ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2010. Том 17, № 1. С. 65–74

УДК 519.17

О ГРАФАХ С ЗАДАННЫМИ ДИАМЕТРОМ, ЧИСЛОМ ВЕРШИН И ЛОКАЛЬНЫМ РАЗНООБРАЗИЕМ ШАРОВ *)

Т. И. Федоряева

Аннотация. В связи с задачей характеризации векторов разнообразия шаров обыкновенных связных графов изучаются n-вершинные графы диаметра d с локальным t-разнообразием шаров, т. е. графы, имеющие n различных шаров радиуса i для любого $i \leqslant t$. Для таких графов справедлива нижняя оценка для числа вершин, определяемая через параметры d и t. В статье с точностью до изоморфизма явно описываются все графы диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров), имеющие наименьший возможный порядок. Кроме того, для каждого такого графа вычисляется его вектор разнообразия шаров.

Ключевые слова: граф, диаметр графа, метрический шар, радиус шара, число шаров, вектор разнообразия шаров.

Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве обыкновенного связного графа G с обычным расстоянием между вершинами (т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины). Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_i(G), \ldots, \tau_d(G))$, составленный из этих чисел, где $d = d(G)$ — диаметр графа G, называется *вектором разнообразия шаров* графа G [5, 6]. Векторы такого вида впервые рассмотрены в [1], где предложено изучать строение графов как дискретных метрических пространств через разнообразие и пересекаемость метрических шаров, содержащихся в графе (см. также [2]). При таком подходе естественно формулируется задача характеризации векторов разнообразия шаров графов и возникает класс графов, обладающих локальным t-разнообразием шаров.

Определение 1 [1]. Граф G обладает *локальным t-разнообразием шаров*, если $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \ldots = \tau_t(G)$, $0 \leqslant t < d(G)$. Граф G с локальным t-разнообразием шаров при $t = d(G) - 1$ называется графом *полного разнообразия шаров.*

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00671).

Нетрудно видеть, что для произвольного графа G диаметра d выполняется система неравенств

$$\tau_0(G) = |V(G)| \geqslant \ldots \geqslant \tau_i(G) \geqslant \tau_{i+1}(G) \geqslant \ldots \geqslant 1 = \tau_d(G) = \tau_{d+1}(G) = \ldots.$$

Поэтому одна из идей определения графа G с вектором разнообразия шаров $\tau(G)$, совпадающим с наперёд заданным целочисленным вектором $\overline{\tau} = (\tau_0, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_d)$ с убывающими компонентами, состоит в пошаговом построении требуемого графа путём какого-либо «наращивания» на каждом шаге k уже построенного τ_{d-k}-вершинного графа с локальным $(d-k)$-разнообразием шаров до τ_{d-k-1}-вершинного графа с локальным $(d-k-1)$-разнообразием шаров, при этом в качестве базисного графа при $k = 1$ должен использоваться τ_{d-1}-вершинный граф с полным разнообразием шаров. Таким образом, графы с локальным и полным разнообразием шаров могут быть использованы при характеризации векторов разнообразия шаров для графов. Такое построение графа G реализовано в [4] при дополнительных ограничениях на исходный вектор $\overline{\tau}$. В связи с этим возникают вопросы: всегда ли существуют n-вершинные графы диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (или даже полным разнообразием шаров), как они устроены и какой вид имеет их вектор разнообразия шаров?

В [7, 8] исследован вопрос существования графа с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) в классе $\Gamma_{n,\,d}$ всех n-вершинных обыкновенных связных графов диаметра d. Автором описаны все такие возможные значения параметров n, d и t, а именно доказана следующая

Теорема 1 [8]. *Класс $\Gamma_{n,\,d}$ содержит граф с локальным t-разнообразием шаров тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

(i) $0 \leqslant t \leqslant \lfloor d/2 \rfloor$, $n \geqslant d + 1 \geqslant 2$;

(ii) $\lfloor d/2 \rfloor < t < d$, $n \geqslant d + 1 + t$.

