ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2010. Том 17, № 1. С. 3–10

УДК 519.17

НЕЗАВИСИМЫЕ МНОЖЕСТВА В ГРАФАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ МИНОРАМИ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ

В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова

Аннотация. Характеризуются графы, у которых абсолютные величины миноров расширенной матрицы инцидентности ограничены сверху некоторой константой. Доказывается, что при любом фиксированном k задача о независимом множестве решается за полиномиальное время для графов, у которых абсолютные величины миноров матрицы, полученной из матрицы инцидентности добавлением столбца из единиц, не превосходят k.

Ключевые слова: расширенная матрица инцидентности, минор, задача о независимом множестве.

Введение

Известно, что задача целочисленного линейного программирования с вполне унимодулярной матрицей (т. е. матрицей, все миноры которой принимают значения 0, +1 и −1) решается за полиномиальное время. В. Н. Шевченко [4] высказал предположение о том, что это верно и в более общем случае, когда все миноры матрицы ограничены по абсолютной величине некоторой константой. Есть несколько вариантов этой гипотезы, в двух из них фигурируют расширенные матрицы задачи: в одном случае к ней добавляется столбец правых частей неравенств, в другом — строка коэффициентов целевой функции. В наши намерения входило подтвердить гипотезу Шевченко для специального вида матриц, именно, матрицы инцидентности графа и двух её расширенных вариантов. Как будет видно далее, это удалось лишь отчасти.

Мы рассматриваем матрицу инцидентности $I = I(G)$ обыкновенного графа G (строки соответствуют вершинам, столбцы — рёбрам) и расширенные матрицы: I' получается добавлением строки из единиц, I'' — столбца из единиц. Через $M(G)$ ($M'(G)$, $M''(G)$) обозначается наибольшая из абсолютных величин миноров матрицы I (I', I''). Первая цель

настоящей работы — получить описание классов графов $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{M}'_k$, $\mathcal{M}''_k$, у которых величина M, M', M'' соответственно не превосходит k. Все три класса являются наследственными в сильном смысле, т. е. замкнуты относительно удаления вершин и рёбер, поэтому они могут быть описаны запрещёнными подграфами. Для класса $\mathcal{M}_k$ такое описание известно [5] — минимальными запрещёнными подграфами для него являются графы, у которых каждая компонента связности — нечётный цикл. Мы покажем, что $\mathcal{M}'_k = \mathcal{M}_k$, и охарактеризуем запрещённые подграфы для класса $\mathcal{M}''_k$. Мы также покажем, что задача о независимом множестве для графов из класса $\mathcal{M}''_k$ при любом фиксированном k решается за полиномиальное время.

1. Матрица с добавленной строкой

Графы, не имеющие общих вершин, называем *разобщёнными*. Обозначим через $t(G)$ наибольшее число попарно разобщённых нечётных циклов в графе G.

Теорема 1 [5]. $M(G) = 2^{t(G)}$.

Покажем, что такое же равенство имеет место для M'.

Теорема 2. $M'(G) = 2^{t(G)}$.

Доказательство. Ясно, что $M'(G) \geqslant M(G)$. Считаем, что первая строка матрицы I' — это добавленная к матрице $I(G)$ строка из единиц. Ввиду теоремы 1 достаточно рассматривать подматрицы, содержащие эту строку. Очевидно также, что можно рассматривать только подматрицы, в которых каждая строка и каждый столбец содержат более одной единицы. Рассмотрим подматрицу A порядка n, в которой m столбцов содержат по две единицы каждый, остальные — по три. Общее число единиц в этой матрице равно $3n - m$. Так как первая строка содержит n единиц, а каждая из остальных — не менее двух, то $3n - m \geqslant 3n - 2$, отсюда $m \leqslant 2$. Рассмотрим каждую из возможностей.

1. $m = 0$. Каждый столбец матрицы A содержит 3 единицы. Тогда сумма всех строк, кроме первой, равна удвоенной первой строке. Следовательно, $\det A = 0$.

