ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2009. Том 16, № 6. С. 74–92

УДК 519.17

ТОЧНЫЕ ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА РАЗЛИЧНЫХ ШАРОВ ЗАДАННОГО РАДИУСА В ГРАФАХ С ФИКСИРОВАННЫМИ ЧИСЛОМ ВЕРШИН И ДИАМЕТРОМ *)

Т. И. Федоряева

Аннотация. На основе исследования расположения центров различных шаров получены точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса для n-вершинных обыкновенных связных графов диаметра d.

Ключевые слова: граф, диаметр графа, метрический шар, радиус шара, число шаров, оценки.

Введение

Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ — конечное метрическое пространство, $B_i(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant i\}$ — шар радиуса i с центром в точке x. Рассмотрим покрытия пространства $\mathcal{X}$ перекрывающимися шарами фиксированного радиуса. Согласно, например, [3] плотность таких покрытий определяется как среднее число шаров, содержащих точку пространства. Математической формализацией этого понятия может служить функция $\Theta : \mathcal{M}_i \to \mathbb{Q}^+$ [6], определяемая следующим образом:

$$\Theta(M) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \theta_M(x),$$

где $\mathcal{M}_i$ — совокупность всех покрытий пространства $\mathcal{X}$ шарами радиуса i, $M \in \mathcal{M}_i$, $\theta_M : X \to \mathbb{N}$, $\theta_M(x)$ — число элементов покрытия M, содержащих $x \in X$. Ввиду конечности пространства $\mathcal{X}$ существует покрытие с наибольшей плотностью. Такие покрытия естественным образом возникают, когда, например, требуется максимизировать плотность покрытия системы связи, износоустойчивость различного рода промышленных покрытий, защищённость для схем элементов, степень контроля

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00671).

и т. п. Поскольку функция плотности Θ строго возрастает на $\mathcal{M}_i$ относительно порядка по включению (см. утверждение 1 из [6]), покрытие пространства $\mathcal{X}$ шарами фиксированного радиуса i с наибольшей плотностью представляет собой систему всех различных шаров радиуса i, а число элементов такого покрытия равно числу $\tau_i(\mathcal{X})$ всех различных шаров радиуса i пространства $\mathcal{X}$.

На величину $\tau_i(\mathcal{X})$ можно также взглянуть с другой стороны. В случае дискретных метрических пространств различные шары одного радиуса могут иметь разные «форму» и «объём» (см., например, метрическое пространство графа, изображённого на рис. 1, где $B_1(a) = \{a, x, y\}$, $B_1(x) = B_1(y) = \{a, b, x, y\}$ и $B_1(b) = \{b, x, y\}$).

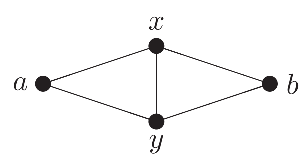

Рис. 1

В этой связи величина $\tau_i(\mathcal{X})$ может рассматриваться как число «способов размещения» шара радиуса i в n-элементном метрическом пространстве $\mathcal{X}$.

Далее возникает вопрос: каково наибольшее число шаров заданного радиуса (а значит, и наибольшая плотность соответствующего покрытия) в метрических пространствах фиксированного «объёма»? Формализацией этого вопроса для метрических пространств обыкновенных связных графов с обычным расстоянием между вершинами (т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины) является задача нахождения числа

$$\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d}) = \max_{G \in \Gamma_{n,\,d}} \tau_i(G), \quad i \geqslant 0,$$

где $\Gamma_{n,\,d}$ — класс всех n-вершинных обыкновенных связных графов диаметра d. Отметим, что для класса Γ^d всех графов диаметра d максимум значений $\tau_i(G)$, $G \in \Gamma^d$, не достигается при любых $d > 0$ и $i < d$ (это следует, например, из существования для каждого $n \geqslant 2d > 0$ графа из класса $\Gamma_{n,\,d}$ с полным разнообразием шаров [6]).

В общем виде для различных классов графов задача нахождения точных верхних и нижних оценок числа различных шаров заданного радиуса была сформулирована в [5, 6] и решена для класса $\Gamma_n(\mathrm{T}_n)$ всех n-вершинных обыкновенных связных графов (деревьев) и класса $\mathrm{T}_{n,\,d}$ всех n-вершинных деревьев диаметра d, т. е. установлены точные значения

$\overline{\tau}_i(\Gamma_n)$, $\underline{\tau}_i(\Gamma_n)$, $\overline{\tau}_i(\mathrm{T}_n)$, $\underline{\tau}_i(\mathrm{T}_n)$, $\overline{\tau}_i(\mathrm{T}_{n,\,d})$, $\underline{\tau}_i(\mathrm{T}_{n,\,d})$ для любого $i \geqslant 0$. Вопрос о точных верхних оценках $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d})$ для класса $\Gamma_{n,\,d}$ оставался открытым (точные нижние оценки $\underline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d})$ получены в [5, 6]). В настоящей статье данный вопрос решается (теорема 2). Далее, числа $\tau_i(G), i \geqslant 0$, образуют вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_i(G), \tau_{i+1}(G), \ldots)$, называемый *вектором разнообразия шаров* графа G [4], причём для них выполняется система неравенств $\tau_0(G) = |V(G)| \geqslant \ldots \geqslant \tau_i(G) \geqslant \tau_{i+1}(G) \geqslant \ldots \geqslant \tau_d(G) = 1$ (здесь $V(G)$ — множество вершин графа G и $d = d(G)$ — диаметр графа G), отмеченная в [1], где впервые были рассмотрены такие векторы. Таким образом, теорема 2 даёт покомпонентные точные верхние оценки векторов разнообразия шаров для графов класса $\Gamma_{n,\,d}$. Заметим, что для классов графов Γ_n, T_n, $\mathrm{T}_{n,\,d}$ в [6] доказана достижимость точных верхних (точных нижних) оценок числа различных шаров заданного радиуса в одном и том же графе из соответствующего класса независимо от рассматриваемого радиуса шаров и описаны такие экстремальные графы. Следовательно, для указанных классов графов существует наибольший (наименьший) вектор разнообразия шаров относительно естественного порядка. В этой связи интересен аналог этого факта для класса графов $\Gamma_{n,\,d}$, однако этот вопрос не рассматривается в данной работе.

Результаты работы анонсированы в [7].

В статье рассматриваются конечные обыкновенные связные графы и используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [2]. Для графа G обозначим через $n(G)$ — число вершин, $\rho_G(x, y)$ — обычное расстояние между вершинами x и y, $B_i^G(x)$ — шар радиуса i с центром в вершине $x \in V(G)$ относительно метрики ρ_G.

Множество всех вершин графа G, лежащих на всех кратчайших цепях, соединяющих вершины x и y, называется *интервалом* $[x, y]_G$. Естественным образом определяются полуоткрытый интервал $[x, y)_G$ и открытый интервал $(x, y)_G$. Для простой цепи P графа G, содержащей вершины x и y, через $P[x, y)$ и $P(x, y)$ будем обозначать соответственно полуоткрытый интервал $[x, y)_P$ и открытый интервал $(x, y)_P$. В приведённых выше обозначениях будем опускать индекс G, если понятно, о каком графе G идёт речь, и для краткости вместо $x \in V(G)$ будем писать $x \in G$.

