ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2010. Том 17, № 2. С. 3–19

УДК 621.391.15

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ГРАФОВ ДЖОНСОНА $J(8,3)$ И $J(8,4)$ В ДВА ЦВЕТА [*)]

С. В. Августинович, И. Ю. Могильных

Аннотация. В статье перечисляются матрицы параметров всех совершенных 2-раскрасок графов Джонсона $J(8,3)$ и $J(8,4)$, приводится несколько конструкций совершенных 2-раскрасок графов Джонсона $J(2w,w)$, $J(2m,3)$. Понятие совершенной раскраски является обобщением понятия полностью регулярного кода, введённого Дельсартом. Проблема существования подобных структур в графах Джонсона тесно связана с проблемой существования полностью регулярных кодов в графах Джонсона и, в частности, с гипотезой Дельсарта о несуществовании нетривиальных совершенных кодов в графах Джонсона, с проблемой существования блок-схем и другими известными проблемами.

Ключевые слова: совершенная раскраска, схема Джонсона, блок-схема.

Введение

Приведём необходимые определения и понятия. Обозначим через E^n совокупность двоичных векторов длины n. *Весом* вектора x из E^n называется количество ненулевых координат вектора x. Множество вершин *графа Джонсона* $J(n,w)$ определяется как совокупность всех векторов из E^n веса w, множество рёбер этого графа состоит из пар векторов, различающихся ровно в двух координатах. Нетрудно убедиться в том, что граф Джонсона $J(n,w)$ — регулярный граф степени $w(n-w)$ и диаметра w. Число рёбер графа Джонсона в кратчайшем пути, соединяющем пару вершин этого графа, называется *расстоянием Джонсона*. Отметим, что граф Джонсона $J(n,n-w)$ изоморфен графу $J(n,w)$, поэтому мы без ограничения общности рассматриваем графы Джонсона $J(n,w)$, где $2w$ не превосходит n.

[*)] Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429) обоих авторов и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00244) второго автора.

Набор k-элементных подмножеств n-элементного множества (именуемых блоками) такой, что всякое t-элементное подмножество встречается в λ блоках, называется $t-(n,k,\lambda)$-*схемой*. Если все блоки $t-(n,k,\lambda)$-схемы различны, то схему можно интерпретировать как код (совокупность вершин) в графе Джонсона $J(n,k)$, связав с каждым её блоком вектор из E^n веса k с единицами в тех и только тех координатах, номера которых принадлежат этому блоку.

Под *совершенной раскраской в* m *цветов* (*совершенной* m*-раскраской*) *графа* G *с матрицей* $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,m}$ понимается раскраска множества вершин графа G в множество цветов $\{1,\dots,m\}$ такая, что число вершин цвета j, смежных с фиксированной вершиной цвета i, не зависит от выбора последней вершины и равно a_{ij}. Матрица A называется *матрицей параметров совершенной раскраски.* В случае $m=2$ цвет номер 1 будем называть белым, а цвет номер 2 — чёрным; совокупность всех вершин белого цвета графа G будем обозначать через W, чёрного — через B. Все совершенные 2-раскраски в данной статье будем рассматривать с точностью до переименования цветов, т. е. совершенную 2-раскраску с матрицей $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$, полученную перекрашиванием вершин белого цвета в чёрный и чёрного в белый, будем считать совпадающей с исходной раскраской.

В настоящей статье исследуются совершенные 2-раскраски графов Джонсона. Эти объекты включают такие важные комбинаторные структуры, как системы троек и четвёрок Штейнера, полностью регулярные (в том числе и 1-совершенные) равновесные коды, а множество вершин фиксированного цвета такой раскраски образует блок-схему. В статье перечисляются параметры всех совершенных 2-раскрасок графов $J(8,3)$ и $J(8,4)$. Матрицы параметров совершенных 2-раскрасок графов $J(n,2)$, $J(6,3)$, $J(7,3)$ описаны в [1, 17]. Поэтому $J(8,3)$ и $J(8,4)$ являлись графами с наименьшими параметрами, для которых данный вопрос был открыт. Также в статье приводится несколько конструкций бесконечных серий совершенных 2-раскрасок графов Джонсона.