Следствие 1. *В классе $\Gamma_{n,\,d}$ существует граф с полным разнообразием шаров тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2d > 0$ или $n = d + 1 = 3$.*

В теореме 1 найден наименьший порядок графов диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров), а в настоящей работе мы явно описываем с точностью до изоморфизма все такие графы наименьшего порядка и вычисляем их векторы разнообразия шаров.

При решении этой задачи возникают два случая, указанные в теореме 1. В [6] вычислен вектор разнообразия шаров простой цепи длины d, эта цепь обладает локальным $\lfloor d/2\rfloor$-разнообразием шаров. Поэтому в случае (i) при $n = d+1$ цепь длины d (цепь длины $d = 1, 2$) — единственный с точностью до изоморфизма граф с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) диаметра d. Случай (ii) рассматривается в теореме 2 (следствии 2), где в этом случае явно описываются с точностью до изоморфизма графы наименьшего порядка диаметра d с локальным t-разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) и вычисляются их векторы разнообразия шаров.

В статье рассматриваются конечные обыкновенные связные графы и используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [3]. Для графа G обозначим через $n(G)$ число вершин, через $\rho_G(x, y)$ — обычное расстояние между вершинами x и y, через $B_i^G(x)$ — шар радиуса i с центром в вершине $x \in V(G)$ относительно метрики ρ_G.

Множество всех вершин графа G, лежащих на всех кратчайших цепях, соединяющих вершины x и y, называется *интервалом* $[x, y]_G$. Естественным образом определяются полуоткрытый интервал $[x, y)_G$ и открытый интервал $(x, y)_G$. Для простой цепи P графа G, содержащей вершины x и y, через $P[x, y)$ и $P(x, y)$ будем обозначать полуоткрытый интервал $[x, y)_P$ и открытый интервал $(x, y)_P$ соответственно. В приведённых обозначениях будем опускать индекс G, если понятно, о каком графе G идёт речь, и вместо $x \in V(G)$ будем писать $x \in G$.

Граф G *содержит кратчайшую цепь* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, если существует кратчайшая цепь P графа G с концами v_1, v_n такая, что

$$v_1, v_2, \ldots, v_n \in V(P), \quad \sum_{i=1}^{n-1} \rho_G(v_i, v_{i+1}) = \rho_G(v_1, v_n)$$

(причём не обязательно, чтобы $v_i \neq v_{i+1}$). В таком случае пишем $P = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Для произвольной кратчайшей цепи P, содержащей $v_1, v_2, \ldots, v_n$ с указанными выше условиями, через $P[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ будем обозначать её часть, ограниченную вершинами v_1, v_n.

Нам потребуется в случае $n \leqslant 2d$ модификация графов $H_{n,d,t} \in \Gamma_{n,d}$, обладающих локальным t-разнообразием шаров и построенных в [8] для всех допустимых значений параметров n, d и t, указанных в теореме 1.

Пусть $n = d+1+t$ и $0 \leqslant t < d$. Для любого $i = 0, 1, \ldots, \lfloor (d-t-1)/2 \rfloor$ определим граф $H^i_{n,d,t}$ следующим образом. Если $t > 0$, то к простой цепи P с концами a, b длины d добавим новые вершины $v_1, \ldots, v_t$ и рёбра так, что в полученном графе образуется кратчайшая цепь $(a', v_1, v_2, \ldots, v_{t-1}, v_t, b')$ длины $t+1$, где $a' \in P$, $\rho_P(a, a') = i$ и $b' \in P[a', b]$, $\rho_P(a', b') = t+1$ (вершины a', b' определены корректно, так как $i+t+1 \leqslant d$). В случае $t = 0$ к P ничего не добавляем. Полученный граф обозначим через $H^i_{n,\,d,\,t}$ (рис. 1).