2. $m = 1$. Если из первой строки матрицы A вычесть сумму остальных строк, умноженную на $1/2$, то в первой строке полученной матрицы будет единственный ненулевой элемент $1/2$ — в том столбце, где A содержит две единицы. Таким образом, $|\det A| = \frac{1}{2}|\det B|$, где B — матрица, получаемая из A удалением столбца с двумя единицами и первой строки.

Матрица B является подматрицей матрицы $I(G)$. Из теоремы 1 следует, что $|\det B| \leqslant 2^t(G)$.

3. $m = 2$. Пусть i и j — номера столбцов матрицы A, содержащих по две единицы. Построим новую матрицу B, добавив к A строку и столбец с номерами $n+1$, поместив в новой строке единицы в столбцах с номерами $i, j, n+1$ и заполнив все остальные позиции в новой строке и новом столбце нулями. Очевидно, что $\det A = \det B$. В матрице B каждый столбец, кроме последнего, содержит три единицы. Если из первой строки матрицы B вычесть сумму остальных строк, умноженную на $1/2$, то в первой строке полученной матрицы единственный ненулевой элемент $-1/2$ будет в последнем столбце. Таким образом, $|\det B| = \frac{1}{2}|\det C|$, где C — матрица, получаемая из A удалением первой строки и добавлением новой строки с единицами в позициях i и j. В матрице C каждый столбец содержит две единицы, так что её можно рассматривать как матрицу инцидентности некоторого графа. Этот граф H получается из подграфа графа G добавлением одной вершины и двух инцидентных ей рёбер. Ясно, что $t(H) \leqslant t(G) + 1$. Из теоремы 1 следует, что $|\det C| \leqslant 2^{t(G)+1}$. Теорема 2 доказана.

2. Матрица с добавленным столбцом

Переходя к рассмотрению матрицы I'', заметим сначала, что для суждения о величине $M''(G)$ достаточно рассматривать только подматрицы, содержащие столбец из единиц (далее считаем, что это первый столбец), так как другие являются подматрицами матрицы I. Кроме того, можно предполагать, что каждый из остальных столбцов содержит ровно две единицы. Такая матрица соответствует подграфу, в котором число рёбер на единицу меньше числа вершин. Если этот подграф связен, то он является деревом. Если он несвязен, то хотя бы одна из его компонент связности — дерево. Рассмотрим сначала последний случай.

Лемма 1. *Если $G = G_1 \cup G_2$, где G_1, G_2 — разобщённые подграфы, причём G_1 — дерево, то $M''(G) = M''(G_1)M(G_2)$.*

Доказательство. Матрица $I''(G)$ перестановкой строк и столбцов может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix},$$

где A и C — квадратные матрицы, причём $A = I''(G_1)$, $C = I(G_2)$. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

Остаётся рассмотреть матрицу $I''(T)$ для дерева T. Обозначим через $D(T)$ абсолютную величину определителя этой матрицы.

Лемма 2. *Если n_1 и n_2 — мощности долей в двудольном разложении дерева T, то $D(T) = |n_1 - n_2|$.*

Доказательство. Это верно для дерева, состоящего из одной вершины. Допустим, что в дереве T содержится n вершин, $n > 1$. Если сложить все строки матрицы $I''(T)$, соответствующие вершинам одной доли, и вычесть из этой суммы сумму всех строк, соответствующих вершинам другой доли, то получится строка, в которой единственный ненулевой элемент находится в первом столбце и равен $n_1 - n_2$. Заменив этой строкой любую строку матрицы $I''(T)$, получим матрицу, определитель которой равен $(n_1 - n_2)\sigma$, где σ — величина некоторого минора порядка $n-1$ матрицы $I(T)$. Нетрудно показать, что $|\sigma| = 1$ (см., например, [2, лемма 14.1]), откуда следует утверждение леммы. Лемма 2 доказана.