Тематически близки к данной статье работы Мейеровица [15] и Мартина [13, 14]. В [15] конструктивно описаны все полностью регулярные схемы силы 0. Мартин в [13] привёл конструктивное описание полностью регулярных схем силы 1 с минимальным расстоянием 2 между блоками. В [14] получены некоторые необходимые условия существования полностью регулярных блок-схем и описаны все полностью регулярные симметричные блок-схемы и все полностью регулярные системы Штейнера силы 2.

Д. Г. Фон-дер-Флаасс занимался описанием совершенных 2-раскрасок n-мерного куба. В [9] получена граница корреляционной иммунности булевых функций, на её основе установлено необходимое условие существования совершенной 2-раскраски n-мерного куба E^n с заданной матрицей параметров. В [4] исследованы совершенные 2-раскраски E^{12}, достигающие упомянутой выше границы корреляционной иммунности: построены эти раскраски и перечислены все их матрицы параметров. Некоторые конструкции совершенных раскрасок E^n и необходимые условия их существования получены в [5].

1. Необходимые условия существования совершенных раскрасок графов Джонсона в два цвета

В этом разделе приведём некоторые результаты, касающиеся необходимых условий существования совершенных 2-раскрасок графа Джонсона с заданной матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Приводимые ниже утверждения будут использованы при перечислении параметров совершенных 2-раскрасок графов $J(8,3)$, $J(8,4)$. Наиболее простым таким условием будет выполнение равенств $a_{11}+a_{12} = a_{21}+a_{22} = w(n-w)$, являющихся следствием регулярности графа Джонсона. Приведём формулу для вычисления количества белых вершин совершенной 2-раскраски.

Утверждение 1 [17]. *Пусть W — множество белых вершин совершенной 2-раскраски графа G с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Тогда*

$$|W| = |V(G)|a_{21}/(a_{12}+a_{21}). \tag{1}$$

Если равенство (1) неверно, например, стоящее справа выражение не является целым числом, то совершенной 2-раскраски графа G с заданной матрицей A не существует.

Некоторые необходимые условия существования совершенных 2-раскрасок графа могут быть сформулированы в терминах его собственных значений. Напомним, что число θ называется *собственным значением графа* G, если θ является собственным значением матрицы смежности этого графа. Дельсарт [7], исследуя схемы отношений, установил, что собственные значения графа Джонсона $J(n,w)$ исчерпываются числами $(w-k)(n-w-k)-k,\ 0 \leqslant k \leqslant w$. Собственные значения графа Джонсона $J(n,w)$ полагаем занумерованными в порядке убывания, число $(w-k)(n-w-k)-k$ далее будем называть *k-м собственным значением графа* $J(n,w)$. Число θ называется *собственным значением совершенной раскраски в m цветов*, если θ является собственным значением матрицы параметров $A_{m\times m}$ этой совершенной раскраски. Нетрудно видеть, что

всякая совершенная раскраска регулярного графа G в два цвета с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ имеет два собственных значения — одно, равное степени графа $w(n-w)$, и второе, равное $a_{11} - a_{21}$, которое далее будем называть *младшим собственным значением совершенной 2-раскраски с матрицей параметров* A. Известно (см. например, [3, 10]), что всякое собственное значение совершенной раскраски графа G является собственным значением графа G. Следующее утверждение является следствием вышеописанных результатов для совершенных раскрасок графов Джонсона в два цвета. Его также можно рассматривать как необходимое условие на параметры совершенной 2-раскраски $J(n, w)$.

Утверждение 2 [17]. *Пусть существует совершенная 2-раскраска графа $J(n, w)$ с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Тогда $a_{11} - a_{21}$ является собственным значением этой совершенной раскраски и равно $(w-k)(n-w-k)-k$ для некоторого $k, 1 \leqslant k \leqslant w$.*

Дальнейшим развитием этого подхода можно считать необходимые условия существования совершенной 2-раскраски графа Джонсона, установленные в [16] на основе k-регулярности. Это свойство является обобщением свойства k-регулярности совершенных равновесных кодов, установленного Этционом и Шварцем [8]. Доказательство этого свойства может быть проведено с использованием описания собственных пространств графов Джонсона [7].