Будем говорить, что граф G *содержит кратчайшую цепь* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, если существует кратчайшая цепь P графа G с концами v_1, v_n такая, что $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V(P)$, $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \rho_G(v_i, v_{i+1}) = \rho_G(v_1, v_n)$ (причём не обязательно $v_i \neq v_{i+1}$). В этом случае будем писать $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Для произвольной кратчайшей цепи P, содержащей вершины $v_1, v_2, \dots, v_n$ с указанными выше свойствами, через $P[v_1, v_2, \dots, v_n]$ будем обозначать её часть, ограниченную вершинами v_1, v_n.

Всюду далее считаем, что рассматриваемый класс графов $\Gamma_{n,d}$ не пуст, т. е. $n \geqslant d+1 \geqslant 2$ или $n = d+1 = 1$.

1. Предварительные результаты

Всюду в статье для рассматриваемого графа G через P будем обозначать его произвольно зафиксированную диаметральную цепь, через a и b — концы цепи P, через a_i и b_i — вершины цепи P такие, что $\rho(a, a_i) = \rho(b, b_i) = i$, $0 \leqslant i \leqslant d(P)$. Для произвольной вершины x графа G и $u \in \{a, b\}$ определим вершину x_u такую, что

$$x_u \in P \quad \text{и} \quad \rho(u, x_u) = \max_{z \in P} \{\rho(u, z) \mid \rho(u, z) + \rho(z, x) = \rho(u, x)\}. \qquad (1)$$

Ясно, что вершина x_u определяется однозначно по x и u.

Лемма 1. *Пусть x — вершина графа G, $u \in \{a, b\}$. Тогда*

(i) *$x_u = x$, если $x \in P$;*

(ii) *существует кратчайшая цепь C_{xu} с концами x и u, содержащая вершину x_u, такая, что*

$$C_{xu}[u, x_u] = P[u, x_u], \;\; C_{xu}[x, x_u] \cap P = \{x_u\}; \qquad (2)$$

(iii) *$x_a \in P[a, x_b]$, $x_b \in P[x_a, b]$.*

Доказательство. Утверждения (i), (ii) непосредственно следуют из (1). Докажем (iii). Предположим противное. Тогда $x_a \neq x_b$ и $x_a \in C_{xa}[x, x_b]$, $x_b \in C_{xb}[x, x_a]$ в силу утверждения (ii). Следовательно, $\rho(x, x_b) = \rho(x, x_a) + \rho(x_a, x_b) = \rho(x, x_b) + 2\rho(x_a, x_b)$, т. е. $x_a = x_b$; противоречие. Лемма 1 доказана.

В дальнейшем будем использовать обозначение C_{xu} для произвольно зафиксированной кратчайшей цепи с указанными свойствами в утверждении (ii) леммы 1.

Нетрудно доказать следующее

Утверждение 1. *Пусть в графе G существуют кратчайшие цепи (x, x', y') и (y, y', x'). Тогда выполняется в точности одно из следующих условий:*

(i) *в графе G существует кратчайшая цепь (x, x', y', y);*

(ii) *$n(G) \geqslant n(G_{x,x',y',y}) + \rho(x', y') - \delta(x', y')$ и существует кратчайшая цепь C с концами x'', y'' такая, что $x'' \in [x, x']_G$, $y'' \in [y, y']_G$, $C(x'', y'') \cap G_{x,x',y',y} = \varnothing$ и $\rho(x', y') \leqslant \rho(x'', y'') < \rho(x'', x') + \rho(x', y') + \rho(y', y'')$.*

Здесь $\delta(x,y)$ — предикат равенства и $G_{x,x',y',y}$ — подграф графа G, состоящий из всех вершин z, удовлетворяющих одному из следующих двух условий:

1) $z \in [x,x']_G \cup [y,y']_G$;

2) для некоторой вершины $z' \in [x',y']_G$ существует кратчайшая цепь (z,z',x) или (z,z',y).

В следующей лемме для графов с «малым» (относительно диаметра) числом вершин изучается расположение «длинных» кратчайших цепей.

Лемма 2. *Пусть x,y — вершины графа $G \in \Gamma_{n,\,d}$ и $\rho(x,y) > n-d$. Тогда*

(i) *$n(P\cap C) > 2$, где C — произвольная кратчайшая цепь с концами x,y;*

(ii) *если $C=(x,x',y',y)$ — кратчайшая цепь такая, что $C[x,x']\cap P = \{x'\}$, $C[y,y']\cap P = \{y'\}$ и $\rho(u,y') \leqslant \rho(u,x')$ (рис. 2a), то $C[x,x']\cup P[x',y',u]$, $C[y,y']\cup P[y',x',v]$ — кратчайшие цепи графа G длины не менее $\rho(x,y)$, где $u,v\in\{a,b\}$ и $u\neq v$.*

(iii) *$C_{xy} = C_{xu}[x,x_u]\cup P[x_u,y_v]\cup C_{yv}[y_v,y]$ — кратчайшая цепь графа G, $\rho(u,y_v) < \rho(u,x_u)$, $\rho(x,u)\geqslant\rho(x,y)$, $\rho(y,v)\geqslant\rho(x,y)$ для некоторых различных вершин $u,v\in\{a,b\}$ (рис. 2b).*

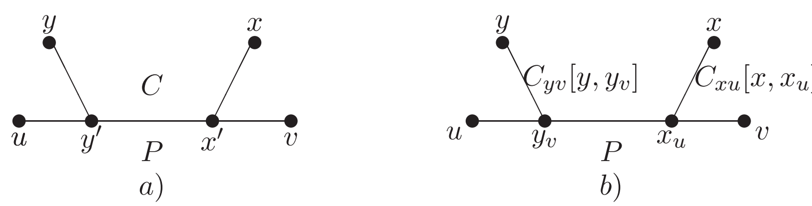

Рис. 2

Отметим, что в утверждении (ii) вершина x может совпадать с вершиной x' (вершина y — с вершиной y'), а в утверждении (iii) вершина x может совпадать с вершиной x_u (вершина y — с вершиной y_v).

Доказательство. Утверждение (i) следует из неравенства

$$n(P\cap C) = n(P) + n(C) - n(P\cup C) \geqslant d+1+\rho(x,y)+1-n > 2.$$

Докажем утверждение (ii). Введём обозначения:

$$C' = C[x,x']\cup P[x',y',u], \quad C'' = C[y,y']\cup P[y',x',v].$$

Применим утверждение 1. Так как $P\cup C \subseteq G_{x,x',y',u}$, то

$$\begin{aligned} n(G_{x,x',y',u}) + \rho(x',y') - \delta(x',y') &\geqslant n(P\cup C) + n(C[x',y']) - 2 \\ &\geqslant d+\rho(x,y) - n(P\cap C) + n(C[x',y']) > n. \end{aligned}$$

Следовательно, по утверждению 1 в графе G существует кратчайшая цепь (x, x', y', u). Поэтому цепь C' является кратчайшей. Аналогично доказывается, что C'' — кратчайшая цепь. Так как длина кратчайшей цепи C'' не превосходит длины диаметральной цепи P, то $\rho(y', u) \geqslant \rho(y', y)$. Следовательно, $\rho(x, u) = \rho(x, y') + \rho(y', u) \geqslant \rho(x, y') + \rho(y', y) = \rho(x, y)$, так как C и C' — кратчайшие цепи. Аналогично доказывается, что $\rho(y, v) \geqslant \rho(x, y)$.

