ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—февраль 2010. Том 17, № 1. С. 75–96

УДК 519.865.3

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА. ЧАСТЬ 1: СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПРИЗНАК РАВНОВЕСИЯ *)

В. И. Шмырёв

Аннотация. Исследуется модель обмена с дробно-линейными функциями предпочтения участников. Изучены вопросы существования равновесных состояний. Приведены условия существования строгого равновесия и равновесия «free disposal». Для модели с фиксированными бюджетами получено сведение проблемы равновесия к задаче полиэдральной комплементарности.

Ключевые слова: модель обмена, дробно-линейная функция, функция предпочтения, экономическое равновесие, вектор цен, полиэдральная комплементарность.

Введение

Данная статья является первой частью работы, посвященной модели обмена с дробно-линейными функциями предпочтения у участников. Здесь изучены вопросы существования равновесных состояний и получено сведение проблемы равновесия к задаче полиэдральной комплементарности. Во второй части на основе такого сведе́ния предложен метод, позволяющий получить равновесное состояние за конечное число шагов.

Для простейшего случая линейной модели обмена (модели с фиксированными бюджетами) задача отыскания равновесия сводится к оптимизационной задаче [1], что позволяет указать достаточно простые условия существования равновесных состояний. Но для случая переменных бюджетов такого сведе́ния не известно. Для этого случая Ивс свёл задачу к задаче линейной комплементарности [12]. Условия существования равновесия в этом случае получены Гейлом [13]. Общий случай модели конкурентной экономики, в которой участвуют не только потребители, но и производители товаров, известен как модель Эрроу — Дебре. Описание этой модели, как и обстоятельное изложение обширного

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–4113.2008.6).

круга вопросов, связанных с конкурентным равновесием, можно найти в большой обзорной статье Дебре [11]. Для модели Эрроу — Дебре равновесие в классическом определении уже может и не существовать, и при не очень обременительных ограничениях на модель доказывается существование равновесных состояний лишь в более общем смысле — «free disposal-equilibrium».

В дробно-линейной модели обмена также можно гарантировать существование только равновесия «free disposal». В настоящей статье исследование этого вопроса опирается на общую теорему из [11], хотя рассмотрения значительно упрощаются благодаря специфике модели. Приведено простое условие существования равновесия в строгом смысле.

Предлагаемый алгоритм численного отыскания равновесного состояния в дробно-линейной модели обмена является дальнейшим развитием оригинального подхода, предложенного автором для линейной модели обмена [3, 5]. В отличие от классического взгляда на равновесие, основанного на рассмотрении функции избыточного спроса, этот подход базируется на рассмотрении специальных структур предполагаемых закупок товаров участниками модели подобно тому, как симплекс-метод в линейном программировании базируется на рассмотрении базисных множеств. Каждой такой структуре закупок сопоставляется два множества цен, именуемые условно зоной предпочтительности данной структуры и зоной её сбалансированности. Особенность рассматриваемых моделей в том, что вводимые множества являются многогранными и образуют два полиэдральных комплекса в двойственности. Вектор равновесных цен задаётся точкой пересечения отвечающих друг другу многогранников. Это новый класс задач комплементарности — задачи полиэдральной комплементарности [6]. Он является естественным расширением класса задач линейной комплементарности [15, 16]. Оказалось, что в рассматриваемых случаях возникающее точечно-множественное отображение обладает особым свойством монотонности, характерным для задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений задачи (матрицы класса P) [15, 16].

Такой подход позволил разработать достаточно эффективные алгоритмы как для линейной модели обмена [3, 5], так и для различных её вариаций [4, 8–10, 17, 18]. Эти алгоритмы естественно рассматривать как процедуры симплексного типа для отыскания равновесных цен.

Применение этого подхода к дробно-линейной модели обмена характеризуется рядом отличительных особенностей. В первую очередь это касается формирования комплекса зон предпочтительности, которые те-

перь не ограничиваются пределами симплекса цен. Для случая фиксированных бюджетов возникающее точечно-множественное отображение не обладает свойством потенциальности в отличие от случая линейных моделей обмена. Но сохраняется требуемое свойство монотонности, что позволяет полностью обосновать предложенную процедуру отыскания равновесия и мотивировать гипотезу о его единственности. Проведённые рассмотрения выявляют особенности равновесия «free disposal» в дробно-линейной модели.

1. Модель

Будем рассматривать модель обмена в традиционном описании: имеется m участников модели, которые обмениваются n товарами. Для i-го участника задан ненулевой вектор $w^i \in \mathbb{R}^n_+$, компоненты которого указывают начальные запасы участника по соответствующим товарам. Кроме того, задана функция f_i, характеризующая предпочтения i-го участника: если $x', x'' \in \mathbb{R}^n_+$ — два различных набора товаров и $f_i(x') > f_i(x'')$, то для участника i набор x' предпочтительнее набора x''.

При фиксированном векторе цен $p \in \mathbb{R}^n_+$ участник i может продать свой набор w^i и приобрести набор x^i, стремясь при этом максимизировать свою функцию предпочтения, т. е. решает оптимизационную задачу вида

$$f_i(x^i) \to \max, \tag{1}$$

$$(p, x^i) \leqslant (p, w^i), \tag{2}$$

$$x^i \geqslant 0. \tag{3}$$

Неравенство (2) принято называть *бюджетным ограничением.* Предполагается, что функции f_i квазивогнуты и принимают конечные значения на всём множестве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0\}$, а $\sum\limits_{i=1}^m w^i > 0$.

Если при $p = \widehat{p}$ все задачи участников разрешимы и среди оптимальных решений найдутся такие $\widehat{x}^i$, что выполняется баланс товаров

$$\sum_{i=1}^m \widehat{x}^i = \sum_{i=1}^m w^i, \tag{4}$$

то говорят, что вектор цен $\widehat{p}$ и совокупность векторов $\widehat{x}^i$ задают *состояние равновесия* модели.

Даже в линейной модели обмена, когда все функции f_i являются линейными, равновесие существует не всегда [13]. Более слабым является

понятие равновесия «free disposal», когда условие баланса товаров (4) заменяется парой условий:

$$\sum_{i=1}^{m} \widehat{x}^i \leqslant \sum_{i=1}^{m} w^i, \tag{5}$$

$$\left(\widehat{p}, \sum_{i=1}^{m} \widehat{x}^i - \sum_{i=1}^{m} w^i\right) = 0. \tag{6}$$

Поскольку $\widehat{p} \geqslant 0$, из (5) и (6) следует, что

$$\widehat{p}_j \left(\sum_{i=1}^{m} \widehat{x}^i_j - \sum_{i=1}^{m} w^i_j\right) = 0$$

при всех $j \in J$. Это означает, что не полностью раскупаемые товары имеют нулевую цену.

Для того чтобы различать эти два понятия равновесия, будем равновесие «free disposal» называть *слабым равновесием*, а равновесие в первоначальном классическом смысле — *строгим равновесием*. Ясно, что строгое равновесие является и слабым. Слабое равновесие, но не строгое, назовём *существенно слабым*.