Особый интерес представляют деревья, у которых для каждого поддерева T' выполняется неравенство $D(T') < D(T)$. Такие деревья будем называть *минимальными*. Пусть $\mathcal{T}_0(G)$ — множество всех минимальных деревьев, являющихся подграфами графа G. Подграф графа G, получающийся удалением всех вершин подграфа H, обозначаем через $G - H$. Следующее утверждение является следствием теоремы 1 и леммы 1.

Теорема 3. $M''(G) = \max\{2^{t(G)}, \max\limits_{T \in \mathcal{T}_0(G)} D(T) 2^{t(G-T)}\}$.

Наша ближайшая цель — охарактеризовать минимальные деревья. Дерево назовем *чётным*, если в нём расстояние между любыми двумя листьями чётно. Это равносильно тому, что в двудольном разложении дерева все листья находятся в одной доле. Вершины, принадлежащие этой доле, будем называть *белыми*, вершины другой доли — *чёрными*.

Лемма 3. *Если в чётном дереве имеется w белых вершин, b чёрных вершин, l листьев, d — наибольшая степень чёрной вершины, то* (i) $w > b$; (ii) $w - b \geqslant d - 1$; (iii) *если $b > 0$, то $w - b < l$.*

Доказательство. Пусть a — чёрная вершина степени d в чётном дереве T. Определим отображение f белых вершин в чёрные: значением $f(x)$ является первая вершина на пути от x к a. Очевидно, что f — сюръекция и вершина a имеет d прообразов относительно f. Следовательно, неравенство (ii) верно. Так как степень любой чёрной вершины не меньше 2, то отсюда следует неравенство (i) (верное и при $b = 0$).

Если из чётного дерева T, в котором больше одной вершины, удалить все листья, получится чётное дерево T', в котором цвета вершин

поменялись — в нём b белых и $w - l$ чёрных вершин. Применяя к этому дереву неравенство (i), получаем неравенство (iii) в формулировке леммы. Лемма 3 доказана.

Дерево назовём *густым*, если в нём нет вершины степени 2, смежной с листом.

Теорема 4. *Дерево минимально тогда и только тогда, когда оно чётное и густое.*

Доказательство. Если дерево T не является чётным, то в его двудольном разложении листья присутствуют в обеих долях. Удалив лист из меньшей доли, получим поддерево T' с $D(T') > D(T)$.

Допустим, дерево T не является густым. Удалив из него лист и смежную с ним вершину степени 2, получим поддерево T' с $D(T') = D(T)$.

Пусть T — чётное и густое дерево с w белыми и b чёрными вершинами, тогда $D(T) = w - b$. Докажем, что для любого поддерева T' дерева T выполняется неравенство $D(T') < D(T)$. Очевидно, можно считать, что T' — минимальное дерево. Тогда, как уже доказано, T' чётное и густое. Пусть w' — число белых, b' — число чёрных вершин в T', тогда $D(T') = w' - b'$.

Компоненты связности леса, получающегося при удалении всех вершин дерева T' из дерева T, будем называть *ветвями. Корнем* ветви считаем её вершину, смежную с вершиной из T'. Так как T' чётное, то его листья имеют один цвет в дереве T. Рассмотрим оба случая.

А. Листья дерева T' являются белыми вершинами в дереве T. Если корнем некоторой ветви является белая вершина, то эта ветвь — чётное дерево и в ней белых вершин больше, чем чёрных (лемма 3). Если же корень ветви — чёрная вершина, то при добавлении к ней белой вершины, смежной с корнем, получится чётное дерево, в котором имеется чёрная вершина степени не менее 3 (так как T густое). По лемме 3 в этой расширенной ветви число белых вершин превышает число чёрных по крайней мере на 2, значит, в исходной ветви белых было больше, чем чёрных. Итак, в каждой ветви белых вершин больше, чем чёрных. Следовательно, $w - w' > b - b'$ и $D(T) > D(T')$.