Докажем утверждение (iii). Пусть C — кратчайшая цепь с концами x, y. По утверждению (i) граф $C \cap P$ содержит различные вершины. Пусть x', y' — соответственно первая и последняя вершины из $C \cap P$ при переходе от x к y по цепи C. Тогда $\rho(u, y') < \rho(u, x')$ для некоторой вершины $u \in \{a, b\}$. Пусть $v \in \{a, b\} \setminus \{u\}$ (см. рис. 2а). Так как $C[x, x'] \cap P = \{x'\}$ и $C[y, y'] \cap P = \{y'\}$, то по утверждению (ii) в графе G имеются кратчайшие цепи (x, x', y', u) и (y, y', x', v), причём $\rho(x, u) \geqslant \rho(x, y)$ и $\rho(y, v) \geqslant \rho(x, y)$. В силу (1) получаем $x_u \in P[x', v]$ и $y_v \in P[u, y']$. Тогда $\rho(u, y_v) < \rho(u, x_u)$. Так как имеем кратчайшие цепи $C[x, x', y', y]$, $C_{xu}[x, x_u, x']$, $P[x_u, x', y', y_v]$, $C_{yv}[y, y_v, y']$, то заключаем, что C_{xy} — кратчайшая цепь графа G. Лемма 2 доказана.

Следствие 1 [6]. *Пусть* $G \in \Gamma_{n,d}$, $i \geqslant n - d$, $i \geqslant \lceil d/2 \rceil$. *Тогда для любой вершины* $x \in P[a_i, b_i]$ *справедливо равенство* $B_i(x) = G$.

Доказательство. Пусть $x \in P[a_i, b_i]$. Так как $i \geqslant \lceil d/2 \rceil$, то $\rho(x, a) \leqslant i$ и $\rho(x, b) \leqslant i$. Тогда $B_i(x) = G$ в силу утверждения (iii) леммы 2. Следствие 1 доказано.

Введём следующее обозначение:

$$M_i(P) = \{x \in G \mid \forall y \in P \;\; B_i(x) \neq B_i(y)\}, \quad i \geqslant 0. \tag{3}$$

Лемма 3. *Пусть* $G \in \Gamma_{n,d}$, $i \geqslant n - d$, $i > \lfloor d/2 \rfloor$. *Тогда*

$$x \in M_i(P) \Leftrightarrow \rho(x, a) > i \quad \text{и} \quad \rho(x, b) > i.$$

Доказательство. Пусть $x \in M_i(P)$. Так как $B_i(a_i) = G$ по следствию 1, в силу (3) существует вершина $z \notin B_i(x)$. Тогда по утверждению (iii) леммы 2 имеем $\rho(x, w) \geqslant \rho(x, z) > i$ для некоторой вершины $w \in \{a, b\}$. Пусть, например, $w = a$, т. е. $\rho(x, a) > i$ (случай $\rho(x, b) > i$ аналогичен). Предположим от противного, что $\rho(x, b) \leqslant i$. Обозначим вершину $a_{\rho(a,x)}$ через x'. Так как C_{xa}, P — кратчайшие цепи и $x_a \in C_{xa} \cap P$, то

$$x' \in P[x_a, b], \quad \rho(x_a, x) = \rho(x_a, x'). \tag{4}$$

В силу (3) имеем $B_i(x) \neq B_i(x')$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Существует вершина $y \in B_i(x')\backslash B_i(x)$. Поскольку $\rho(x,y) > i \geqslant \rho(x,b)$, для пары вершин x, y в утверждении (iii) леммы 2 имеем $u = a$ и $v = b$ (см. рис. 2b). Поэтому в графе G имеем кратчайшие цепи $C_{xy}[y, y_b, x_a, x]$ и $C_{yb}[y, y_b, x_a, x']$. Следовательно, учитывая (4), получаем $\rho(y,x) = \rho(y,x')$; противоречие условию случая 1.

Случай 2. Существует вершина $y \in B_i(x) \setminus B_i(x')$. Так как $\rho(a,x) > i > \lfloor d/2 \rfloor$, то $\rho(x',b) \leqslant i$. Поэтому $\rho(x',y) > i \geqslant \rho(x',b)$. Следовательно, для пары вершин x', y выполняется утверждение (iii) леммы 2, причём $u = a$ и $v = b$. Тогда $\rho(a, y_b) < \rho(a, x'_a)$. По лемме 1(i) имеем $x'_a = x'$. Следовательно, $x' \in P(y_b, b] \subseteq C_{yb}$. Тогда $\rho(a,x) + \rho(y,b) = \rho(a,x') + \rho(y,x') + \rho(x',b) = d + \rho(y,x')$. Следовательно,

$$\rho(a,x) + \rho(y,b) > d + i. \tag{5}$$

Покажем, что

$$n(G) \geqslant n(C_{xa}) + n(C_{yb}) - 2. \tag{6}$$

Действительно, можно считать, что $C_{xa} \cap C_{yb} \neq \varnothing$ (иначе (6) очевидно). Пусть z_1, z_2 — соответственно первая и последняя вершины из $C_{xa} \cap C_{yb}$ при переходе от y к b по цепи C_{yb}, а u_i — концевая вершина цепи C_{xa} такая, что $\rho(u_i, z_i) \leqslant \rho(u_i, z_j)$ при $i \neq j,\ i = 1, 2$, причём $u_1 \neq u_2$. Тогда

$$\begin{gathered} C_{yb} = (y, z_1, z_2, b), \quad C_{xa} = (u_1, z_1, z_2, u_2),\ u_1, u_2 \in \{x, a\}, \\ C_{xa} \cap C_{yb} \subseteq C_{yb}[z_1, z_2]. \end{gathered} \tag{7}$$

Нетрудно показать, что

$$C_{xa} \cup C_{yb} \subseteq G_{u_1,z_1,z_2,b} \cap G_{y,z_1,z_2,u_2}, \tag{8}$$

где $G_{u_1,z_1,z_2,b}$, G_{y,z_1,z_2,u_2} — подграфы, определённые в утверждении 1. Теперь покажем, что в графе G нет кратчайшей цепи (u_1, z_1, z_2, b) или (y, z_1, z_2, u_2). Предположим противное, тогда

$$\rho(u_1, b) = \rho(u_1, z_2) + \rho(z_2, b),$$

$$\rho(y, u_2) = \rho(y, z_2) + \rho(z_2, u_2).$$

Суммируя почленно эти равенства и используя (7), получаем

$$\rho(u_1, b) + \rho(y, u_2) = \rho(a, x) + \rho(y, b).$$

Ввиду (5) заключаем, что $\rho(u_1, b) > i$ и $\rho(y, u_2) > i$, где $u_1, u_2 \in \{a, x\}$ и $u_1 \neq u_2$. С другой стороны, $\rho(x, b) \leqslant i$ и $\rho(y, x) \leqslant i$; противоречие.

Таким образом, одна из вышеуказанных цепей не является кратчайшей. По утверждению 1 получаем $n(G) \geqslant n(G_{u_1,z_1,z_2,b}) + \rho(z_1, z_2) - \delta(z_1, z_2)$ или $n(G) \geqslant n(G_{y,z_1,z_2,u_2}) + \rho(z_1, z_2) - \delta(z_1, z_2)$. Тогда в силу (7) и (8) имеем $n(G) \geqslant n(C_{xa}) + n(C_{yb}) - n(C_{yb}[z_1, z_2]) + \rho(z_1, z_2) - 1 \geqslant n(C_{xa}) + n(C_{yb}) - 2$, т. е. справедливо (6).