В данной статье исследуется модель с дробно-линейными функциями предпочтения:

$$f_i(x) = \frac{(c^i, x) + c^i_\circ}{(d^i, x) + d^i_\circ} = \frac{c^i(x)}{d^i(x)}, \tag{7}$$

где $c^i, d^i \in \mathbb{R}^n$, $c^i_\circ, d^i_\circ \in \mathbb{R}^1$ заданы. При этом предполагается, что $d^i \geqslant 0$ и $d^i_\circ > 0$. Таким образом, функции f_i определены на всем $\mathbb{R}^n_+$ и, как известно, являются квазивогнутыми и квазивыпуклыми одновременно.

Если в такой модели равновесный вектор цен имеет нулевые компоненты, то равновесие можно превратить в существенно слабое. В самом деле, пусть вектор $\widehat{p}$ и система векторов $\{\widehat{x}^i\}$ образуют строгое равновесие и при этом $\widehat{p}_k = 0$. Для векторов $\widehat{x}^i$ выполняется условие (4). Среди компонент $\widehat{x}^i_k$ должны быть положительные, так как по предположению $\sum\limits_{i=1}^{m} w^i > 0$. Выберем какую-либо из таких компонент и рассмотрим задачу соответствующего участника i при $p = \widehat{p}$. Ввиду $\widehat{p}_k = 0$ бюджетное ограничение задачи не зависит от x^i_k. Поэтому допустимыми решениями этой задачи будут все векторы $x(t)$, получающиеся из вектора $\widehat{x}^i$ заменой его компоненты $\widehat{x}^i_k$ параметром $t \geqslant 0$. На допустимых векторах $x(t)$ целевая функция $f^i(x)$ становится дробно-линейной функцией переменного t, а значит, монотонной. Из оптимальности $\widehat{x}^i$ следует, что $f^i(x(t))$

достигает максимума в точке $t = \widehat{x}_k^i > 0$ при условии $t \geqslant 0$. Ввиду монотонности это возможно, лишь если функция постоянна. Таким образом, все векторы $x(t)$ при $t \geqslant 0$ оказываются оптимальными в рассматриваемой задаче. Тем самым у вектора $\widehat{x}^i$ можно заменить компоненту $\widehat{x}_k^i$ любым неотрицательным значением, получая снова оптимальный вектор в этой задаче. Заменим $\widehat{x}_k^i$ нулём и полученный вектор снова обозначим через $\widehat{x}^i$. Ясно, что условия (5), (6) выполняются и вектор $\widehat{p}$ с новой системой векторов $\{\widehat{x}^i\}$ задают слабое равновесие. Но $\sum\limits_{i=1}^m \widehat{x}_k^i$ в результате указанной замены уменьшилась и теперь

$$\sum_{i=1}^m \widehat{x}_k^i < \sum_{i=1}^m w_k^i,$$

т. е. равновесие является существенно слабым.

Замечание 1. Если проделать указанные замены для всех $\widehat{x}_k^i > 0$, то вообще получим $\sum\limits_{i=1}^m \widehat{x}_k^i = 0$. Это одна из особенностей дробно-линейной модели обмена.

Замечание 2. Из приведённых рассуждений следует, что если для каждого $\widehat{p}_j = 0$ среди компонент $\widehat{x}_j^i$ найдётся положительная, то можно проделать и обратный переход от существенно слабого к строгому равновесию, заменяя указанные компоненты на подходящие бóльшие значения.

Вводя должным образом единицы измерения товаров, можно считать, что

$$\sum_{i=1}^m w^i = e, \tag{8}$$

где $e = (1, \ldots, 1)$.

Ввиду однородности условий (2) можно на вектор $p \in \mathbb{R}_+^n$ наложить дополнительное условие нормировки $(p, e) = \sum\limits_{j=1}^n p_j = 1$ и рассматривать его в *симплексе цен* $\sigma = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum\limits_{j=1}^n p_j = 1. \right\}$.

В случае, когда $w^i = \lambda_i e$, $\lambda_i > 0$, имеем $(p, w^i) = \lambda_i (p, e) = \lambda_i$ при всех $p \in \sigma$. В этом случае говорят о *модели обмена с фиксированными бюджетами.* Ввиду (8) должно выполняться $\sum\limits_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Введём множества $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$.

2. Существование равновесия

Для исследования вопроса о существовании равновесия в рассматриваемой модели воспользуемся идейной основой известного доказательства существования равновесия в более общей модели конкурентной экономики Эрроу — Дебре [11], включающей помимо участников-потребителей и фирмы-производители. К сожалению, непосредственное вложение рассматриваемой модели в качестве частного случая в теоремы из [11] оказывается достаточно громоздким. Поэтому для полноты изложения мы приводим ниже необходимые конструкции и ход рассуждений из [11] применительно непосредственно к дробно-линейной модели обмена, синтезируя и упрощая доказательства соответствующих положений с учётом специфики рассматриваемого случая.

Из предположений, используемых в [11], для нас важными являются следующие условия:

$$w^i > 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

$$\forall i \ \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \ \exists \, y \in \mathbb{R}^n_+ \ : \ f_i(y) > f_i(x). \tag{10}$$

Условие (10) является определяющим для *свойства ненасыщаемости* функций f_i на $\mathbb{R}^n_+$.

Замечание 3. В предположении условия ненасыщаемости неравенства (2) для оптимальных $\widehat{x}^i$ будут выполняться как равенства, и, следовательно, будет выполняться условие (6) в определении слабого равновесия, а потому его можно опустить, оставляя лишь неравенство (5).

Остановимся на условии (10) более детально. В общем случае ненасыщаемость на $\mathbb{R}^n_+$ имеет место для функций, обладающих свойством монотонности:

$$y \geqslant x, \ \ y \neq x \Rightarrow f(y) > f(x).$$

Однако несложно убедиться, что свойство монотонности для дробно-линейной функции f_i выполняется лишь в случаях:

(i) $c^i_j > 0$, $d^i_j = 0 \ \forall j = 1, \ldots, n$;

(ii) функция f_i с точностью до положительного множителя приводится к виду $f_i(x) = 1 + \alpha / d^i(x)$, где α — некоторая константа.

Следовательно, класс предпочтений, задаваемых монотонными в традиционном понимании дробно-линейными функциями, совпадает с классом предпочтений, задаваемых линейными функциями.

Можно ввести более слабое понятие монотонности. Будем говорить, что функция f *радиально монотонна* на $\mathbb{R}^n_+$, если $f(tx) > f(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$, $t > 1$.

Это означает, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n_+, x \neq 0$, функция $\varphi(t) = f(tx)$ при $t > 0$ является возрастающей. Для функций f_i вида (7) получаем

$$\varphi'(t) = \frac{d^i_\circ(c^i, x) - c^i_\circ(d^i, x)}{(d^i(tx))^2} > 0$$

при всех $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq 0$. Отсюда

$$d^i_\circ c^i_j - c^i_\circ d^i_j > 0$$

при всех $j \in J$.