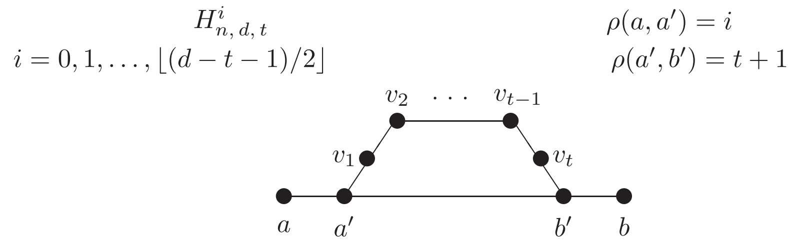

Рис. 1

Лемма 1. *Пусть* $n = d + 1 + t$, $0 \leqslant t < d$ *и* $i \leqslant \lfloor (d-t-1)/2 \rfloor$. *Тогда*
(i) $H^i_{n,\,d,\,t} \in \Gamma_{n,\,d}$;
(ii) $H^i_{n,\,d,\,t}$ *обладает локальным t-разнообразием шаров*;
(iii) $\tau\big(H^i_{n,\,d,\,t}\big) = \big(n, \ldots, n, \Delta^d_{t+1}, \Delta^d_{t+2}, \ldots, \Delta^d_d\big)$, *где*

$$\Delta^d_j = \begin{cases} d+1 & \text{при } 0 \leqslant j \leqslant \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d-j)+1 & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor < j < d, \\ 1 & \text{при } j \geqslant d. \end{cases}$$

Доказательство. Непосредственно из определения вытекает (i). В [8] замечено, что если для различных вершин x, y графа G выполняется неравенство $e_G(x, y) \geqslant j + 1$, то $B^G_j(x) \neq B^G_j(y)$, где $e_G(x, y)$ — наибольшая длина кратчайшей цепи графа G с концом x, содержащей вершину y. С помощью этого свойства нетрудно показать, что $\tau_t\big(H^i_{n,\,d,\,t}\big) = n$. Так как $\tau_j\big(H^i_{n,\,d,\,t}\big) \geqslant \tau_{j+1}\big(H^i_{n,\,d,\,t}\big)$, получаем (ii). Далее, для любого $k \leqslant t$ очевидно выполняется равенство $B_{t+1}(v_k) = B_{t+1}(v'_k)$, где $v'_k \in P[a', b']$ и $\rho(a', v'_k) = k$. Кроме того, в [6] показано, что $\tau(P) = \big(\Delta^d_0, \Delta^d_1, \ldots, \Delta^d_d\big)$. Причём если $x, y \in P$, $x \neq y$ и $B^P_j(x) = B^P_j(y)$, то $B^P_j(x) = P$, а следовательно, $B^{H^i_{n,\,d,\,t}}_j(x) = H^i_{n,\,d,\,t}$ при $j > t$. Поэтому $\tau_j\big(H^i_{n,\,d,\,t}\big) = \tau_j(P) = \Delta^d_j$ при $j > t$. Лемма 1 доказана.

Введём следующие обозначения. Через $\delta(x, y)$ обозначим предикат неравенства, т. е.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любых вершин x, x', y', y произвольного графа G через $G_{x,\,x',\,y',\,y}$ обозначим подграф графа G, состоящий из всех вершин z, удовлетворяющих одному из следующих двух условий:

1) $z \in [x, x']_G \cup [y, y']_G$;

2) для некоторой вершины $z' \in [x', y']_G$ существует кратчайшая цепь (z, z', x) или (z, z', y).

Утверждение 1. *Пусть в графе G существуют кратчайшие цепи (x, x', y') и (y, y', x'). Тогда выполняется в точности одно из следующих условий:*

(i) *в графе G существует кратчайшая цепь (x, x', y', y);*

(ii) *$n(G) \geqslant n(G_{x,x',y',y}) + \rho(x', y') - \delta(x', y')$ и существует кратчайшая цепь C с концами x'', y'' такая, что $x'' \in [x, x']_G$, $y'' \in [y, y']_G$ (рис. 2),*

$$C(x'', y'') \cap G_{x,x',y',y} = \varnothing, \tag{1}$$

$$\rho(x', y') \leqslant \rho(x'', y'') < \rho(x'', x') + \rho(x', y') + \rho(y', y''). \tag{2}$$