Далее из (5), (6) и условия $i \geqslant n - d$ приходим к противоречию в случае 2.

Таким образом, получили противоречие в каждом из двух рассмотренных случаев. Значит, $\rho(x, b) > i$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\rho(x, a) > i$ и $\rho(x, b) > i$. Тогда

$$\forall z \in P[a, a_i] \;\; a \in B_i(z) \setminus B_i(x),$$

$$\forall z \in P[b_i, b] \;\; b \in B_i(z) \setminus B_i(x).$$

Так как $i > \lfloor d/2 \rfloor$, то $P = P[a, a_i] \cup P[b_i, b]$. Следовательно, $x \in M_i(P)$. Лемма 3 доказана.

Будем говорить, что в графе G выполняется *свойство i-пересекаемости*, если для любых различных вершин $x, y \in M_i(P)$ и произвольных простых цепей C_x, C_y с концами x', x и y', y таких, что $C_x \cap P = \{x'\}$ и $C_y \cap P = \{y'\}$, выполняется соотношение $C_x(x', x) \cap C_y(y, y') \neq \varnothing$.

Лемма 4. *Пусть $G \in \Gamma_{n,\,d}$, $i \geqslant n - d$, $i > \lfloor d/2 \rfloor$. Тогда если в графе G не выполняется свойство i-пересекаемости, то*

$$|M_i(P)| < \min\{n - \lceil d/2 \rceil - 1,\, d\} - i. \tag{9}$$

Доказательство. По условию в графе G существуют различные вершины $x, y \in M_i(P)$ и простые цепи C_x, C_y такие, что

$$C_x \cap P = \{x'\}, \;\; C_y \cap P = \{y'\}, \;\; C_x(x', x) \cap C_y(y', y) = \varnothing. \tag{10}$$

Так как $x' \in P$, то $\rho(c, x') \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$ для некоторой вершины $c \in \{a, b\}$. Тогда, используя неравенство треугольника, лемму 3 и условие $i > \lfloor d/2 \rfloor$, получаем $\rho_P(c, x') + \rho_{C_x}(x', x) \geqslant \rho(c, x) > i > \rho_P(c, x')$. Следовательно, найдётся вершина $x'' \in C_x(x', x)$ такая, что $\rho_P(c, x') + \rho_{C_x}(x', x'') = i$. Используя лемму 3, получаем

$$C_x(x', x''] \cap M_i(P) = \varnothing, \;\; n(C_x(x', x'']) \geqslant i - \lfloor d/2 \rfloor. \tag{11}$$

Аналогично можно выбрать вершину $y'' \in C_y(y', y)$ такую, что

$$C_y(y', y''] \cap M_i(P) = \varnothing, \;\; n(C_y(y', y'']) \geqslant i - \lfloor d/2 \rfloor. \tag{12}$$

В силу (3), (10)–(12) имеем $M_i(P) \subseteq (G \setminus P) \setminus (C_x(x', x''] \cup C_y(y', y''])$ и $|M_i(P)| \leqslant n - (d+1) - 2(i - \lfloor d/2 \rfloor)$. Поскольку $i > \lfloor d/2 \rfloor$ и $i \geqslant n - d$, получаем (9). Лемма 4 доказана.

Определение 1. Для произвольной вершины x графа G назовём набор $(P_a, a', P_b, b', P, x_{ab})$ *x-конфигурацией*, если $a', b', x_{ab} \in G$ и $P_a = (a, a', x_{ab}, x)$, $P_b = (b, b', x_{ab}, x)$, $P = (a, a', b', b)$ — кратчайшие цепи графа G такие, что

$$P_a \cap P = P[a, a'], \;\; P_b \cap P = P[b', b], \tag{13}$$

$$P_a \cap P_b = P_a[x_{ab}, x]. \tag{14}$$

Понятно, что x-конфигурация $(P_a, a', P_b, b', P, x_{ab})$ определяет подграф графа G, образованный тремя кратчайшими цепями P_a, P_b, P, изображённый на рис. 3.

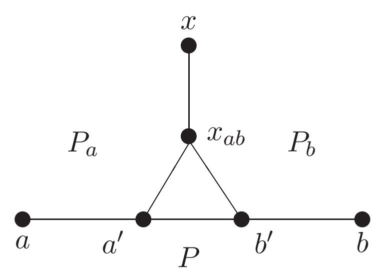

Рис. 3

Заметим также, что этот подграф, вообще говоря, не является изометрическим (внутри «треугольника» с вершинами a', b', x_{ab} возможны рёбра, не лежащие на его «сторонах»).

Далее будем использовать специальные x-конфигурации при $a' = x_a$ и $b' = x_b$.

Лемма 5. *Пусть x — вершина графа $G \in \Gamma_{n,\,d}$. Тогда*

(i) *существует x-конфигурация $(P_a, x_a, P_b, x_b, P, x_{ab})$;*

(ii) *для любой x-конфигурации $(P_a, a', P_b, b', P, x_{ab})$ вершины a', b', x_{ab} либо различны, либо совпадают;*

(iii) *$\rho(x, y) \leqslant n - d$ для любой вершины $y \in P[x_a, x_b]$.*

Доказательство. Докажем утверждение (i). Пусть x_{ab} — первая вершина из $C_{xa} \cap C_{xb}$ при переходе от b к x по цепи C_{xb}. Положим $P_a = C_{xa}$, $P_b = C_{xb}[b, x_{ab}] \cup C_{xa}[x_{ab}, x]$. В силу выбора вершины x_{ab} выполняется (14). Из утверждений (ii) и (iii) леммы 1 имеем $P = (a, x_a, x_b, x)$ и $C_{xa}[a, x_a) \cap C_{xb} = C_{xb}[b, x_b) \cap C_{xa} = \varnothing$. Следовательно,

$$x_{ab} \in C_{xa}[x_a, x] \cap C_{xb}[x_b, x].$$

Тогда из (2) получаем $C_{xa}[x_{ab}, x] \cap P \subseteq \{x_{ab}\} \cap P \subseteq C_{xb} \cap P = P[x_b, b]$. Теперь с учётом (2) очевидно, что при $a' = x_a$, $b' = x_b$ выполняется (13).

Докажем (ii). В силу (14) x_{ab} является последней вершиной из $P_a \cap P_b$ при переходе от x к a по цепи P_a (от x к b по цепи P_b.) Из (13) получаем $P_a[a, a'] \cap P_b = P_a \cap P_b[b, b'] = \{a'\} \cap \{b'\}$. Следовательно, если $a' = b'$, то $a' \in P_a \cap P_b$ и поэтому $x_{ab} = a'$, а если $a' \neq b'$, то $x_{ab} \notin \{a', b'\}$.