Введём обозначение

$$\gamma^i_j = \det\begin{vmatrix} c^i_j & c^i_\circ \\ d^i_j & d^i_\circ \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Тогда условие радиальной монотонности функций f_i можно записать в виде

$$\gamma^i_j > 0, \qquad i \in I, \;\; j \in J. \tag{12}$$

Это условие является достаточным, но не необходимым для того, чтобы функции f_i обладали свойством ненасыщаемости на $\mathbb{R}^n_+$. Свойство ненасыщаемости заключается в том, что на $\mathbb{R}^n_+$ функция не имеет точек максимума. Но среди точек максимума дробно-линейной функции на многогранном множестве всегда присутствуют крайние точки множества. Для $\mathbb{R}^n_+$ таковой является только точка $x = 0$. Таким образом, для дробно-линейных функций f_i условие (10) эквивалентно условию: *точкаЁ*$x = 0$ *не является точкой максимума функции* f_i *на* $\mathbb{R}^n_+$, т. е.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} f_i(x) > f(0). \tag{13}$$

Заметим также, что 0 является точкой максимума дробно-линейной функции f_i на $\mathbb{R}^n_+$ тогда и только тогда, когда это имеет место для линейной функции

$$u_i(x) = (c^i, x) + c_\circ - f_i(0)[(d^i, x) + d_\circ].$$

Тот факт, что точка 0 не является точкой максимума функции u_i на $\mathbb{R}^n_+$, означает, что функция u_i возрастает по какому-то из координатных направлений:

$$\exists\; j : \; c^i_j - \frac{c^i_\circ}{d^i_\circ} d^i_j > 0. \tag{14}$$

Теперь условие ненасыщаемости (10) можно записать в виде

$$\forall i \in I \;\exists j \; : \; \gamma^i_j > 0. \tag{15}$$

Теорема 1. *При выполнении условий* (9) *и* (15) *в дробно-линейной модели обмена существует слабое равновесие.*

Доказательству этого утверждения предпошлём краткое описание понятия *социальной системы* [11], отсылая читателя за более подробным изложением непосредственно к первоисточнику. В приводимом описании все обозначения локализованы и не связаны с предыдущими обозначениями. Понятие *социальной системы* введено Дебре как обобщение игры n-лиц и состоит в следующем.

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ — множество участников системы. Участник i характеризуется некоторым множеством A_i своих возможных стратегий a_i и вещественной *функцией полезности* h_i, заданной на прямом произведении $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Предполагается, что A_i является непустым выпуклым компактным множеством в евклидовом пространстве, а функция h_i непрерывна на A и квазивогнута по a_i. На вариации выбора a_i участником i влияют стратегии других участников, т. е. участник i может варьировать стратегию a_i в пределах не всего множества A_i, а лишь некоторой его части, которая определяется набором стратегий прочих участников. Это формализуется через задание для каждого элемента $a \in A$ непустого множества $\varphi_i(a) \subset A_i$. Это множество не зависит от a_i, но для простоты записи пишем $\varphi_i(a)$, оговаривая указанное свойство в виде дополнительного требования на соответствие φ_i. Кроме того, соответствие φ_i предполагается выпуклозначным и непрерывным на A (полунепрерывным сверху и снизу).

Говорят, что набор $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ задаёт *состояние равновесия социальной системы*, если

$$h_i(a^*) = \max_{a_i \in \varphi_i(a^*)} h_i(a_1^*, \dots a_{i-1}^*, a_i, a_{i+1}^*, \dots, a_n^*)$$

для каждого участника i.

Теорема о социальной системе [11]. *При перечисленных выше предположениях относительно всех элементов социальной системы состояние равновесия в системе всегда существует.*

Вернёмся к рассмотрению дробно-линейной модели обмена.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим социальную систему с $m+1$ участников: m участников модели обмена и дополнительный участник $m+1$, именуемый «рынок». Участнику $i \neq m+1$ сопоставляется $a_i = x^i \in \mathbb{R}^n$, а участнику $m+1$ — вектор $a_{m+1} = p \in \mathbb{R}^n$. Далее для

$i \neq m+1$ принимаем

$$A_i = \{x^i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x^i \leqslant \sum_{i=1}^m w^i + e\}, \quad h_i(a) = f_i(x^i),$$

$$\varphi_i(a) = \{x^i \in A_i \mid (p, x) \leqslant (p, w^i)\}.$$

Для участника «рынок» —

$$A_{m+1} = \sigma, \quad h_{m+1} = \left(p, \sum_{i=1}^m x^i - \sum_{i=1}^m w^i\right), \quad \varphi_{m+1}(a) \equiv \sigma.$$

Легко видеть, что почти все упомянутые условия на элементы социальной системы выполняются. В проверке нуждается лишь непрерывность соответствий φ_i. На строгом доказательстве этого мы не останавливаемся, отсылая читателя к [11]. Отметим лишь, что множества $\varphi_i(a)$ являются многогранниками, вершины которых меняются с изменением переменной $p \in \sigma$. Это изменение происходит непрерывным образом благодаря условию $w^i > 0$, вследствие чего точка w^i принадлежит внутренности множества A_i. Это и обуславливает требуемую непрерывность.

Таким образом, можно утверждать, что равновесие в описанной социальной системе существует. Пусть оно задаётся совокупностью стратегий $\{\widehat{x}^i\}_{i\in I}$ и $\widehat{p}$. Покажем, что эти векторы задают состояние слабого равновесия в рассматриваемой модели обмена.

Убедимся сначала в выполнении неравенства (5). Так как вектор $\widehat{x}^i$ решает задачу i-го участника, то $(\widehat{p}, \widehat{x}^i) \leqslant (\widehat{p}, w^i)$. Суммируя эти неравенства, получаем

$$\left(\widehat{p}, \sum_{i=1}^m \widehat{x}^i - \sum_{i=1}^m w^i\right) \leqslant 0.$$

Но $\widehat{p}$ решает задачу участника «рынок», а значит,

$$\left(\widehat{p}, \sum_{i=1}^m \widehat{x}^i - \sum_{i=1}^m w^i\right) = \max_{p\in\sigma} \left(p, \sum_{i=1}^m \widehat{x}^i - \sum_{i=1}^m w^i\right).$$

Тем самым имеем

$$\left(p, \sum_{i=1}^m \widehat{x}^i - \sum_{i=1}^m w^i\right) \leqslant 0$$

для всех $p \in \sigma$. Принимая здесь в качестве вектора p последовательно координатные орты e_k при всех $k = 1, \ldots, n$, получим требуемое неравенство (5).

Из (5) следует, что $\widehat{x}_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} w^i$. Тогда неравенство $x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} w^i + e$ для вектора $\widehat{x}_i$ выполняется как строгое, а значит, может быть опущено. Но без него задача i-го участника системы совпадает с задачей i-го участника модели. В итоге получили, что вектор $\widehat{x}_i$ является решением задачи i-го участника модели.

Равенство (6), как отмечалось выше, выполняется ввиду условия ненасыщаемости функции f_i. Теорема 1 доказана.

Приведём достаточное условие того, что равновесный вектор цен $\widehat{p}$ не содержит нулевых компонент, т. е. в равновесном состоянии неравенство (5) выполняется как равенство, слабое равновесие является строгим.

Так как f_i — дробно-линейная функция, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} f_i(x) = \sup\{f_i(0), \sup_{k \in J} \lim_{t \to +\infty} f_i(te_k)\}$$

Следовательно, ввиду (13), можно утверждать, что

$$\forall\ i \quad \exists\ k : \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} f_i(x) = \lim_{t \to +\infty} f_i(te_k)$$

Как легко видеть,

$$\lim_{t \to +\infty} f(\widehat{x} + te_k) = \lim_{t \to +\infty} f_i(te_k)$$

при любом $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n_+$. Это означает, что функция f_i возрастает по направлению e_k в любой точке множества $\mathbb{R}^n_+$. В этом случае будем говорить, что товар k является *приоритетным* для участника i.