Теорема 1 [1]. *Пусть W — множество белых вершин совершенной 2-раскраски графа $J(n, w)$ с такой матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, что младшее собственное значение $a_{11} - a_{21}$ является k-м собственным значением графа $J(n, w)$. Тогда W —*

$$(k-1) - \left(n, w, \frac{a_{21}}{a_{12} + a_{21}} C_{n-k+1}^{w-k+1}\right)\text{-схема.}$$

Свойство k-регулярности даёт следующие необходимые условия существования совершенной 2-раскраски графа $J(n, w)$ с заданной матрицей параметров.

Следствие 1. *Пусть для графа $J(n, w)$ существует совершенная 2-раскраска с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, младшее собственное значение $a_{11} - a_{21}$ которой является k-м собственным значением графа $J(n, w)$. Тогда число $\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}} \cdot C_{n-i}^{w-i+j}$ является целым для любых i и j таких, что $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant k-1$.*

Некоторые дополнительные необходимые условия существования совершенных 2-раскрасок установлены в [2, 17]. В [17] показано, что, зная количество белых вершин совершенной 2-раскраски произвольного графа, принадлежащих некоторому полностью регулярному коду C, можно выразить количество белых вершин на любом расстоянии от данного кода через массив пересечений кода C и параметры рассматриваемой совершенной 2-раскраски. Это свойство аналогично свойству дистанционной инвариантности 1-совершенных кодов в E^n, установленному Шапиро и Злотником в [19]. В [2] с использованием того факта, что подграф, индуцированный сферой радиуса 1 в графе Джонсона, изоморфен декартовому произведению двух полных графов, показано, что параметр a_{21} совершенной 2-раскраски графа Джонсона оценивается снизу функцией от n, w, a_{12}.

2. Случай экстремальных собственных значений

Итак, числа $a_{11} - a_{21}$ и $w(n-w)$ являются собственными значениями совершенной 2-раскраски графа Джонсона с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Отметим, что младшее собственное значение $a_{11} - a_{21}$ не равно $w(n-w)$, так как в противном случае a_{21} равнялось бы нулю и белые и чёрные вершины графа Джонсона были бы не смежны, чего не может быть в силу связности этого графа. Можно особо выделить совершенные 2-раскраски графа Джонсона $J(n,w)$, младшие собственные значения которых максимально или минимально возможны (т. е. равны $(w-1)(n-w-1)-1$ или $(-w)$ соответственно). В настоящее время все совершенные 2-раскраски с максимально возможными младшими собственными значениями перечислены: оказалось, что для каждого графа $J(n,w)$ существует ровно одна такая совершенная раскраска. Вопрос существования совершенных 2-раскрасок $J(n,w)$ с младшим собственным значением, равным $-w$, оказался равносилен вопросу существования простых $(w-1)-(n,w,\lambda)$-схем. Напомним, что схема называется *простой*, если все её блоки различны. Проблема существования таких схем при $w = 3$ была полностью решена Дегоном.

Теорема 2 [6]. *Необходимым и достаточным условием существования простой $2-(n,3,\lambda)$-схемы является выполнение следующих условий*:

$$\lambda(n-1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \quad \lambda n(n-1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 6).$$

При $w = 4$ вопрос существования таких схем остаётся открытым в общем случае. Этот вопрос решён при $\lambda = 1, 2, 3$ в [11, 12, 18]:

Теорема 3. *Для существования простой* $3-(n,4,\lambda)$*-схемы при* $\lambda = 1,2,3$ *необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

$$\lambda n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\ \lambda(n-1)(n-2) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3),\ \lambda n(n-1)(n-2) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8).$$

В силу вышесказанного задача существования совершенных 2-раскрасок графов $J(8,3)$ и $J(8,4)$ с собственными значениями -3 и -4 соответственно является также решённой.

Приведём более подробное описание упомянутых в начале раздела результатов. Рассмотрим следующую совершенную раскраску произвольного графа Джонсона $J(n,w)$.

Конструкция 1. Пусть $j \in \{1,\dots,n\}$. Покрасим в белый цвет все векторы веса w длины n, у которых j-я координата равна 1, а в чёрный цвет — все векторы, у которых j-я координата равна 0.