Доказательство (iii) проведём от противного. Пусть $\rho(x, y) > n - d$ и $y \in P[x_a, x_b]$. По утверждению (iii) леммы 2 имеем $\rho(u, y_v) < \rho(u, x_u)$ для некоторых различных $u, v \in \{a, b\}$. Так как $y \in P$, то $y \notin P[x_a, x_b]$ в силу леммы 1(i), (iii); противоречие. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть в графе G выполняется свойство i-пересекаемости и $x, y \in M_i(P)$. Тогда*

(i) $x_a = y_a$, $x_b = y_b$ *и для любой x-конфигурации* $(P_a, x_a, P_b, x_b, P, x_{ab})$ *существует y-конфигурация* $(P'_a, x_a, P'_b, x_b, P, y_{ab})$ *такая, что* $x_{ab} = y_{ab}$;

(ii) *если* $G \in \Gamma_{n,d}$ *и* $i \geqslant n - d$, *то*

$$B_i(x) = B_i(y) \Leftrightarrow B_i(x) \cap P = B_i(y) \cap P.$$

Доказательство. Докажем (i). Пусть $x, y \in M_i(P)$. Тогда $x, y \notin P$ и можно считать, что $x \neq y$. Пусть $(P_a, x_a, P_b, x_b, P, x_{ab})$ — произвольная x-конфигурация. Через y' обозначим первую вершину из $C_{ya} \cap (P_a \cup P_b \cup P)$ при переходе от y к a по цепи C_{ya}. Тогда

1) если $y' \in P$, то $P_a(x_a, x) \cap C_{ya}(y', y) = \varnothing$;

2) если $y' \in P_a(x_a, x_{ab})$, то $P_b(x_b, x) \cap (P_a(x_a, y'] \cup C_{ya}[y', y)) = \varnothing$;

3) если $y' \in P_b(x_b, x_{ab})$, то $P_a(x_a, x) \cap (P_b(x_b, y') \cup C_{ya}[y', y)) = \varnothing$.

Следовательно, $y' \in P_a[x, x_{ab}]$ в силу свойства i-пересекаемости для графа G и $C_{ya}[y, y'] \cap P = \varnothing$ (рис. 4).

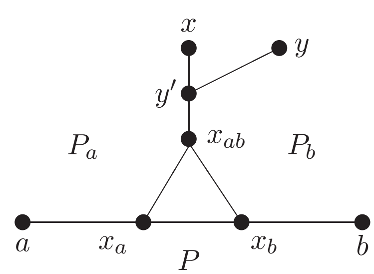

Рис. 4

Тогда в графе G имеем кратчайшие цепи $C_{ya}[y, y', y_a, a]$ и $P_a[x, y', x_{ab}, x_a, a]$. Следовательно, в G есть кратчайшие цепи $P'_a = C_{ya}[y, y'] \cup P_a[y', x_{ab},$

$x_a, a]$ и $P_a[x, y'] \cup C_{ya}[y', y_a, a]$. По (1) получаем $\rho(a, y_a) \geqslant \rho(a, x_a)$ и $\rho(a, x_a) \geqslant \rho(a, y_a)$, т. е. $x_a = y_a$.

Используя кратчайшую цепь C_{yb}, аналогично получаем, что $x_b = y_b$ и в графе G существует кратчайшая цепь

$$C_{yb}[y, y''] \cup P_b[y'', x_{ab}, x_b, b],$$

где $y'' \in P_b[x, x_{ab}]$. Используя её и $P'_a[y, y', x_{ab}]$, получаем кратчайшую цепь $P'_b = C_{ya}[y, y'] \cup P_b[y', x_{ab}, x_b, b]$, причём $P'_a \cap P'_b = P'_a[y, x_{ab}]$. Таким образом, в графе G построили y-конфигурацию $(P'_a, x_a, P'_b, x_b, P, x_{ab})$.

Докажем (ii). Пусть $i \geqslant n - d$ и $z \in B_i(x) \setminus B_i(y)$. По лемме 2(iii) в графе G существует некоторая кратчайшая цепь $C = (y, y_v, z_u, z)$ для некоторых различных вершин $u, v \in \{a, b\}$, причём

$$C[y_v, y] \cap P = \{y_v\},\ C[z_u, z] \cap P = \{z_u\}$$

и $y_v \neq z_u$. Тогда

$$C(y, y_v) \cap C(z, z_u) = \varnothing.$$

Следовательно, $z \notin M_i(P)$ в силу свойства i-пересекаемости графа G. Поэтому $B_i(z) = B_i(z')$ для некоторой вершины $z' \in P$. Тогда

$$z' \in (B_i(x) \cap P) \setminus (B_i(y) \cap P).$$

Обратное утверждение очевидно. Лемма 6 доказана.

Далее будем использовать следующее достаточное условие несовпадения шаров с центрами в различных вершинах [6]:

$$\forall x, y \in G\ \ \big((x \neq y\ \ \&\ \ e_G(x, y) \geqslant i + 1) \Rightarrow B_i^G(x) \neq B_i^G(y)\big), \tag{15}$$

где $e_G(x, y)$ — наибольшая длина кратчайшей цепи графа G с концом x, содержащей вершину y.

Обозначим через $M_i^*(P)$ произвольное максимальное по включению подмножество множества $M_i(P)$ такое, что $B_i(x) \neq B_i(y)$ для любых различных вершин $x, y \in M_i^*(P)$. Заметим, что хотя выбор $M_i^*(P)$, вообще говоря, неоднозначен, число элементов множества $M_i^*(P)$ не зависит от способа его выбора и определяется однозначно как число всех различных шаров с центрами из множества $M_i(P)$.

Лемма 7. *Пусть в графе $G \in \Gamma_{n,d}$ выполняется свойство i-пересекаемости, $i \geqslant n - d$, $i > \lfloor d/2 \rfloor$ и $M_i^*(P) \neq \varnothing$. Тогда*

(i) $|M_i^*(P)| = \min\{\rho(a, x^*), \rho(b, x^*)\} - i$, *где* $x^* \in M_i(P)$ *и*

$$\rho(a, x^*) = \max_{v \in M_i(P)} \rho(a, v);$$

(ii) $|M_i^*(P)| \leqslant \min\{n - \lceil d/2 \rceil - 1, d\} - i$.

Доказательство. Докажем (i). По лемме 5(i) существует некоторая x^*-конфигурация $(P_a, x^*_a, P_b, x^*_b, P, x^*_{ab})$. Пусть y — произвольная вершина из $M_i(P)$. Тогда в силу леммы 6(i) существует y-конфигурация $(P'_a, x^*_a, P'_b, x^*_b, P, x^*_{ab})$, причём $x^*_a = y_a$ и $x^*_b = y_b$. Учитывая выбор вершины x^* и кратчайшие цепи P_a и P'_a, получаем

$$\rho(a, x^*_{ab}) + \rho(x^*_{ab}, y) = \rho(a, y) \leqslant \rho(a, x^*) = \rho(a, x^*_{ab}) + \rho(x^*_{ab}, x^*).$$

Поэтому $\rho(x^*_{ab}, y) \leqslant \rho(x^*_{ab}, x^*)$. Выберем вершину $y' \in P_a[x^*_{ab}, x^*]$ такую, что $\rho(x^*_{ab}, y') = \rho(x^*_{ab}, y)$. Тогда, учитывая кратчайшие цепи P_a, P_b, P'_a и P'_b, получаем

$$\forall c \in P[a, x^*_a] \cup P[x^*_b, b] \quad \rho(y', c) = \rho(y, c). \tag{16}$$

Так как $y \in M_i(P)$, то $y' \in M_i(P)$ в силу (16) и леммы 3. По лемме 6(i) имеем $y'_a = x^*_a$ и $y'_b = x^*_b$. Тогда

$$\forall c \in P(x^*_a, x^*_b) \quad \rho(y', c) \leqslant i,\ \rho(y, c) \leqslant i \tag{17}$$

в силу леммы 5(iii). Таким образом, $B_i(y) \cap P = B_i(y') \cap P$ в силу (16) и (17). Отсюда по лемме 6(ii) имеем $B_i(y) = B_i(y')$.