Теорема 2. *Если при выполнении условий* (9) *и* (15) *каждый товар является приоритетным хотя бы для одного из участников модели, то в модели существуют состояния строгого равновесия.*

Доказательство. Ясно, что если k — приоритетный товар для участника i и задача этого участника рассматривается при $p \in \sigma$ таком, что $p_k = 0$, то эта задача не будет разрешимой, так как для любого $x \in X_i(p)$ будет $(x + te_k) \in X_i(p)$ при любом $t > 0$ и $f_i(x + te_k) > f(x)$. Следовательно, для равновесного вектора цен $\widehat{p}$ должно выполняться $\widehat{p}_k > 0$. Теорема 2 доказана.

3. Идея подхода к отысканию равновесия

Любому набору векторов $\{x^i\}_{i \in I}$, задающих закупки участников модели, можно сопоставить множество $\mathcal{B} \subset I \times J$, характеризующее *структуру* закупок:

$$\mathcal{B} = \big\{(i, j) \in I \times J \mid x^i_j > 0\big\}.$$

Относительно любого множества $\mathcal{B} \subset I \times J$ можно поставить два вопроса.

1. Существуют ли такие векторы цен $p \in \sigma$, что возможно согласование структуры закупок $\mathcal{B}$ с максимизацией функций предпочтения при бюджетных ограничениях? Если да, то это означает, что при решении задач участников при данном p найдутся оптимальные решения $\widehat{x}^i$ такие, что $\widehat{x}^i_j = 0$ при $(i, j) \notin \mathcal{B}$. Иными словами, переменные x^i_j для $(i, j) \notin \mathcal{B}$ можно считать равными нулю.

Множество таких p будем обозначать через $\Xi(\mathcal{B})$ и называть *зоной предпочтительности структуры* $\mathcal{B}$.

2. Существуют ли такие $p \in \sigma$, что возможны закупки x^i, согласованные со структурой $\mathcal{B}$, т. е. $x^i_j = 0$ при $(i, j) \notin \mathcal{B}$, и удовлетворяющие при данном p бюджетным ограничениям, а также условиям баланса товаров (5)?

Множество таких p будем обозначать $\Omega(\mathcal{B})$ и называть *зоной сбалансированности структуры* $\mathcal{B}$.

Ясно, что если $\widehat{p}$ и $\{\widehat{x}^i\}$ задают равновесное состояние, то образовав структуру
$$\widehat{\mathcal{B}} = \bigl\{(i, j) \mid \widehat{x}^i_j > 0\bigr\},$$
имеем $\widehat{p} \in \Omega(\widehat{\mathcal{B}}) \cap \Xi(\widehat{\mathcal{B}})$. Если при этом множество $\Omega(\widehat{\mathcal{B}}) \cap \Xi(\widehat{\mathcal{B}})$ окажется одноточечным, то в этом случае заданием самой структуры $\widehat{\mathcal{B}}$ равновесный вектор цен $\widehat{p}$ определяется однозначно. Структуру $\widehat{\mathcal{B}}$, обладающую таким свойством, будем называть *равновесной структурой*.

Таким образом, задача отыскания равновесного состояния сводится к задаче нахождения равновесной структуры. Однако перебор всевозможных структур с целью отыскать среди них равновесную — явно невыполнимая задача. Идея состоит в том, чтобы выделить класс структур, заведомо содержащий равновесную структуру, и организовать направленный перебор структур выделенного класса, приводящий к цели при необременительных предположениях. В этом проявляется аналогия с идеей симплекс-метода в линейном программировании, когда отыскание оптимального решения сводится к отысканию оптимального базисного набора переменных в предположении невырожденности крайних точек (вершин) допустимого множества задачи.

4. Зоны сбалансированности

Для простоты изложения дальнейшие рассмотрения проведём для модели с фиксированными бюджетами. Переход к общему случаю модели требует достаточно очевидных изменений.

Пусть λ_i — бюджет участника i. Для описания зон сбалансированности структур $\mathcal{B}$ введём величины $z_{ij} = p_j x_j^i$. Для $p \in \Omega(\mathcal{B})$ должно выполняться бюджетное ограничение (2) каждого участника. Согласно замечанию 3 в этом ограничении знак неравенства можно заменить на знак равенства. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Кроме того, из (5), (8) следуют неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} \leqslant p_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Суммируя неравенства (17), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} z_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} p_j.$$

В то же время из (16) с учётом $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j$ при $p \in \sigma$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j.$$

Это означает, что неравенства (17) должны выполняться как равенства:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = p_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Для того чтобы структура $\mathcal{B}$ отвечала набору векторов $\{x^i\}$, должно выполняться условие

$$(i, j) \notin \mathcal{B} \Rightarrow x_j^i = 0, \tag{19}$$

следовательно,

$$z_{ij} = 0, \quad (i, j) \notin \mathcal{B}. \tag{20}$$

В результате вопрос о принадлежности p множеству $\Omega(\mathcal{B})$ сводится к вопросу существования неотрицательных z_{ij}, удовлетворяющих (16), (18), (20). Если для таких z_{ij} при данном p принять

$$x_j^i = \begin{cases} \frac{z_{ij}}{p_j} & \text{при } p_j > 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то легко видеть, что условия (2), (5), (19) выполняются, причём (2) выполняются как равенства.

Условия (16), (18) представляют собой условия классической транспортной задачи в матричной постановке [2, 7]. Воспользуемся известной графовой интерпретацией структуры допустимых решений транспортной задачи. Введём граф $G(\mathcal{B})$ с множествами вершин $\{1, \ldots, m+n\}$ и дуг $\{(i, m+j) \mid (i,j) \in \mathcal{B}\}$. Известно, что при решении транспортных задач можно ограничиться рассмотрением лишь таких структур $\mathcal{B}$, для которых графы $G(\mathcal{B})$ являются деревьями. В нашем случае имеет место аналогичное утверждение, но множество рассматриваемых структур следует расширить.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{B}$ таких структур $\mathcal{B}$, что графы $G(\mathcal{B})$ не содержат циклов и обладают *свойством i-накрываемости*:

$$\forall\ i \in I \ \ \exists (i,j) \in \mathcal{B}, \tag{21}$$

т. е. вершины $i \in I$ не являются изолированными вершинами графа $G(\mathcal{B})$. Это и есть выделяемый класс структур, о котором шла речь в предыдущем разделе. Имеет место следующая

Теорема 3. *Для равновесного вектора цен $\widehat{p}$ всегда можно указать структуру $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ и равновесный набор векторов закупок $\{\widehat{x}^i\}$ такой, что $\widehat{x}^i_j = 0$ при $(i,j) \notin \mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть вектор цен $\widehat{p}$ и набор векторов закупок $\{\widehat{x}^i\}$ образуют состояние равновесия. Возьмём структуру

$$\mathcal{B} = \{(i,j) \mid \widehat{x}^i_j > 0\}.$$

Ясно, что граф $G(\mathcal{B})$ обладает свойством i-накрываемости. Рассмотрим величины $z_{ij} = \widehat{p}_j \widehat{x}^i_j$. Они удовлетворяют условиям (16), (18) и (20). Если в графе $G(\mathcal{B})$ имеется цикл, то можно по методу потенциалов для транспортных задач [2, 7] скорректировать величины z_{ij} для дуг цикла так, чтобы они, оставаясь неотрицательными, по-прежнему удовлетворяли условиям (16), (18), но по крайней мере одна из них оказалась равной нулю. Исключая соответствующие элементы (i,j) из $\mathcal{B}$, получим такую структуру $\mathcal{B}'$, что в графе $G(\mathcal{B}')$ рассматриваемого цикла уже не будет. Если ещё остались другие циклы, то процедуру повторяем. Получаем окончательно структуру $\widehat{\mathcal{B}} \in \mathfrak{B}$. Вектор $\widehat{p}$ не изменился, а новые значения $\widehat{x}^i_j$ получаются из полученных значений z_{ij} делением на $\widehat{p}_j > 0$ или равны нулю, если $\widehat{p}_j = 0$. Теорема 3 доказана.