Эта раскраска будет совершенной 2-раскраской (см. [1, 13]) вершин графа Джонсона $J(n,w)$ с матрицей параметров

$$\begin{pmatrix} w(n-w-1) & w \\ n-w & (n-w)(w-1) \end{pmatrix}.$$

Младшее собственное значение рассмотренной совершенной 2-раскраски равно $(w-1)(n-w-1)-1$, т. е. является первым собственным значением графа $J(n,w)$. Мейеровиц [15] конструктивно описал все полностью регулярные схемы силы 0. В терминологии этой статьи полностью регулярные схемы силы 0 с покрывающим радиусом 1 являются совершенными 2-раскрасками графа $J(n,w)$ с младшим собственным значением, равным $(w-1)(n-w-1)-1$, и наоборот. В рамках рассматриваемой в этой статье терминологии имеет место следующая

Теорема 4 [15]. *Совершенных 2-раскрасок* $J(n,w)$ *с младшим собственным значением, являющимся первым собственным значением графа* $J(n,w)$*, кроме совершенной раскраски, построенной с помощью конструкции 1, не существует.*

Теперь рассмотрим случай наименьших собственных значений. Пусть дана совершенная 2-раскраска графа Джонсона $J(n,w)$ с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ такой, что $a_{11} - a_{21}$ является w-м собственным значением $J(n,w)$. Согласно теореме 1 множество белых вершин всякой такой раскраски является $(w-1)-\big(n,w,\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}}(n-w+1)\big)$-схемой. С другой стороны, имея $(w-1)-(n,w,\lambda)$-схему, можно получить совершенную

2-раскраску $J(n,w)$ (см. [1, 13]), с матрицей

$$\begin{pmatrix} (\lambda-1)w & w(n-w-\lambda+1) \\ \lambda & w(n-w-\lambda) \end{pmatrix},$$

покрасив все векторы из схемы в белый цвет, а векторы, не принадлежащие схеме, — в чёрный. Из вышесказанного следует

Утверждение 3. *Совершенная 2-раскраска $J(n,w)$ с матрицей параметров $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$, с собственным значением, равным $-w$, существует тогда и только тогда, когда существует*

$$(w-1)-(n,w,a_{21}/(a_{12}+a_{21})\cdot(n-w+1))\text{-схема}.$$

3. Орбитная конструкция

Все существующие на сегодняшний день примеры совершенных раскрасок (как в два цвета, так и в большее число цветов) графа Джонсона были получены объединением некоторых орбит в разбиении множества вершин графа Джонсона на орбиты некоторой подгруппы группы автоморфизмов данного графа (так называемая «орбитная конструкция»). Приведём основные определения, относящиеся к этому методу. Пусть G — граф. *Автоморфизмом графа G* называется подстановка на множестве вершин графа G, сохраняющая отношение инцидентности между вершинами. Совокупность таких преобразований относительно операции суперпозиции образует группу, обозначаемую через $\mathrm{Aut}(G)$. Такая группа всегда является подгруппой группы S_n, где n — число вершин графа G.

Пусть H является некоторой подгруппой группы автоморфизмов графа G. *Орбитой группы H* называется максимальное по включению подмножество S множества вершин графа G такое, что для любых двух вершин u и v множества S существует элемент h группы H такой, что $h(u) = v$. Действие группы H разбивает множество вершин графа G на непересекающиеся орбиты. Поставив орбитам в соответствие различные цвета, получим *орбитную раскраску* вершин графа G, соответствующую подгруппе H группы автоморфизмов графа G. Имеет место следующая

Теорема 5 [3]. *Всякая орбитная раскраска графа G является совершенной раскраской.*

Рассмотрим орбитную конструкцию для графа Джонсона. Очевидно, что S_n, группа подстановок на n координатах, является подгруппой группы автоморфизмов графа Джонсона $J(n,w)$. Обратное в общем случае