Рассмотрим вершины $u, v \in \{a, b\}$ и вершину $x' \in P_u$ такие, что $u \neq v$, $\rho(u, x^*) \leqslant \rho(v, x^*)$ и $\rho(u, x') = i + 1$ (вершина x' существует в силу леммы 3 и условия $x^* \in M_i(P)$). Используя неравенство треугольника и кратчайшую цепь P_u, получаем

$$\rho(v, x') \geqslant \rho(v, x^*) - \rho(x', x^*) \geqslant \rho(u, x^*) - \rho(x', x^*) = \rho(u, x') > i.$$

Итак,

$$\rho(u, x') = i + 1,\ \ \rho(v, x') > i, \tag{18}$$

откуда по лемме 3 имеем $x' \in M_i(P)$. Если $x' \in P_u[x^*_u, x^*_{ab})$, то $x' \neq x^*$ и $P_u(x^*_u, x') \cap P_v(x^*_v, x^*) = \varnothing$, что противоречит свойству i-пересекаемости графа G. Поэтому $x' \in P_u[x^*_{ab}, x^*] = P_a[x^*_{ab}, x^*]$. Учитывая (18), лемму 3 и кратчайшие цепи P_a, P_b, получаем

$$M_i(P) \cap P_a[x^*_{ab}, x^*] = P_a[x', x^*]. \tag{19}$$

Следовательно, $y' \in P_a[x', x^*]$. Таким образом,

$$\forall y \in M_i(P)\ \exists y' \in P_a[x', x^*] \quad B_i(y) = B_i(y'). \tag{20}$$

Далее, имеем

$$\forall z_1, z_2 \in P_a[x', x^*] \quad (z_1 \neq z_2 \Rightarrow B_i(z_1) \neq B_i(z_2)) \tag{21}$$

в силу (15), (18) и очевидного неравенства $e(z_k, z_j) \geqslant \rho(x', u)$ для подходящих различных k, j. Из (18)–(21) получаем

$$|M_i^*(P)| = n(P_a[x', x^*]) = n(P_u[x', x^*]) = \rho(u, x^*) - i,$$

т. е. справедливо (i).

Докажем (ii). Для некоторой вершины $u \in \{a, b\}$ в силу леммы 1(iii) имеем $\rho(u, x_u^*) \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$. Тогда $|M_i^*(P)| \leqslant \rho(u, x^*) - i$ по доказанному утверждению (i). Далее, $\rho(u, x^*) \leqslant d$ и

$$\rho(u, x^*) = \rho(u, x_u^*) + \rho(x_u^*, x^*) \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + n(P_u(x_u^*, x^*]) \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + n - (d+1).$$

Лемма 7 доказана.

Замечание 1. В условиях леммы 7 в качестве $M_i^*(P)$ можно выбрать $P_a[x', x^*]$.

Рассмотрим вектор $\Delta_d = \left(\Delta_0^d, \Delta_1^d, \ldots, \Delta_d^d\right)$, определённый в [4] следующим образом:

$$\Delta_i^d = \begin{cases} d+1 & \text{при } 0 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor\,, \\ 2(d-i)+1 & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1 & \text{при } i \geqslant d. \end{cases} \qquad (22)$$

Лемма 8. *Пусть $G \in \Gamma_{n,d}$, P — диаметральная цепь графа G. Тогда*
(i) $\tau(P) = \Delta_d$;
(ii) $\tau_i(G) = \Delta_i^d + |M_i^*(P)|$, *если* $i \geqslant n - d$;
(iii) $\tau_i(G) = \Delta_i^d$, *если* $i \geqslant \min\{n - \lceil d/2 \rceil - 1, d\}$.

Доказательство. Утверждение (i) получено в [4]. Для доказательства (ii) сначала покажем справедливость следующего утверждения:

$$\forall x_1, x_2 \in P \quad \left(B_i^P(x_1) = B_i^P(x_2) \Leftrightarrow B_i^G(x_1) = B_i^G(x_2)\right). \qquad (23)$$

Действительно, пусть x_1, x_2 — различные вершины цепи P такие, что $B_i^P(x_1) = B_i^P(x_2)$. Рассмотрим различные индексы j, k такие, что $P = (a, x_j, x_k, b)$. Если $\rho(a, x_k) > i$, то $e_P(x_k, x_j) > i$ и, следовательно, $B_i^P(x_1) \neq B_i^P(x_2)$ в силу (15). Значит, $\rho(a, x_k) \leqslant i$, и аналогично получаем $\rho(b, x_j) \leqslant i$. Тогда $x_1, x_2 \in P[a_i, b_i]$ и $i \geqslant \lceil d/2 \rceil$. Учитывая условие $i \geqslant n - d$, по следствию 1 заключаем, что $B_i^G(x_1) = B_i^G(x_2) = G$. Обратная импликация в (23) очевидна.

Перейдём к доказательству (ii). Очевидно, что $\tau_i(G)$ — сумма числа α_i всех различных шаров графа G с центрами из P и числа β_i всех различных шаров графа G с центрами из $M_i(P)$. В силу (23), утверждения (i) и определения множества $M_i^*(P)$ имеем $\alpha_i = \Delta_i^d$ и $\beta_i = |M_i^*(P)|$.

Докажем (iii). В силу утверждения (i) и очевидного равенства $\tau_i(G) = \Delta_i^d = 1$ при $i \geqslant d$ можно считать, что $n \geqslant d+2$ и $i < d$. Пусть $i \geqslant \min\{n - \lceil d/2 \rceil - 1, d\}$. Тогда $i \geqslant n-d$ и $i > \lfloor d/2 \rfloor$. Используя леммы 5 и 8, получаем $M_i^*(P) = \varnothing$. Осталось применить утверждение (ii). Лемма 9 доказана.

2. Примеры графов из класса $\Gamma_{n,\,d}$

Пусть $\Gamma_{n,\,d} \neq \varnothing$. В этом параграфе рассматриваются примеры графов из класса $\Gamma_{n,\,d}$ и вычисляется их вектор разнообразия шаров. Как будет показано в теореме 2, на этих графах в соответствующих случаях достигаются точные верхние оценки $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,\,d})$ числа различных шаров заданного радиуса i в графах класса $\Gamma_{n,\,d}$.