Вернёмся к рассмотрению множества $\Omega(\mathcal{B})$ для произвольной структуры $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$.

Граф $G(\mathcal{B})$ для $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ не обязательно является связным. Пусть τ — число компонент связности этого графа. Для совместности условий (16) и (18) нужно, чтобы на каждой компоненте связности выполнялось условие баланса правых частей:

$$\sum_{j \in J_\nu} p_j = \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i, \quad \nu = 1, \dots \tau, \tag{22}$$

где $I_\nu \subset I$ и $J_\nu \subset J$ отвечают множеству вершин ν-й компоненты (это множество состоит из вершин $i \in I_\nu$ и вершин $(m + j)$ при $j \in J_\nu$). Для $I_\nu = \varnothing$ правая часть в (22) считается равной нулю.

Так как граф $G(\mathcal{B})$ не содержит циклов и выполняется (22), то величины z_{ij} из (16), (18), (20) определяются однозначно как линейные функции от p_j:

$$z_{ij} = z_{ij}^{\mathcal{B}}(p).$$

В результате получаем описание множества $\Omega(\mathcal{B})$ как множества решений линейной системы уравнений (22) и системы неравенств

$$z_{ij}^{\mathcal{B}}(p) \geqslant 0, \quad (i, j) \in \mathcal{B}, \tag{23}$$

при дополнительном условии $p \in \sigma$.

5. Зоны предпочтительности

Уточним понятие зоны предпочтительности структуры закупок.

Говорим, что *товар j предпочтителен* для участника i при ценах, задаваемых вектором p, если

(i) задача (1)–(3) при данном векторе цен p разрешима;

(ii) среди оптимальных решений этой задачи существует такое решение $x^i = \widehat{x}^i$, что $\widehat{x}^i_j > 0$.

Через Ξ_{ij} будем обозначать множество тех $p \in \sigma$, при которых товар j предпочтителен для участника i.

Структура $\mathcal{B}$ является предпочтительной при данном p, если из $(i, j) \in \mathcal{B}$ следует, что при данном p товар j предпочтителен для участника i. Зона предпочтительности структуры $\mathcal{B}$ — это множество $\Xi(\mathcal{B})$ тех $p \in \sigma$, при которых $\mathcal{B}$ оказывается предпочтительной структурой. Ясно, что

$$\Xi(\mathcal{B}) = \bigcap_{(i,j) \in \mathcal{B}} \Xi_{ij}.$$

Приступая к описанию множества Ξ_{ij}, разобъём его на два подмножества

$$\Xi_{ij}^{+} = \{p \in \Xi_{ij} \mid p_j > 0\}, \quad \Xi_{ij}^{\circ} = \{p \in \Xi_{ij} \mid p_j = 0\}.$$

Напомним, что расматривается модель с фиксированными бюджетами и λ_i — фиксированный бюджет i-го участника, задающий его допустимое множество

$$X_i(p) = \{x^i \mid (p, x^i) = \lambda_i, x^i \geqslant 0\}.$$

Зафиксируем некоторые $i \in I$ и $j_\circ \in J$.

Лемма 1. *Множество $\Xi^+_{ij_\circ}$ задаётся условиями $p \in \sigma$, $p_{j_\circ} > 0$ и системой линейных неравенств*

$$\gamma^i_l p_{j_\circ} - \gamma^i_{j_\circ} p_l \leqslant \lambda_i \delta^i_{j_\circ l}, \quad l \in J, \tag{24}$$

где $\gamma^i_l = \det\begin{vmatrix} c^i_l & c^i_\circ \\ d^i_l & d^i_\circ \end{vmatrix}$, $\gamma^i_{j_\circ} = \det\begin{vmatrix} c^i_{j_\circ} & c^i_\circ \\ d^i_{j_\circ} & d^i_\circ \end{vmatrix}$, $\delta^i_{j_\circ l} = \det\begin{vmatrix} c^i_{j_\circ} & c^i_l \\ d^i_{j_\circ} & d^i_l \end{vmatrix}$.

Доказательство. Задача участника i при фиксированном p состоит в максимизации $f_i(x^i)$ на $X_i(p)$. Из теории дробно-линейного программирования известно, что оптимальность $x^i = \widehat{x}^i$ в этой задаче равносильна оптимальности данного вектора в задаче линейного программирования

$$c^i(x^i) - \alpha d^i(x^i) \to \max_{x^i \in X_i(p)} ! \tag{25}$$

при $\alpha = f_i(\widehat{x}^i)$. Для неё можно воспользоваться известным признаком оптимальности: $\widehat{x}^i$ — решение задачи (25) тогда и только тогда, когда существует такое y, что

$$c^i_l - \alpha d^i_l \leqslant y p_l, \qquad l \in J, \tag{26}$$

$$\widehat{x}^i_j > 0 \Rightarrow c^i_j - \alpha d^i_j = y p_j. \tag{27}$$

Нас интересуют $p \in \Xi^+_{ij_\circ}$, т. е. такие $p \in \sigma$, что $p_{j_\circ} > 0$ и среди оптимальных векторов $\widehat{x}^i$ найдутся векторы с $\widehat{x}^i_{j_\circ} > 0$. Зафиксировав какой-то один из них, можно утверждать. что вместе с $\widehat{x}^i$ оптимальными будут все векторы вида $g^k = (\lambda_i/p_k)e_k$, отвечающие $p_k > 0$, $\widehat{x}^i_k > 0$ (их оптимальность следует из (26), (27) при том же значении y). В частности, таким будет $g^{j_\circ}$. Поэтому $\alpha = f_i(g^{j_\circ})$ и несложно убедиться, что

$$\alpha = \frac{c^i_{j_\circ}\lambda_i + c^i_\circ p_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}\lambda_i + d^i_\circ p_{j_\circ}}. \tag{28}$$

Из (27) при $j = j_\circ$ следует, что $y = (c^i_{j_\circ} - \alpha d^i_{j_\circ})/p_{j_\circ}$. Подставляя α и y в (26), получаем

$$c^i_l - \frac{c^i_{j_\circ}\lambda_i + c^i_\circ p_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}\lambda_i + d^i_\circ p_{j_\circ}} d^i_l \leqslant \left[c^i_{j_\circ} - \frac{c^i_{j_\circ}\lambda_i + c^i_\circ p_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}\lambda_i + d^i_\circ p_{j_\circ}} d^i_{j_\circ}\right]\frac{p_l}{p_{j_\circ}}, \qquad l \in J.$$

После очевидных упрощений получаем систему неравенств (24). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При* $\gamma^i_{j_\circ} \leqslant 0$ *имеем* $\Xi^+_{ij_\circ} = \varnothing$.