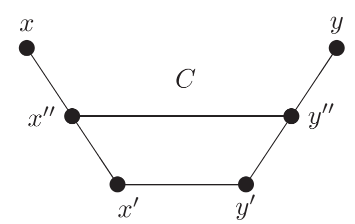

Рис. 2

Доказательство. В графе G существуют некоторые кратчайшие цепи $C_x = (x, x', y')$ и $C_y = (y, y', x')$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Существует кратчайшая цепь $C' = (x, z, y)$ с концами x и y, содержащая некоторую вершину $z \in [x', y']_G$. Тогда в G есть кратчайшая цепь (x', z, y') и по условию имеем кратчайшие цепи C_x, C_y. Следовательно, в графе G есть кратчайшие цепи $C'_x = (x, x', z, y')$ и $C'_y = (y, y', z, x')$. Используя кратчайшие цепи C', C'_x, C'_y, получаем существование кратчайшей цепи (x, x', z, y', y) в графе G, т. е. выполняется условие (i).

Случай 2. Пусть не выполняется случай 1. Рассмотрим произвольную кратчайшую цепь C с концами x и y. Обозначим через x'' последнюю вершину из $C \cap [x, x']_G$, y'' — первую вершину из $C[x'', y] \cap [y, y']_G$ при переходе от x к y по цепи C. Тогда

$$C(x'', y'') \cap ([x, x']_G \cup [y, y']_G) = \varnothing, \tag{3}$$

и в графе G имеются кратчайшие цепи (x, x'', x', y'), (y, y'', y', x') (см. рис. 2) ввиду наличия кратчайших цепей C_x, C_y. В силу неравенства треугольника имеем

$$\rho(x',x'')+\rho(x'',y'')\geqslant\rho(x',y'')=\rho(x',y')+\rho(y',y''),$$
$$\rho(y',y'')+\rho(x'',y'')\geqslant\rho(y',x'')=\rho(x',y')+\rho(x',x'').$$

Почленно суммируя эти неравенства, получаем $\rho(x',y')\leqslant\rho(x'',y'')$. Далее, по неравенству треугольника имеем

$$\rho(x'',y'')\leqslant\rho(x'',x')+\rho(x',y')+\rho(y',y''),$$

причём если в этом неравенстве достигается равенство, то в графе G существует кратчайшая цепь (x,x'',x',y',y'',y) (так как $C=(x,x'',y'',y)$); противоречие условию случая 2. Таким образом, доказали справедливость (2).

Предположим, что существует вершина $z\in C(x'',y'')\cap G_{x,x',y',y}$. В силу (3) и определения $G_{x,x',y',y}$ существуют вершина $z'\in[x',y']_G$ и кратчайшая цепь (z,z',x) или (z,z',y). Пусть, например, в графе G есть кратчайшая цепь $C'=(z,z',x)$. Тогда $C'[x,z',z]\cup C[z,y'',y]$ — кратчайшая цепь с концами x и y, проходящая через вершину z'. Пришли к противоречию с условием случая 2, т. е. (1) доказано.

В силу (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned}n(G)\geqslant n(G_{x,x',y',y})+n(C(x'',y''))&=n(G_{x,x',y',y})+\rho(x'',y'')-\delta(x'',y'')\\&\geqslant n(G_{x,x',y',y})+\rho(x',y')-\delta(x',y'),\end{aligned}$$

т. е. выполняется условие (ii).

Остаётся заметить, что если условие (ii) выполнено, то

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x'')+\rho(x'',y'')+\rho(y'',y)<\rho(x,x')+\rho(x',y')+\rho(y',y)$$

и, следовательно, не выполняется условие (i). Утверждение 1 доказано.

