истинный литерал?

Основным результатом настоящей заметки является следующая

Теорема 1. *Задача* ВВ NP-*полна.*

Доказательство. Построим полиномиальное свед́ение задачи 3-SAT к задаче ВВ. Рассмотрим произвольный пример задачи 3-SAT с переменными $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и дизъюнкциями $C_1, C_2, \ldots, C_m$, каждая из которых содержит по три литерала. Можно считать, что все три литерала, входящие в каждую из дизъюнкций, различны. Построим по этому примеру множество из $2n + 3m$ векторов размерности $3n + 3m + 1$ задачи ВВ. Выберем числа

$$\begin{aligned}
&c = \lceil m^2 n/2 - m + 3/2 \rceil, \\
&b = \lceil (c + 3m/2)\sqrt{2n} + 1 \rceil, \\
&a = \lceil b\sqrt{((2n + 3m)^2 + 1)} \rceil, \\
&K = \sqrt{(6m + n)a^2 + (n + 2m)^2 b^2 + n(c + m)^2}.
\end{aligned}$$

Обозначим k-ю координату вектора v_i через $v_i(k)$. Первые $n+3m$ координат будем называть *левыми*, последние $2n$ координат — *правыми*, а $(n+3m+1)$-ю координату — *центральной*. Центральная координата всех векторов равна b. Для каждого $i=1,2,\dots,n$ зададим $v_{2i-1}(i)=a$, $v_{2i}(i)=-a$, $v_{2i-1}(3m+n+2i)=c$, $v_{2i}(3m+n+2i+1)=c$, а все остальные левые и правые координаты этих векторов положим равными нулю. Будем говорить, что векторы v_{2i-1} и v_{2i} соответствуют литералам z_i и $\bar{z}_i$. Для каждого $i=1,2,\dots,m$ зададим

$$
\begin{aligned}
&v_{2n+3i-2}(n+3i-2)=v_{2n+3i-1}(n+3i-1)=v_{2n+3i}(n+3i)=2a,\\
&v_{2n+3i-2}(n+3i-1)=v_{2n+3i-2}(n+3i)=v_{2n+3i-1}(n+3i-2)\\
&\ =v_{2n+3i-1}(n+3i)=v_{2n+3i}(n+3i-2)=v_{2n+3i}(n+3i-1)=-a
\end{aligned}
$$

и положим остальные левые координаты этих векторов равными нулю. Для задания правых координат этих векторов условимся, что координаты $3m+n+2i$ и $3m+n+2i+1$ соответствуют литералам z_i и $\bar{z}_i$. Если дизъюнкция C_j содержит литералы l_1,l_2,l_3, то будем считать, что векторы $v_{2n+3j-2},v_{2n+3j-1},v_{2n+3j}$ соответствуют парам $\{l_1,l_2\},\{l_1,l_3\}$ и $\{l_2,l_3\}$. Пусть i — правая координата, соответствующая литералу l. Если l не входит в дизъюнкцию C_j, то полагаем $v_{2n+3j-2}(i)=v_{2n+3j-1}(i)=v_{2n+3j}(i)=1/2$. В противном случае, для $k=0,1,2$ полагаем i-ю координату вектора $v_{2n+3j-k}$ равной 0, если l входит в соответствующую этому вектору пару, и 1 иначе.

Ниже приведём пример задачи ВВ, соответствующей примеру задачи 3-SAT при $n=2$ и $m=2$ с переменными z_1,z_2,z_3 и дизъюнкциями $z_1\bigvee z_2\bigvee \bar{z}_2$ и $\bar{z}_1\bigvee z_2\bigvee z_3$ (вектор v_i совпадает с i-й строкой матрицы, $i=1,2,\dots,12$):

$$
\begin{pmatrix}
a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0\\
0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0\\
0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0\\
0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c\\
0 & 0 & 0 & 2a & -a & -a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2\\
0 & 0 & 0 & -a & 2a & -a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2\\
0 & 0 & 0 & -a & -a & 2a & 0 & 0 & 0 & b & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & -a & -a & b & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 2a & -a & b & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -a & 2a & b & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2
\end{pmatrix}.
$$

Покажем, что подмножество $V' \subseteq V$ такое, что $\|\sum_{v \in V'} v\| \geqslant K$, существует тогда и только тогда, когда набор дизъюнкций выполним.