не является верным, хотя часто эти группы совпадают. Пусть H является группой автоморфизмов некоторого графа G' на n вершинах. В этом случае разбиение вершин $J(n,w)$ на орбиты группы H удобнее представлять с использованием графа G', чем работать с графом Джонсона напрямую. Занумеруем вершины графа G' натуральными числами от 1 до n. Тогда всякому вектору x веса w длины n будут соответствовать некоторые w вершин графа G' с номерами, равными единичным координатам вектора x. Возьмём пару вершин $J(n,w)$. Очевидно, что эта пара вершин принадлежит одной орбите графа $J(n,w)$ группы H, если и только если соответствующие им совокупности из w вершин графа G' можно перевести друг в друга некоторым автоморфизмом графа G'. Таким образом, рассматривая граф G', можно найти количество и вид всех орбит вершин графа $J(n,w)$ группы H, а также параметры орбитной раскраски, получаемой из этого разбиения на орбиты, не рассматривая при этом непосредственно соответствующие вершины $J(n,w)$.

Для иллюстрации с помощью орбитного метода построим совершенную 2-раскраску конструкции 1. В качестве G' рассмотрим граф, состоящий из двух компонент связности — одной вершины K_1 и полного графа на $n-1$ вершинах K_{n-1}. При этом считаем, что вершинам G' поставлены во взаимно однозначное соответствие координаты E^n. Группа автоморфизмов H графа G' является стабилизатором вершины K_1. Очевидно, что действие группы H на всевозможных w-элементных подмножествах множества вершин G разбивает эти подмножества на две группы — содержащие вершину графа K_1 и не содержащие её. Иными словами, действие H разбивает вершины графа $J(n,w)$ на две орбиты, которые характеризуются значением некоторой фиксированной координаты, которая соответствует вершине графа K_1. Эти множества суть в точности множества белых и чёрных вершин W и B совершенной раскраски конструкции 1.

Отметим, что в общем случае число цветов в орбитной раскраске будет достаточно большим. В отдельных случаях число цветов в этой раскраске можно уменьшить:

Лемма 1 (об объединении цветов). *Пусть существует совершенная раскраска в m цветов с матрицей параметров $A_{m\times m}$ и найдутся числа k и l такие, что $a_{ki} = a_{li}$ для любого цвета $i \neq k,l$. Тогда, объединив вершины цветов k и l и покрасив их в один цвет, а цвета остальных вершин не изменяя, получим совершенную раскраску в $m-1$ цветов.*

Пример использования этой леммы будет рассмотрен в следующем разделе. Отметим, что эту лемму можно обобщить, объединяя более двух

цветов (см. конструкцию 6).

4. Совершенные 2-раскраски графа $J(8,3)$

В этом разделе перечисляются матрицы параметров совершенных 2-раскрасок графов $J(8,3)$. Сначала с помощью орбитной конструкции построим некоторые совершенные 2-раскраски этого графа. Затем покажем, что матрицами параметров этих совершенных раскрасок исчерпываются параметры всех совершенных 2-раскрасок графа $J(8,3)$. Следующий раздел устроен аналогичным образом.

Теорема 6. *Матрицы параметров совершенных 2-раскрасок графа $J(8,3)$ исчерпываются следующим списком:*

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Конструкция 2. Построим совершенную 2-раскраску графа $J(8,3)$ с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$. Пусть G — граф, являющийся объединением двух 4-циклов C'_4 и C''_4. Занумеруем его вершины некоторым образом числами от 1 до 8. Построим разбиение вершин графа $J(8,4)$ на орбиты группы автоморфизмов графа G. Рассмотрим произвольные трёхэлементные подмножества множества вершин графа G. Согласно действию $\mathrm{Aut}(G)$ на множестве вершин G их можно разбить на следующие группы, внутри которых $\mathrm{Aut}(G)$ действует транзитивно:

1) одна вершина принадлежит одному циклу, две вершины принадлежат другому циклу, причём последние вершины не смежны в графе G (в этом случае тройка вершин образует независимое множество в G);

2) одна вершина принадлежит одному циклу, две вершины принадлежат другому циклу, причём последние вершины смежны в графе G (в этом случае пара вершин из тройки является смежной в графе G);

3) все три вершины G принадлежат одному циклу (в этом случае тройка вершин образует 3-цикл в G).