Доказательство. Ввиду условия ненасыщаемости функций f_i на $\mathbb{R}^n_+$ среди γ^i_l найдётся $\gamma^i_k > 0$. Проанализируем (24) для $l = k$, предполагая $\gamma^i_{j_\circ} \leqslant 0$. Имеем $\gamma^i_{j_\circ} = c^i_{j_\circ} d^i_\circ - d^i_{j_\circ} c^i_\circ \leqslant 0$. Могут реализоваться два случая:

(i) $d^i_{j_\circ} = 0$, $c^i_{j_\circ} \leqslant 0$;

(ii) $d^i_{j_\circ} > 0$, $\frac{c^i_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}} \leqslant \frac{c^i_\circ}{d^i_\circ}$.

Аналогично для $\gamma^i_k = c^i_k d^i_\circ - d^i_k c^i_\circ > 0$ также возможны два случая:

(s) $d^i_k = 0$, $c^i_k > 0$;

(ss) $d^i_k > 0$, $\frac{c^i_k}{d^i_k} > \frac{c^i_\circ}{d^i_\circ}$.

Таким образом, могут реализоваться 4 варианта:

(i)∧(s) $\Rightarrow \delta^i_{j_\circ k} = 0$;

(i)∧ (ss) $\Rightarrow \delta^i_{j_\circ k} = c^i_{j_\circ} d^i_k \leqslant 0$;

(ii)∧ (s) $\Rightarrow \delta^i_{j_\circ k} = -d^i_{j_\circ} c^i_k < 0$;

(ii) ∧ (ss) $\Rightarrow \frac{c^i_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}} \leqslant \frac{c^i_\circ}{d^i_k} < \frac{c^i_k}{d^i_k}, \quad \delta^i_{j_\circ k} = c^i_{j_\circ} d^i_k - c^i_k d^i_{j_\circ} < 0$.

Резюмируя, имеем $\delta^i_{j_\circ k} \leqslant 0$. В то же время левая часть в (24) при $p_{j_\circ} > 0$ положительна:

$$\gamma^i_k p_{j_\circ} - \gamma^i_{j_\circ} p_k \geqslant \gamma^i_k p_{j_\circ} > 0.$$

Следовательно, система неравенств (24) не имеет решений — $\Xi^+_{ij_\circ} = \varnothing$. Лемма 2 доказана.

Перейдём к рассмотрению множества $\Xi^\circ_{ij_\circ}$. Для $p \in \Xi^\circ_{ij_\circ}$ выполняется $p_{j_\circ} = 0$. В этом случае, имея некоторый $\widehat{x} \in X_i(p)$, можно увеличивать сколь угодно компоненту $x_{j_\circ}$, не покидая множество $X_i(p)$:

$$(\widehat{x} + te_{j_\circ}) \in X_i(p)$$

при любом $t \geqslant 0$. Пусть задача максимизации функции f_i на $X_i(p)$ разрешима и $\widehat{x}^i$ — оптимальное решение. При этом функция $f_i(\widehat{x}^i + te_{j_\circ})$ будет дробно-линейной функцией $\varphi(t)$ переменного t и, следовательно, возможны две ситуации:

(а) $\varphi(t)$ монотонно убывает с ростом t;

(б) $\varphi(t)$ не меняется с изменением t: $\varphi(t) \equiv \varphi(0)$.

В ситуации (а) функция $\varphi(t)$ растёт с уменьшением t и при $\widehat{x}^i_{j_\circ} > 0$ можно его уменьшить, оставляя неотрицательным, что приводит к увеличению значения функции f_i. Это противоречит оптимальности $\widehat{x}^i$. Значит, для оптимального $\widehat{x}^i$ должно выполняться $\widehat{x}^i_{j_\circ} = 0$, а следовательно, $p \notin \Xi_{ij_\circ}$. Таким образом, для $p \in \Xi^\circ_{ij_\circ}$ ситуация (а) исключается.

В ситуации (б) имеем

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{j_\circ}}(\widehat{x}^i) = 0,$$

т. е.

$$\frac{c^i_{j_\circ} d^i(\widehat{x}^i) - d^i_{j_\circ} c^i(\widehat{x}^i)}{(d^i(\widehat{x}^i))^2} = 0. \tag{29}$$

Лемма 3. *При $\gamma^i_{j_\circ} < 0$ множество $\Xi^\circ_{ij_\circ}$ пусто. При $\gamma^i_{j_\circ} = 0$ множество $\Xi^\circ_{ij_\circ}$ непусто лишь в случае $c^i_{j_\circ} = d^i_{j_\circ} = 0$. При этом вся открытая грань симплекса σ, отвечающая $p_{j_\circ} = 0$, содержится в $\Xi^\circ_{ij_\circ}$. При $\gamma^i_{j_\circ} > 0$ из $\Xi^\circ_{ij_\circ} \neq \varnothing$ следует, что $\Xi^+_{ij_\circ} = \varnothing$. Точки множества $\Xi^\circ_{ij_\circ}$ удовлетворяют неравенствам* (24).

Доказательство. Из (29) при $d^i_{j_\circ} = 0$ получаем $c^i_{j_\circ} = 0$, и, значит, $\gamma^i_{j_\circ} = 0$. При $d^i_{j_\circ} > 0$ из (29) следует, что

$$\frac{c^i_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}} = \frac{c^i(\widehat{x}^i)}{d^i(\widehat{x}^i)} = f_i(\widehat{x}^i). \tag{30}$$

С учётом $f_i(\widehat{x}^i) > f_i(0) = c^i_\circ / d^i_\circ$ это даёт $\gamma^i_{j_\circ} > 0$.

Таким образом, при $\gamma^i_{j_\circ} < 0$ имеем $\Xi^\circ_{ij_\circ} = \varnothing$, а при $\gamma^i_{j_\circ} = 0$ для $\Xi^\circ_{ij_\circ} \neq \varnothing$ необходимо $c^i_{j_\circ} = d^i_{j_\circ} = 0$. В последнем случае задача участника i будет разрешимой при любом $p \in \sigma$ таком, что $p_{j_\circ} = 0$ и $p_j > 0$, $j \neq j_\circ$, т. е. вся открытая грань симплекса σ, отвечающая $p_{j_\circ} = 0$, содержится в $\Xi^\circ_{ij_\circ}$. Кроме того, в случае $\gamma^i_{j_\circ} = 0$, $c^i_{j_\circ} = d^i_{j_\circ} = 0$ из (24) следует, что $p_{j_\circ} \leqslant 0$, так как среди γ^i_l существуют положительные (ввиду (15)), а $\delta^i_{lj_\circ} = \delta^i_{j_\circ l} = 0$ при всех l. Ввиду леммы 1 имеем $\Xi^+_{ij_\circ} = \varnothing$. По той же причине для точек $p \in \Xi^\circ_{ij_\circ}$ система (24) выполняется.