Б. Все листья дерева T' — чёрные вершины дерева T. Предположим сначала, что в T' более одной вершины. Рассмотрим какой-нибудь лист a дерева T'. Пусть w'' и b'' — общее число белых и чёрных вершин во всех ветвях, корни которых смежны с a. Если среди этих ветвей хотя бы одна содержит более одной вершины, то в ней имеется чёрная вершина степени не меньше 3. Из леммы 3 следует, что $w'' - b'' \geqslant 2$. Если же каждая ветвь состоит из одной вершины, то этих ветвей имеется не менее

двух, так что и в этом случае выполняется неравенство $w'' - b'' \geqslant 2$. Суммируя эти неравенства по всем листьям дерева T', получаем

$$w - b' - b + w' \geqslant 2l',$$

где l' — число листьев в T'. Отсюда и из леммы 3(iii) следует

$$D(T) = w - b \geqslant b' - w' + 2l' > w' - b' = D(T').$$

Остаётся рассмотреть случай, когда дерево T' состоит из одной вершины a (в дереве T она чёрная). Тогда $D(T') = 1$. Покажем, что $D(T) \geqslant 2$. Имеется не менее двух ветвей, каждая из которых — чётное дерево. Значит, в каждой ветви белых вершин больше, чем чёрных. Если ветвей не меньше трёх, то отсюда следует, что $w - b \geqslant 2$. Допустим, что имеется ровно две ветви. Они не могут обе состоять из одной вершины, так как дерево из трёх вершин не густое. Но тогда хотя бы в одной из ветвей есть чёрная вершина степени не менее 3, и из леммы 3 следует, что $w - b \geqslant 2$. Теорема 4 доказана.

3. Независимые множества

Независимым множеством графа называется множество попарно не смежных вершин. В задаче о независимом множестве требуется найти независимое множество наибольшей мощности, оно называется *наибольшим независимым множеством*, его мощность обозначается через $\alpha(G)$ и называется *числом независимости*. Независимое множество называется *максимальным*, если оно не содержится в большем независимом множестве.

Задача о независимом множестве графа может быть сформулирована как задача целочисленного линейного программирования следующим образом. Найти целочисленный вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ (n — число вершин графа), максимизирующий величину $\sum x_i$ при ограничениях $x_i + x_j \leqslant 1$ для каждого ребра (i, j), $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Матрица этой задачи — транспонированная матрица инцидентности графа. Значит, если мы хотим анализировать сложность решения этой задачи в зависимости от максимальной величины минора, то нужно исследовать классы $\mathcal{M}_k$ и $\mathcal{M}''_k$.

Класс $\mathcal{M}_1$ — это класс графов, у которых матрица инцидентности вполне унимодулярна, он совпадает с классом двудольных графов, и известны полиномиальные алгоритмы, решающие задачу о независимом множестве для таких графов. Мы не знаем, так ли это для класса $\mathcal{M}_k$ при $k \geqslant 2$. Далее покажем, что для графов из класса $\mathcal{M}''_k$ при любом

фиксированном k задача о независимом множестве решается за полиномиальное время. На самом деле будет доказана полиномиальная разрешимость этой задачи для более широкого класса графов.

Определим *репей* как граф, состоящий из нечётного цикла и нескольких вершин степени 1, каждая из которых смежна с вершиной цикла, причём каждая вершина цикла смежна с не более чем одной вершиной степени 1. Вершины степени 1 будем называть *шипами*. Обозначим через $\mathcal{B}_{p,q}$ класс всех графов, не содержащих p разобщённых нечётных циклов и репьёв с q шипами.

Теорема 5. $\mathcal{M}''_k \subseteq \mathcal{B}_{\lfloor \log_2 k \rfloor + 1,\ 2k+3}$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}''_k$. Тогда

$$2^{t(G)} = M(G) \leqslant M''(G) \leqslant k,$$

т. е. $t(G) \leqslant \lfloor \log_2 k \rfloor$ и в G нет $\lfloor \log_2 k \rfloor + 1$ разобщённых нечётных циклов.