Пример 1. Граф $H_{n,\,d,\,i}$. Для любого i, удовлетворяющего условиям $0 \leqslant i < d$ и $i \leqslant \max\{\lfloor d/2 \rfloor, n-d-1\}$, и при $i=d=0$ в [6] построен граф $H_{n,\,d,\,i} \in \Gamma_{n,\,d}$ и доказано следующее

Утверждение 2 [6]. *Пусть $i = d = 0$ или i удовлетворяет условиям $0 \leqslant i < d$ и $i \leqslant \max\{\lfloor d/2 \rfloor, n-d-1\}$. Тогда $n = \tau_0(H_{n,\,d,\,i}) = \tau_1(H_{n,\,d,\,i}) = \ldots = \tau_i(H_{n,\,d,\,i})$.*

Пример 2. Дерево $\overline{D}_{n,\,d}$. Пусть $T_{n,\,d} \neq \varnothing$, т. е. $1 \leqslant n = d+1 \leqslant 2$ или $n \geqslant d+1 \geqslant 3$. Найдём k и r из соотношений:

$$\begin{gathered} n = d + 1 + k\lfloor d/2 \rfloor + r; \\ k \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant r < \lfloor d/2 \rfloor,\ d \geqslant 2; \\ k = r = 0,\ d \leqslant 1. \end{gathered} \tag{24}$$

В [5, 6] построено дерево $\overline{D}_{n,\,d} \in T_{n,\,d}$ и доказана

Теорема 1 [5, 6]. *Имеют место равенства $\tau_i(\overline{D}_{n,\,d}) = \overline{\tau}_i(T_{n,\,d})$,*

$$\overline{\tau}_i(T_{n,\,d}) = \begin{cases} n,\ \ 0 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor, \\ n - (k+3)(i - \lfloor d/2 \rfloor) + \sigma,\ \ \lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + r, \\ n - r - (k+2)(i - \lfloor d/2 \rfloor) + \sigma,\ \ \lfloor d/2 \rfloor + r < i < d, \\ 1,\ \ i \geqslant d, \end{cases}$$

k, r определены в (24) *и $\sigma = d - 2\lfloor d/2 \rfloor$.*

Таким образом, для любого $i \geqslant 0$ в дереве $\overline{D}_{n,\,d}$ достигается точная верхняя оценка $\overline{\tau}_i(\mathrm{T}_{n,\,d})$ числа различных шаров радиуса i в деревьях класса $\mathrm{T}_{n,\,d}$.

Пример 3. Граф $\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}$. Для произвольных n и нечётного d определим граф $\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}$ из $\Gamma_{n,\,d}$ следующим образом. Найдём m и q из соотношений:

$$\begin{gathered} n = d + 1 + m\,\lceil d/2 \rceil + q; \\ m \geqslant 0, \ \ 0 \leqslant q < \lceil d/2 \rceil \ \text{при } d \geqslant 1; \\ m = q = 0 \text{ при } d = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Пусть P — простая цепь длины d с концами a, b. При $m = 0$ к P ничего не добавляем. Если $m > 0$, то образуем полный $(m+2)$-вершинный граф H с $V(H) = \{a_{\lfloor d/2 \rfloor}, b_{\lfloor d/2 \rfloor}, c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. К графу $P \cup H$ добавим простые цепи $P_1, P_2, \ldots, P_m$ с концами c_i, u_i соответственно длины $\lfloor d/2 \rfloor$ такие, что $V(P_i) \cap V(P \cup H) = \{c_i\}$ и $V(P_i) \cap V(P_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Если $q > 0$, то к полученному графу H' добавим простую q-вершинную цепь P_0 такую, что $V(P_0) \cap V(H') = \varnothing$. Далее один из концов c_0 цепи P_0 соединим ребром с каждой вершиной графа H. При $q = 0$ ничего не добавляем. Полученный граф обозначим через $\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}$ (рис. 5). Очевидно, что $\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d} \in \Gamma_{n,\,d}$.

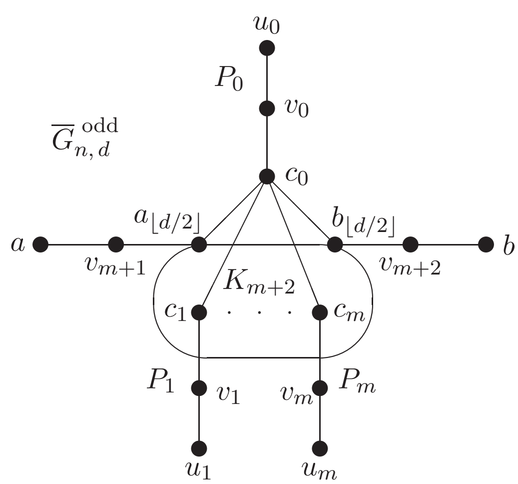

Рис. 5

В следующем утверждении вычисляется вектор разнообразия шаров графа $\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}$ и показывается, что для любого $i \geqslant 0$ в этом графе имеется не меньше, а при определённых соотношениях между n и d больше, различных шаров радиуса i, чем в дереве $\overline{D}_{n,\,d}$, причём $\tau_i(\overline{D}_{n,\,d}) = \overline{\tau}_i(\mathrm{T}_{n,\,d})$.

Утверждение 3. *Пусть d нечётно. Тогда*

(i) *имеет место равенство*

$$\tau_i\bigl(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}\bigr) = \begin{cases} n, \ \ 0 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor\,, \\ n-(m+3)(i-\lfloor d/2 \rfloor)+1, \ \ \lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + q, \\ n-q-(m+2)(i-\lfloor d/2 \rfloor)+1, \ \ \lfloor d/2 \rfloor + q < i < d, \\ 1, \ \ i \geqslant d, \end{cases}$$

где m и q определены в (25);

(ii) $\tau(\overline{D}_{n,\,d}) \leqslant \tau\bigl(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}\bigr)$ *при* $T_{n,d} \neq \varnothing$, *причём* $\tau(\overline{D}_{n,\,d}) = \tau\bigl(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}\bigr)$ *тогда и только тогда, когда* $d+1 \leqslant n < 3\,\lceil d/2 \rceil$;

(iii) *графы* $\overline{D}_{n,\,d}$ *и* $\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $n = d+1$.

Доказательство. Докажем утверждение (i). Пусть $0 \leqslant i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$. Нетрудно понять, что $e(x,y) > \lfloor d/2 \rfloor$ или $e(y,x) > \lfloor d/2 \rfloor$ для любых различных вершин x, y графа $\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}$. Следовательно, $\tau_i\bigl(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}\bigr) = n$ в силу (15).

Пусть $\lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + q$. Положим $c_{m+1} = a_{\lfloor d/2 \rfloor}$, $u_{m+1} = a$, $c_{m+2} = b_{\lfloor d/2 \rfloor}$, $u_{m+2} = b$, $P_{m+1} = P[c_{m+1}, u_{m+1}]$, $P_{m+2} = P[c_{m+2}, u_{m+2}]$. В силу выбора i для каждого $j = 0, 1, \ldots, m+2$ существует вершина $v_j \in P_j[c_j, u_j]$ такая, что $\rho(b, v_j) = \rho(a, v_{m+2}) = i$ при $j \leqslant m{+}1$ (см. рис. 5). Тогда $\rho(u_j, v_k) = i$ и $\rho(u_0, v_j) = i - \lfloor d/2 \rfloor + q \leqslant i$ при $j \neq 0$, $j \neq k$. Используя (15), как и выше получаем $B_i(x) \neq B_i(y) \neq \overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}$ для любых различных вершин $x, y \in \bigcup\limits_{j=0}^{m+2} P_j[u_j, v_j)$. Кроме того, очевидно, что $B_i(x) = \overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}$ для любой вершины $x \in \overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d} \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{m+2} P_j[u_j, v_j) = \bigcup\limits_{j=0}^{m+2} P_j[c_j, v_j]$. Таким образом,

$$\tau_i(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}) = n - \sum_{j=0}^{m+2} n(P_j[c_j, v_j]) + 1 = n - \sum_{j=0}^{m+1} (\rho(b, v_j) - \rho(b, c_j) + 1) \\ - (\rho(a, v_{m+2}) - \rho(a, c_{m+2}) + 1) + 1 = n - (m+3)(i - \lfloor d/2 \rfloor) + 1.$$

Случай $\lfloor d/2 \rfloor + q < i < d$ разбирается аналогично предыдущему случаю, за исключением того, что не существует вершины v_0.