Пусть теперь $\gamma^i_{j_\circ} > 0$ и $\Xi^\circ_{ij_\circ} \neq \varnothing$. Покажем , что $\Xi^+_{ij_\circ} = \varnothing$, а для точек $p \in \Xi^\circ_{ij_\circ}$ также выполняются неравенства (24). Пусть $p' \in \Xi^+_{ij_\circ}$. Тогда оптимальным в задаче участника i будет вектор $\widehat{x}^i = (\lambda_i / p'_{j_\circ}) e_{j_\circ}$ и из (30) следует, что

$$\frac{c^i_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}} = f_i(\widehat{x}^i) = \frac{c^i_{j_\circ}\lambda_i + c^i_\circ p'_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}\lambda_i + d^i_\circ p'_{j_\circ}}.$$

Это влечёт $\gamma^i_{j_\circ} p'_{j_\circ} = 0$, а с учётом $\gamma^i_{j_\circ} > 0$ имеем $p'_{j_\circ} = 0$, что ввиду леммы 1 противоречит тому, что $p' \in \Xi^+_{ij_\circ}$. Следовательно, $\Xi^+_{ij_\circ} = \varnothing$.

Покажем теперь, что неравенства (24) выполнены при $p \in \Xi^\circ_{ij_\circ}$. Если помимо $p_{j_\circ} = 0$ для некоторого $k \neq j_\circ$ имеем $p_k = 0$, то соответствующее неравенство (24) сводится к $\delta^i_{j_\circ k} \geqslant 0$. Убедимся в этом. В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\widehat{x}^i) = \frac{c^i_k d^i(\widehat{x}^i) - d^i_k c^i(\widehat{x}^i)}{(d^i(\widehat{x}^i))^2} \leqslant 0.$$

Отсюда при $d^i_k = 0$ имеем $c^i_k \leqslant 0$, а при $d^i_k > 0$ получаем

$$\frac{c^i_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}} = \frac{c^i(\widehat{x}^i)}{d^i(\widehat{x}^i)} \geqslant \frac{c^i_k}{d^i_k}.$$

В любом из вариантов имеем $\delta^i_{j_\circ k} \geqslant 0$.

Пусть теперь $p_k > 0$. Если при этом $\widehat{x}^i_k > 0$, то оптимальным решением задачи участника i наряду с $\widehat{x}^i$ будет и вектор $(\lambda_i/p_k)e_k$. Как ранее для вектора p', снова получаем

$$\frac{c^i_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}} = \frac{c^i_k\lambda_i + c^i_\circ p_k}{d^i_k\lambda_i + d^i_\circ p_k}.$$

Отсюда $-\gamma^i_{j_\circ} p_k = \lambda_i \delta^i_{j_\circ k}$. Если учесть, что $p_{j_\circ} = 0$, то это означает, что соответствующее неравенство из (24) выполняется как равенство.

Пусть теперь $\widehat{x}^i_k = 0$ при $p_k > 0$. Тогда вектор $(\lambda_i/p_k)e_k$ допустим в задаче участника i, но не обязательно оптимален, и, выполняя аналогичные выкладки, получим

$$\frac{c^i_k\lambda_i + c^i_\circ p_k}{d^i_k\lambda_i + d^i_\circ p_k} \leqslant \frac{c^i_{j_\circ}}{d^i_{j_\circ}}.$$

Отсюда следует, что $-\gamma^i_{j_\circ} p_k \leqslant \lambda_i \delta^i_{j_\circ k}$. Это означает, что выполнено соответствующее неравенство (24). Лемма 3 доказана.

Следует заметить, что когда значение функции f_i не меняется при изменении $x^i_{j_\circ}$ (случай (б) при рассмотрении множества $\Xi^\circ_{ij_\circ}$), говорить «участник i предпочитает при $p_{j_\circ} = 0$ товар $j_\circ$» не совсем правильно. Правильнее сказать, что участник i не возражает, если товар $j_\circ$ он получит «в нагрузку».

Вышеприведённые рассуждения позволяют наложить дополнительное условие на модель:

$$\max_i \gamma^i_j > 0 \quad \forall\, j \in J. \tag{31}$$

Действительно, если $\gamma^i_{j_\circ} < 0$, то $\Xi_{ij_\circ} = \varnothing$, т. е. участник i не будет закупать товар $j_\circ$ ни при каких ценах. Если же $\gamma^i_{j_\circ} = 0$, то $\Xi^+_{ij_\circ} = \varnothing$, т. е. участник i не будет закупать товар $j_\circ$ при $p_{j_\circ} > 0$. А при $p_{j_\circ} = 0$ он также не заинтересован в закупке товара $j_\circ$ и лишь согласится взять его «в нагрузку», когда $f_i(x^i)$ не зависит от $x^i_{j_\circ}$. Следовательно, участник i равнодушен к товару $j_\circ$ при любых ценах.

Таким образом, если условие (31) нарушено для $j = j_\circ$, т. е. $\gamma^i_{j_\circ} \leqslant 0$ при всех $i \in I$, то в равновесном состоянии $\widehat{p}_{j_\circ} = 0$, и $\widehat{x}^i_{j_\circ} > 0$ возможно, лишь когда $c^i_{j_\circ} = d^i_{j_\circ} = 0$ ($\gamma^i_{j_\circ} = 0$). В этом случае величину $\widehat{x}^i_{j_\circ}$ можно изменять, не меняя оптимальности $\widehat{x}^i$. За счёт этого можно добиться выполнения равенства $\sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{x}^i_{j_\circ} = 1$.

Если нет таких i, что $c^i_{j_\circ} = d^i_{j_\circ} = 0$, то при всех i выполняется $\widehat{x}^i_{j_\circ} = 0$, и имеем существенно слабое равновесие. В любом случае при отыскании равновесия товар $j_\circ$ можно исключить из рассмотрения.

Из вышеизложенного следует, что точки множества $\Xi_{ij_\circ}$ удовлетворяют (24), и из пары множеств $\{\Xi^+_{ij_\circ}, \Xi^\circ_{ij_\circ}\}$ лишь одно непусто, т. е. либо $\Xi_{ij_\circ} = \Xi^+_{ij_\circ}$, либо $\Xi_{ij_\circ} = \Xi^\circ_{ij_\circ}$.

Переходя к описанию зоны предпочтительности структуры $\mathcal{B}$, т. е. множества $\Xi(\mathcal{B})$, следует рассмотреть неравенства (24) для всех пар $(i, j_\circ) \in \mathcal{B}$. Это приводит к системе линейных неравенств

$$\gamma^i_l p_j - \gamma^i_j p_l \leqslant \lambda_i \delta^i_{jl} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{B}, \;\; l \in J. \tag{32}$$

Заметим, что если $(i, j') \in \mathcal{B}$ и $(i, j'') \in \mathcal{B}$, то в (32) присутствуют два неравенства $\gamma^i_{j''} p_{j'} - \gamma^i_{j'} p_{j''} \leqslant \lambda_i \delta^i_{j'j''}$ и $\gamma^i_{j'} p_{j''} - \gamma^i_{j''} p_{j'} \leqslant \lambda_i \delta^i_{j''j'}$. С учётом $\delta^i_{j'j''} = -\delta^i_{j''j'}$ отсюда следует равенство $\gamma^i_{j''} p_{j'} - \gamma^i_{j'} p_{j''} = \lambda_i \delta^i_{j'j''}$. Следовательно, множество $\Xi(\mathcal{B})$ содержится в множестве решений системы уравнений и неравенств

$$\gamma^i_k p_j - \gamma^i_j p_k = \lambda_i \delta^i_{jk}, \qquad (i,j),(i,k) \in \mathcal{B}, \tag{33}$$

$$\gamma^i_l p_j - \gamma^i_j p_l \leqslant \lambda_i \delta^i_{jl}, \qquad (i,j) \in \mathcal{B}, (i,l) \notin \mathcal{B}. \tag{34}$$

6. Задача полиэдральной комплементарности

Отметим, что из проведённого анализа зон предпочтительности следует, что при отыскании равновесной структуры закупок участников можно ограничиться рассмотрением пар (i,j) из множества

$$\Gamma_+ = \bigl\{(i,j) \in I \times J \mid \gamma^i_j > 0\bigr\}. \tag{35}$$

Таким образом, следует рассматривать $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$ и в соответствии с этим изменить описание системы (33), (34), в множестве решений которой содержится зона предпочтительности $\Xi(\mathcal{B})$. Множество решений таким образом скорректированной системы будем обозначать через $\widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B})$. Подчеркнём, что в задании множества $\widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B})$ уже не требуется $p \in \sigma$, как это было для множества $\Xi(\mathcal{B})$. Поэтому $\Xi(\mathcal{B}) \subset \widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B})$, но не исключено, что $\Xi(\mathcal{B}) = \varnothing$, в то время как $\widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B}) \neq \varnothing$.