Предположим, что найдётся такое назначение истинности переменных, что каждая из дизъюнкций C_j содержит истинный литерал l_j. Тогда для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ включим в V' вектор v_{2i-1}, если переменная z_i ложна, и вектор v_{2i}, если она истинна. Кроме того, для каждого $j = 1, 2, \dots, m$ добавим в V' те два из векторов $v_{2n+3j-2}, v_{2n+3j-1}, v_{2n+3j}$, соответствующие которым пары содержат литерал l_j. Полученное множество V' содержит $n + 2m$ векторов. Положим $u = \sum_{v \in V'} v$. Очевидно, что сумма квадратов левых координат вектора u равна $(6m+n)a^2$, а квадрат центральной координаты равен $(n+2m)^2 b^2$. Назовём правую координату вектора u *существенной*, если она не меньше c. Ясно, что в u имеется ровно n существенных координат. Из выбора первых n векторов из V' вытекает, что правая координата i вектора u является существенной тогда и только тогда, когда соответствующий этой координате литерал ложен. Но тогда у вектора u найдётся n правых координат, равных $c + m$. Действительно, пусть i — существенная координата. Если литерал l, соответствующий координате i, не входит в дизъюнкцию C_j, то $v_{2n+3j-2}(i) = v_{2n+3j-1}(i) = v_{2n+3j}(i) = 1/2$ и сумма двух выбранных в V' векторов добавляет 1 в i-ю координату вектора u. Если же l входит в C_j, то поскольку l ложен, один из выбранных векторов соответствует паре, не содержащей l. Следовательно, его i-я координата равна 1. Так как всего имеется m дизъюнкций, то i-я координата вектора u равна $c+m$. Следовательно, $\|u\|^2 \geqslant (6m+n)a^2 + (n+2m)^2 b^2 + n(c+m)^2 \geqslant K^2$.

Допустим теперь, что найдётся такое множество векторов V', что $\|u\| \geqslant K$, где $u = \sum_{v \in V'} v$. Заметим, что сумма квадратов левых координат вектора u не превосходит $(6m+n)a^2$, центральная координата не превышает $(2n+3m)b$, а любая правая координата не больше $(c + 3m/2)$. Поэтому если хоть одна из левых координат вектора u равна нулю, то

$$\|u\|^2 \leqslant (6m+n-1)a^2 + (2n+3m)^2 b^2 + 2n(c+3m/2)^2 \\ < K^2 - a^2 + ((2n+3m)^2+1)b^2 < K^2$$

по выбору a и b; противоречие. Значит, все левые координаты вектора u положительны, а это означает, что V' содержит по одному из векторов v_{2i-1}, v_{2i} для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, а также один или два из векторов $v_{2n+3j-2}, v_{2n+3j-1}, v_{2n+3j}$ для каждого $j = 1, 2, \dots, m$. Покажем, что для каждого $j = 1, 2, \dots, m$ множество V' содержит ровно два вектора из $\{v_{2n+3j-2}, v_{2n+3j-1}, v_{2n+3j}\}$. Действительно, в противном случае центральная координата вектора u не превосходит $(n + 2m - 1)b$ и

$$\|u\|^2 \leqslant (6m + n)a^2 + (n + 2m - 1)^2 b^2 + 2n(c + 3m/2)^2 \\ < K^2 - (2n + 4m - 1)b^2 + b^2 < K^2,$$

что противоречит выбору V'. Таким образом, V' содержит ровно по два вектора из $\{v_{2n+3j-2}, v_{2n+3j-1}, v_{2n+3j}\}$ и $|V'| = n + 2m$. Положим теперь переменную z_i истинной, если V' содержит вектор v_{2i}, и ложной, если V' содержит вектор v_{2i-1}. Вектор u содержит ровно n существенных правых координат, значения которых лежат в интервале $[c, c+m]$; значение любой из остальных правых координат не превышает m. Если бы все три литерала, входящих в дизъюнкицию C_j, были ложными, то выбранные два вектора из $\{v_{2n+3j-2}, v_{2n+3j-1}, v_{2n+3j}\}$ давали бы 0 хотя бы в одну из существенных координат вектора u, т. е. в u нашлась бы существенная координата, меньшая $c + m$. Но тогда

$$\|u\|^2 \leqslant (6m + n)a^2 + (n + 2m)^2 b^2 + (n - 1)(c + m)^2 + (c + m - 1)^2 + nm^2 \\ \leqslant K^2 - 2(c + m) + 1 + nm^2 < K^2$$

по выбору c; противоречие. Таким образом, каждая дизъюнкция содержит истинный литерал. Теорема 1 доказана.

В заключение отметим, что вопрос существования полиномиальных от n и k приближённых алгоритмов решения этой задачи с гарантированной оценкой точности остаётся открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В.** Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 1. — С. 32–42.
2. **Бабурин А. Е., Пяткин А. В.** О полиномиальных алгоритмах решения одной задачи суммирования векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 3–10.
3. **Гимади Э. Х., Пяткин А. В., Рыков И. А.** О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножества векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 11–19.
4. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир. 1982. — 416 с.

5. **Кадец М. И.** Об одном свойстве векторных ломаных в n-мерном пространстве // Успехи мат. наук. — 1953. — Т. 8, вып. 1. — С. 139–143.
6. **Кельманов А. В., Пяткин А. В.** Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 20–34.

Пяткин Артём Валерьевич,
e-mail: artem@math.nsc.ru

Статья поступила
4 августа 2009 г.