Допустим, в G имеется репей с циклом длины $2s+1$ и $2k+3$ шипами. Удалив любое ребро цикла, получим дерево, в двудольном разложении которого по крайней мере $k+2$ шипа окажутся в одной доле. Если удалить остальные шипы, получится дерево, в двудольном разложении которого одна из долей содержит не менее $k+2$ оставшихся шипов и не менее s остальных вершин. По лемме 2

$$M''(G) \geqslant k + 2 + s - (s+1) = k + 1.$$

Теорема 5 доказана.

Для графа G через $S(G)$ обозначим семейство всех его максимальных независимых множеств. Если X — подмножество множества вершин графа G, то через $G[X]$ обозначается подграф, порождённый множеством X.

Лемма 4. *Пусть G и H — графы с одинаковыми множествами вершин. Тогда $\alpha(G \cup H) = \max_{X \in S(G)} \{\alpha(H[X])\}$.*

Доказательство. Всякое независимое множество графа $G \cup H$ является независимым множеством обоих графов G и H. Поэтому оно содержится в некотором максимальном независимом множестве X графа G, а если оно к тому же наибольшее, то оно является наибольшим в подграфе $H[X]$. Лемма 4 доказана.

Теорема 6. *При любых фиксированных p и q задача о независимом множестве для графов из класса $\mathcal{B}_{p,q}$ разрешима за полиномиальное время.*

Доказательство. Проводим индукцию по p при фиксированном q. Класс $\mathcal{B}_{1,q}$ при любом q состоит из двудольных графов. Пусть $p > 1$, $G \in \mathcal{B}_{p,q}$. Найдём в графе G какой-нибудь порождённый нечётный цикл C (если такого нет, применяем алгоритм для нахождения наибольшего независимого множества в двудольном графе). Пусть R — подграф, порождённый всеми вершинами, не входящими в C. Тогда $R \in \mathcal{B}_{p-1,q}$, значит, для графа R и любого его подграфа задача может быть решена за полиномиальное время алгоритмом, существующим по предположению индукции. Очевидно, она может быть также решена за полиномиальное время для любого подграфа графа C, а следовательно, и для любого подграфа графа $C \cup R$, в котором C является компонентой связности. Рассмотрим теперь остовный подграф H графа G, образованный всеми рёбрами, не входящими в $C \cup R$. В нём нет паросочетания из q рёбер, иначе вместе с циклом C получился бы репей с q шипами. Известно [1], что число максимальных независимых множеств в таких графах ограничено полиномом от числа вершин. Известны и алгоритмы, обеспечивающие перебор всех максимальных независимых множеств в таких графах за полиномиальное время [6]. Перебирая все максимальные независимые множества графа H и для каждого из них находя наибольшее независимое множество в соответствующем подграфе графа $C \cup R$, за полиномиальное время найдём наибольшее независимое множество графа G. Теорема 6 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Верхняя оценка числа максимальных независимых множеств графа // Дискрет. математика. — 2007. — Т. 19, вып. 3. — С. 84–88.
2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
3. **Зыков А. А.** Основы теории графов. — М.: Наука, 1987. — 382 с.
4. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. — М.: Наука, 1995. — 192 с.
5. **Grossman J. W., Kilkarni D. M., Schochetman I. E.** On the minors of an incidence matrix and its Smith normal form // Linear Algebra Appl. — 1995. — Vol. 218. — P. 213–224.
6. **Tsukigama S., Ide M., Ariochi H., Ozaki H.** A new algorithm for generating all the maximal independent sets // SIAM J. Comput. — 1977. — Vol. 6, N 3. — P. 505–517.

Алексеев Владимир Евгеньевич,
e-mail: ave@uic.nnov.ru
Захарова Дарья Владимировна

Статья поступила
2 марта 2009 г.