В результате каждой структуре $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, отвечают два многогранных множества: $\Omega(\mathcal{B})$ и $\widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B})$. При этом любая их грань также принадлежит рассматриваемой совокупности множеств, т. е. порождается некоторой структурой $\mathcal{B}' \subset \Gamma_+$, $\mathcal{B}' \in \mathfrak{B}$. Тем самым возникают два полиэдральных комплекса, которые обозначим через ω и ξ соответственно. Легко видеть, что из $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ следует $\Omega(\mathcal{B}_1) \subset \Omega(\mathcal{B}_2)$ и $\widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B}_1) \supset \widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B}_2)$. Поэтому о комплексах ω и ξ естественно говорить как о *двойственных* друг другу. Задача отыскания пары отвечающих друг другу множеств $\Omega(\mathcal{B})$ и $\widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B})$ с непустым пересечением, является *задачей полиэдральной комплементарности* [6].

Теорема 4. *Если $r \in \Omega(\mathcal{B}) \cap \widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B})$, то $\mathcal{B}$ — равновесная структура, а r— равновесный вектор цен модели.*

Доказательство. Для любого $p \in \Omega(\mathcal{B})$ имеем $p \in \sigma$. Следовательно, $r \in \sigma$. Пусть $\widehat{z}_{ij} = z^{\mathcal{B}}_{ij}(r)$ — величины, подтверждающие $r \in \Omega(\mathcal{B})$ в соответствии с (23). Эти величины должны удовлетворять равенствам (16), (18) при $z_{ij} = \widehat{z}_{ij}$ и $p_j = r_j$. Следовательно, при каждом i существуют ненулевые $\widehat{z}_{ij}$ и из $\widehat{z}_{ij} > 0$ следует $r_j > 0$. Получим по $\widehat{z}_{ij}$ и r_j величины $\widehat{x}^i_j$ в соответствии с правилом

$$\widehat{x}^i_j = \begin{cases} \widehat{z}_{ij}/r_j & \text{при } r_j > 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда из (16) следует, что все $\widehat{x}^i$ ненулевые и удовлетворяют соответствующим бюджетным ограничениям. При $\widehat{x}^i_j > 0$ имеем $(i,j) \in \mathcal{B}$, $r_j > 0$ и из того, что $r \in \widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B})$, следует $r \in \Xi^+_{ij}$. Это означает, что при $p = r$ задача участника i разрешима и $\widehat{x}^i$ — её оптимальное решение. Из (18) при $r_j > 0$ получим $\sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{x}^i_j = 1$. Если $r_j = 0$, то $\widehat{x}^i_j = 0$ при всех i и $\sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{x}^i_j = 0 < 1$.

Таким образом, условие (5), являющееся определяющим для слабого равновесия, при закупках $\widehat{x}^i$ выполняется. Напомним, что условие (6) является следствием оптимальности векторов $\{\widehat{x}^i\}$ и свойства ненасы-

щаемости функций f_i (см. замечание 3). Поэтому набор векторов $\{\widehat{x}^i\}$ подтверждает равновесность вектора цен r и структуры $\mathcal{B}$. Теорема 4 доказана.

Замечание 4. Если $r_{j_\circ} = 0$, но в $\mathcal{B}$ имеются элементы вида $(i, j_\circ)$, то, как несложно показать, это означает, что значение соответствующей функции $f_i(\widehat{x}^i)$ не меняется с изменением $\widehat{x}^i_{j_\circ}$. Этим можно воспользоваться для получения равенства в условии баланса по товару $j_\circ$: $\sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{x}^i_{j_\circ} = 1$. Если отмеченное обстоятельство имеет место для всех нулевых компонент r_j, то таким образом можно превратить полученное существенно слабое равновесие в строгое равновесие.

Полученное сведение проблемы равновесия для рассматриваемой модели к задаче полиэдральной комплементарности позволяет воспользоваться предложенным в [6] методом решения таких задач. Детальному описанию и обоснованию получающегося в результате алгоритма отыскания равновесного вектора цен посвящена вторая статья этого цикла.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 418 с.
2. **Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.** Задачи транспортного типа. — М.: Наука, 1969. — 382 с.
3. **Шмырев В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 5. — С. 1062–1066.
4. **Шмырев В. И.** Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация. Сб. науч. тр. Вып. 31(48). — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. — С. 137–155.
5. **Шмырев В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 2. — С. 163–175.
6. **Шмырев В. И.** Задача полиэдральной комплементарности // Оптимизация. Сб. науч. тр. Вып. 44 (61). — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. — С. 82–95.
7. **Шмырев В. И.** Введение в математическое программирование. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 192 с.
8. **Шмырёв В. И.** Нахождение равновесия в одном классе моделей производства — обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 65–91.
9. **Шмырёв В. И.** Обобщённая линейная модель обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 74–102.

10. **Шмырев В. И.** Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Сиб. журн. индустр. математики. — 2008. — Т. XI, № 2(34). — С. 139–154.
11. **Debreu G.** Existence of competitive equilibrium // Handbook of Mathematical Economics. Vol. II. — Amsterdam: Noth — Holland Publ. Company, 1982. — P. 697–749.
12. **Eaves B. C.** A finite algorithm for the linear exchange model // J. Math. Econ. — 1976. — Vol. 3, N 2. — P. 197–204.
13. **Gale D.** The linear exchange model // J. Math. Econ. — 1976. — Vol. 3, N 2. — P. 205–209.
14. **Lemke C. E.** Bimatrix equilibrium points and math. programming // Manage. Sci. — 1965. — Vol. 2, N 7. P. 681–689.
15. **Lemke C. E.** A survey of complementarity theory // Variational inequalities and complementarity problems. — New York: John Wiley and Sons, Ltd, 1980. — P. 213–239.
16. **Murty K. G.** Linear complementarity, linear and nonlinear programming. — Berlin: Hedermann, 1988. — 629 p.
17. **Shmyrev V. I.** An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models // Russian contributions to game theory and eqilibrium theory. — Berlin: Springer-Verl., 2006. — P. 217–235.
18. **Shmyrev V. I.** A generalized linear exchange model // J. Appl. Ind. Math. — 2008. — Vol. 2, N 1. — P. 125–142.

Шмырёв Вадим Иванович,
e-mail: shmyrev@math.nsc.ru

Статья поступила
7 апреля 2009 г.

Переработанный вариант —
21 декабря 2009 г.