Замечание 1. В условии (ii) утверждения 1 в качестве цепи $C[x'',y'']$ выбирается часть произвольной кратчайшей цепи $C=(x,x'',y'',y)$ с концами x и y, ограниченная подходящими вершинами $x''\in C\cap[x,x']_G$ и $y''\in C\cap[y,y']_G$.

Замечание 2. Пусть выполнены условия утверждения 1 и $x'\neq y'$. Тогда $[x,x']_G\cap[y,y']_G=\varnothing$.

Действительно, иначе существуют вершина $z\in[x,x']_G\cap[y,y']_G$ и кратчайшие цепи (x,z,x',y') и (y,z,y',x') в графе G. Поэтому

$$\rho(z,y')=\rho(z,x')+\rho(x',y'),\quad \rho(z,x')=\rho(z,y')+\rho(y',x').$$

Следовательно, $\rho(x',y')=0$; противоречие условию $x'\neq y'$.

Теорема 2. *Пусть* $\lfloor d/2 \rfloor < t < d$. *Тогда* n*-вершинные графы* $H^i_{n,\,d,\,t}$, *где* $n = d+1+t$ *и* $i = 0, 1, \ldots, \lfloor (d-t-1)/2 \rfloor$ *(см. рис. 1), — все с точностью до изоморфизма графы диаметра* d *с локальным* t*-разнообразием шаров наименьшего возможного порядка, причём*

$$\tau\big(H^i_{n,\,d,\,t}\big) = \big(n, \ldots, n, \Delta^d_{t+1}, \Delta^d_{t+2}, \ldots, \Delta^d_d\big).$$

Доказательство. Пусть граф $G \in \Gamma_{n,\,d}$ обладает локальным t-разнообразием шаров и имеет наименьший порядок. Тогда $n = d+1+t$ по теореме 1. Рассмотрим произвольную диаметральную цепь P графа G, её концы a, b и вершины $a', b' \in P$ такие, что $\rho(a,a') = \rho(b,b') = t$. Так как $t > \lfloor d/2 \rfloor$, то $P = (a, b', a', b)$ и вершины a', b' различные. Поэтому $B_t(a') \neq G$ или $B_t(b') \neq G$ в силу локального t-разнообразия шаров графа G. Следовательно, существуют вершины x, x', y', y, z и кратчайшая цепь P' графа G (рис. 3) такие, что

$$x' \in \{a', b'\}, \quad \rho(x', y) > t, \tag{4}$$

$$P' = (x', y', y),\ P'(y', y] \cap P = \varnothing, \quad y' \in P[x', z],\ x, z \in \{a, b\},\ x \neq z. \tag{5}$$

Здесь y' — последняя вершина из $P' \cap P$ при переходе от x' к y по цепи P'.

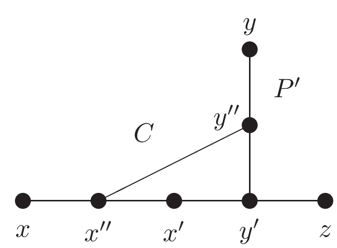

Рис. 3

Учитывая, что $t > \lfloor d/2 \rfloor$, $P = (x, x', y', z)$ — диаметральная цепь и справедливо (4), получаем

$$\rho(x,x') = t > d-t = \rho(x',z) \quad \text{или} \quad \rho(x',z) = t > d-t = \rho(x',x) \tag{6}$$

и $\rho(x,x') + \rho(x',y) > \rho(x,x') + t \geqslant \rho(x,x') + \rho(x',z) = d$. Поэтому в графе G нет кратчайшей цепи (x, x', y', y) и, значит,

$$C \cap P[x', z] = \varnothing, \tag{7}$$

где C — произвольная фиксированная кратчайшая цепь с концами x, y. В графе G имеем кратчайшие цепи $P[x, x', y']$ и $P'[x', y', y]$, причём нетрудно доказать, что $P \cup P' \subseteq G_{x,x',y',y}$, где $G_{x,x',y',y}$, — подграф, определённый в утверждении 1. В силу (4), (5), утверждения 1 и замечания 1 для некоторых вершин x'', y'' таких, что