Перед доказательством (ii) покажем, что $\tau_i(\overline{D}_{n,\,d}) \leqslant \tau_i\bigl(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,\,d}\bigr)$ для любого i. Можно считать, что $\lfloor d/2 \rfloor < i < d$. В силу (24), (25) имеем $k \geqslant m$. Далее применим утверждение (i), теорему 1 и рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + r$. Если $i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + q$, то

$$\tau_i(\overline{D}_{n,d}) \leqslant \tau_i\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big),$$

так как $m \leqslant k$. Если $i > \lfloor d/2 \rfloor + q$, то

$$\tau_i(\overline{D}_{n,d}) = n-(k+3)(i-\lfloor d/2 \rfloor)+1 < n-(m+2)(i-\lfloor d/2 \rfloor)-q+1 = \tau_i\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big).$$

Случай 2. $\lfloor d/2 \rfloor + r < i < d$. Если $k = m$, то $r \geqslant q$ в силу (24), (25) и, следовательно, $\tau_i(\overline{D}_{n,d}) \leqslant \tau_i\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big)$. Пусть теперь $k > m$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau_i(\overline{D}_{n,d}) &\leqslant n-(m+2)(i-\lfloor d/2 \rfloor)-(k-m)(i-\lfloor d/2 \rfloor)+1 \\ &\leqslant n-(m+3)(i-\lfloor d/2 \rfloor)+1 \leqslant \tau_i\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big).\end{aligned}$$

Итак, $\tau(\overline{D}_{n,d}) \leqslant \tau\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big)$.

Если $d+1 \leqslant n < 3\lceil d/2 \rceil$, то либо $k = m = 0$ и $r = q$, либо $m = 0$, $q = \lfloor d/2 \rfloor$, $k = 1$, $r = 0$. Тогда $\tau(\overline{D}_{n,d}) = \tau\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big)$ в силу утверждения (i) и теоремы 1.

Пусть $n \geqslant 3\lceil d/2 \rceil$ и $T_{n,d} \neq \varnothing$. Тогда $m \geqslant 1$, $d \geqslant 3$ и $\lfloor d/2 \rfloor + q \leqslant d-1$, $\lfloor d/2 \rfloor + r < d-1$. Используя утверждение (i) и теорему 1, получаем $\tau_{d-1}(\overline{D}_{n,d}) = 3 < m+3 = \tau_{d-1}\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big)$. Таким образом, $\tau(\overline{D}_{n,d}) \neq \tau\big(\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}\big)$, и утверждение (ii) доказано.

Для доказательства (iii) достаточно заметить, что $\overline{D}_{n,d}$ — дерево и граф $\overline{G}^{\,\mathrm{odd}}_{n,d}$ при $n \geqslant d+2$ имеет цикл. Утверждение 3 доказано.

3. Доказательство основной теоремы

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \begin{cases} n & \text{при } 0 \leqslant i < d \text{ и } i \leqslant \max\{\lfloor d/2 \rfloor, s\}, \\ 3(d-i)+1 & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor < s < i < d, \\ n+d+\lfloor d/2 \rfloor - 3i & \text{при } s \leqslant \lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + s \text{ и } i < d, \\ 2(d-i)+1 & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor + s < i < d, \\ 1 & \text{при } i \geqslant d, \end{cases}$$

где $s = n - d - 1$.

Доказательство. Пусть $G \in \Gamma_{n,d}$, $i \geqslant 0$ и $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \tau_i(G)$. Тогда для i выполняется в точности один из следующих случаев.

Случай 1. $i \geqslant d$. Очевидно, что $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = 1$.

Случай 2. $0 \leqslant i < d$ и $i \leqslant \max\{\lfloor d/2 \rfloor, s\}$. Тогда в силу утверждения 2 $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \tau_i(H_{n,d,i}) = n$.

Случай 3. $\lfloor d/2 \rfloor + s < i < d$. Тогда $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \Delta_i^d = 2(d-i)+1$ в силу (22) и леммы 8(iii).

Случай 4. $\max\{\lfloor d/2 \rfloor, s\} < i < d$ и $i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + s$. Тогда $i > \lfloor d/2 \rfloor$ и $i \geqslant n-d$. Используя леммы 4, 7 и 8(ii), получаем

$$\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \tau_i(G) = \Delta_i^d + |M_i^*(P)| \leqslant \Delta_i^d + \min\{\lfloor d/2 \rfloor + s, d\} - i. \qquad (26)$$

Далее применим формулы для вычисления $\tau_i(\overline{D}_{n,d})$ и $\tau_i\bigl(\overline{G}_{n,d}^{\,\mathrm{odd}}\bigr)$ из теоремы 1 и утверждения 3 соответственно, соотношение (22) и рассмотрим два возможных подслучая.

Случай 4.1. $s \leqslant \lfloor d/2 \rfloor < i \leqslant \lfloor d/2 \rfloor + s$ и $i < d$. Тогда из (24) получаем, что либо $k=0$ и $r=s$, либо $k=1$, $r=0$, $s=\lfloor d/2 \rfloor$. В каждом из этих двух случаев имеем

$$\tau_i(\overline{D}_{n,d}) = n - 3(i - \lfloor d/2 \rfloor) + \sigma = n + d + \lfloor d/2 \rfloor - 3i = \Delta_i^d + \lfloor d/2 \rfloor + s - i.$$

В силу (26) заключаем $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \tau_i(\overline{D}_{n,d})$.

Случай 4.2. $\lfloor d/2 \rfloor < s < i < d$. Тогда $k=m=1$, $r = s - \lfloor d/2 \rfloor$, $q = s - \lceil d/2 \rceil$ в силу (24) и (25). Если d чётно, то

$$\tau_i(\overline{D}_{n,d}) = n - r - 3(i - \lfloor d/2 \rfloor) = 3(d-i)+1 = \Delta_i^d + d - i.$$

Следовательно, $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \tau_i(\overline{D}_{n,d})$ в силу (26). Если d нечётно, то

$$\tau_i\bigl(\overline{G}_{n,d}^{\,\mathrm{odd}}\bigr) = n - q - 3(i - \lfloor d/2 \rfloor) + 1 = 3(d-i)+1 = \Delta_i^d + d - i.$$

Значит, $\overline{\tau}_i(\Gamma_{n,d}) = \tau_i\bigl(\overline{G}_{n,d}^{\,\mathrm{odd}}\bigr)$ в силу (26). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. — 1994. — Т. 1, № 1. — С. 5—12.
2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 383 с.
3. **Конвей Д., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1. — М.: Мир, 1990. — 413 с.
4. **Федоряева Т. И.** Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 74–84.

5. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров и свойства их компонент // Труды VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 4–6 марта 2006 г.). — М.: Изд-во МГУ, 2006. — С. 374–378.
6. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 47–67.
7. **Федоряева Т. И.** Точные верхние оценки компонент векторов разнообразия шаров для графов с заданным числом вершин и диаметром // Материалы XVII Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» им. академика О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября–1 ноября 2008 г.). — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2008. — С. 167–172.

Федоряева Татьяна Ивановна,
e-mail: stdd@academ.org

Статья поступила
1 июня 2009 г.
Переработанный вариант —
26 октября 2009 г.