$$x'' \in C \cap [x, x']_G, \quad y'' \in C[x'', y] \cap [y, y']_G, \tag{8}$$

при выполнении соотношений (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} n(G) \geqslant n(G_{x,x',y',y}) + n(C(x'', y'')) = n(G_{x,x',y',y}) + \rho(x'', y'') - \delta(x'', y'') \\ \geqslant n(P \cup P') + \rho(x'', y'') - \delta(x'', y'') \geqslant n(P \cup P') + \rho(x', y') - \delta(x', y') \\ \geqslant d + 1 + \rho(y', y) + \rho(x', y') - \delta(x', y') = d + 1 + \rho(x', y) - \delta(x', y') \\ \geqslant d + 1 + t + 1 - \delta(x', y') = n + 1 - \delta(x', y') \geqslant n. \end{aligned}$$

Поэтому в каждом из вышеуказанных неравенств достигается равенство. Следовательно, учитывая (1), (2) и (5), имеем

$$\rho(x', y) = t + 1, \quad \rho(x'', y'') = \rho(x', y') > 0, \tag{9}$$

$$V(G) = V(P) \cup V(P'(y', y]) \cup V(C(x'', y'')). \tag{10}$$

В силу (7)–(9) и замечания 2 $y'' \in [y, y']_G \setminus ([x, x']_G \cup P[x', z])$, а учитывая (10), заключаем $y'' \in P'[y, y')$. Аналогично $x'' \in P[x, x')$ (см. рис. 3). Далее, P, P' — кратчайшие цепи, поэтому

$$\rho(x', x'') + \rho(x', y') \leqslant \rho(x'', y'') + \rho(y', y'')$$

и

$$\rho(x', y') + \rho(y', y'') \leqslant \rho(x', x'') + \rho(x'', y'').$$

Следовательно, учитывая (9), получаем

$$\rho(x', x'') = \rho(y', y'') > 0 \tag{11}$$

и $P'' = C[x'', y''] \cup P'[y'', y']$ — кратчайшая цепь графа G.

Из (6) имеем либо $\rho(x, x') = t$, либо $\rho(x', z) = t$. Рассмотрим различные вершины $w_1, w_2 \in P''$, существующие в силу (9) и (11), такие, что $\rho(x'', w_1) = \rho(x'', w_2) + 1 = \rho(x'', x')$ в случае $\rho(x', x) = t$ и $\rho(y', w_1) = \rho(y', w_2) + 1 = \rho(y', x')$ в случае $\rho(x', z) = t$.

Предположим, что $y'' \neq y$. Так как $P' = (x', y', y'', y)$ и выполняются соотношения (9), (11), то диаметр простого цикла $P[x'', y'] \cup P''[x'', y']$

не превосходит t. Теперь, используя (6), (9)–(11), нетрудно доказать, что $B_t(w_1) = B_t(w_2) = G$; противоречие с локальным t-разнообразием шаров графа G.

Итак, $y'' = y$. Тогда $\rho(x'', y') = t + 1$ и $i \leqslant \lfloor (d-t-1)/2 \rfloor$ в силу (9), (11), где $i = \min\{\rho(x, x''),\ \rho(y', z)\}$.

Покажем, что граф G изоморфен графу $H^i_{n,\,d,\,t}$ (см. рис. 1). Так как P и P'' — кратчайшие цепи, в силу (10) остаётся заметить, что в графе G нет рёбер с концами u_1, u_2, где $u_1 \in P(x'', y')$ и $u_2 \in P''(x'', y')$. Предположим, что это не так. Тогда граф G имеет вид, изображённый на рис. 4 (здесь в цикле также могут быть хорды, отличные от $u_1 u_2$).

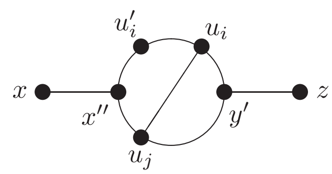

Рис. 4

Так как $\lfloor d/2 \rfloor < t < d$, то $t \geqslant 2$. Если $t = 2$, то $n = 2d = 6$ и $x = x''$, $y' = z$. Следовательно, $B_t(u_1) = B_t(u_2)$; противоречие локальному t-разнообразию шаров графа G. Значит, $t \geqslant 3$. Поскольку P и P'' — кратчайшие цепи, получаем

$$|\rho(u_1, x'') - \rho(u_2, x'')| \leqslant 1, \quad |\rho(u_1, y') - \rho(u_2, y')| \leqslant 1, \tag{12}$$

$$\rho(u_i, x'') + \rho(u_i, y') = t + 1 \geqslant 4, \ \ i = 1, 2.$$

Для некоторых различных i, j имеем $\rho(u_i, x'') \geqslant \rho(u_j, x'')$. В силу (12) получаем $\rho(u_j, y') \geqslant \rho(u_i, y')$ и либо $\rho(u_j, x'') \geqslant 2$, либо $\rho(u_i, y') \geqslant 2$ (иначе $t \leqslant 2$). Пусть, например, $\rho(u_j, x'') \geqslant 2$ (случай $\rho(u_i, y') \geqslant 2$ симметричен). Выберем вершину u_i' на кратчайшей цепи с концами x'', u_i (см. рис. 4) такую, что

$$\rho(u_i', x'') = \rho(u_j, x'') \geqslant 2. \tag{13}$$

Отсюда в силу того, что P, P'' — кратчайшие цепи, имеем $\rho(u_i', v) = \rho(u_j, v)$ для любой вершины $v \in P[x, x''] \cup P[y', z]$. Кроме того, используя (12) и (13), нетрудно доказать, что $P(x'', y') \cup P''(x'', y') \subseteq B_t(u_i') \cap B_t(u_j)$. Следовательно, $B_t(u_i') = B_t(u_j)$; противоречие с локальным t-разнообразием шаров графа G.

Таким образом, G изоморфен графу $H^i_{n,\,d,\,t}$. При $n = d + 1 + t$ и для любого $i \leqslant \lfloor (d-t-1)/2 \rfloor$ по лемме 1 граф $H^i_{n,\,d,\,t}$ обладает локальным

t-разнообразием шаров и вектор разнообразия шаров $\tau(H^i_{n,\,d,\,t})$ имеет требуемый вид. Очевидно, что графы $H^i_{n,\,d,\,t}$ попарно не изоморфны при $i = 0, 1, \ldots, \lfloor (d-t-1)/2 \rfloor$. Теорема 2 доказана.

Непосредственно из следствия 1 и теоремы 2 получаем

Следствие 2. Для любого $d > 0$ существует единственный с точностью до изоморфизма граф диаметра d с полным разнообразием шаров наименьшего возможного порядка, а именно $2d$-вершинный цикл при $d > 2$, и цепь длины d при $d \leqslant 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. — Т. 1, № 1. — С. 5–12.
2. **Евдокимов А. А.** Вложения в классе параметрических отображений ограниченного искажения // Уч. зап. Казанск. гос. ун-та. — 2009. — Т. 151, № 2. — С. 72–79.
3. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 383 с.
4. **Рычков К. Л.** О достаточных условиях существования графа с заданным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 99–108.
5. **Федоряева Т. И.** О разнообразии метрических шаров в графах // Проблемы теоретической кибернетики. Тез. докл. XIV Междунар. конф. (Пенза, 23–28 мая 2005 г.). — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2005. — С. 159.
6. **Федоряева Т. И.** Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 3. — С. 74–84.
7. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров и свойства их компонент // Тр. VII Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 4–6 марта 2006 г.). — М.: Изд-во МГУ, 2006. — С. 374–378.
8. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. Т. 14, № 2. — С. 47–67.

Федоряева Татьяна Ивановна,
e-mail: stdd@academ.org

Статья поступила
16 июня 2009 г.

Переработанный вариант —
8 ноября 2009 г.