Всякой тройке вершин G поставим во взаимно однозначное соответствие вектор веса 3 из E^8 (вершину графа $J(8,3)$), номера единичных координат которого совпадают с номерами трёх вершин из этого множества. Тогда действие $\mathrm{Aut}(G)$ разбивает вершины графа $J(8,3)$ (которые понимаются как тройки вершин графа G) на три орбиты (которым соответствуют три группы троек вершин G). Далее считаем, что номер орбиты совпадает с номером соответствующей ей группы троек вершин

графа G. Согласно теореме 5 орбитная раскраска (полученная раскраской различных орбит в различные цвета) является совершенной. Рассматривая тройки вершин графа G, найдём первый столбец матрицы параметров $B_{3\times 3}$ этой совершенной раскраски.

Рассмотрим тройку вершин u, v, w графа G, принадлежащих i-й группе. Очевидно, что параметр b_{i1} равен числу способов получить из тройки u, v, w, принадлежащей i-й группе, заменой одной из вершин тройку вершин из первой группы. Введём одно дополнительное обозначение. Для каждой вершины u одного из циклов C_4' или C_4'' назовём вершиной, *антиподальной* u, единственную вершину того же цикла, не смежную с вершиной u. Отметим, что всякая тройка вершин первой группы состоит из пары антиподальных вершин и некоторой вершины другого цикла.

Пусть тройка вершин u, v, w принадлежит первой группе: u является вершиной C_4', а вершины v, w являются вершинами C_4'' и антиподальны. Найдём количество троек, принадлежащих первой группе, которые могут быть получены из тройки u, v, w заменой одной из вершин. Вершину u цикла C_4' можно заменить (тремя способами) только любой из трёх оставшихся вершин C_4'. При этом вершины v и w останутся антиподальными, поэтому тройки, получившиеся заменой, принадлежат первой группе. Каждую из вершин v и w можно заменить (одним способом) только вершиной, антиподальной u. Таким образом, из всякой тройки вершин первой группы заменой одной вершины можно получить пять вершин из первой группы. Следовательно, всякая вершина из первой орбиты смежна ровно с пятью вершинами из первой орбиты.

Рассмотрим тройку вершин u, v, w, принадлежащих второй группе. Без ограничения общности считаем, что u является вершиной C_4', а вершины v, w являются вершинами C_4'' и смежны. Так как все вершины тройки, принадлежащей первой группе, не смежны, то заменой вершины u получить тройку первой группы невозможно. Вершину $v(w)$ можно заменить только вершиной, антиподальной $w(v)$, или вершиной, антиподальной u. Следовательно, всякая вершина из второй орбиты смежна ровно с четырьмя вершинами из первой орбиты.

Рассмотрим тройку вершин u, v, w, принадлежащих третьей группе. Без ограничения общности будем считать, что в этом случае все вершины принадлежат циклу C_4' и вершина v смежна с вершинами u и w. Очевидно, заменой вершин v и w невозможно получить тройки попарно не смежных вершин. Вершину u можно заменить любой вершиной C_4'' четырьмя способами. Следовательно, всякая вершина из третьей орбиты смежна ровно с четырьмя вершинами из первой орбиты.

Итак, матрица параметров $B_{3\times 3}$ орбитной раскраски вершин $J(8,3)$, соответствующей $\mathrm{Aut}(G)$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5 & * & * \\ 4 & * & * \\ 4 & * & * \end{pmatrix}.$$

Значения параметров совершенной раскраски, записанных во втором и третьем столбцах, нам не требуются, поэтому мы их не выписываем и обозначаем звёздочками. Отметим, что эти неизвестные элементы матрицы B связаны следующими отношениями:

$$b_{22}+b_{23}=b_{32}+b_{33}=11, \quad b_{12}+b_{13}=10, \tag{2}$$

являющимися следствием того, что сумма элементов любой строки матрицы B равна 15. Согласно равенствам (2) всякая вершина первого цвета смежна с 10 вершинами второго и третьего цветов, а всякая вершина второго или третьего цветов смежна с 11 вершинами второго или третьего цвета. Отсюда, принимая во внимание лемму 1, объединением второго и третьего цветов из рассмотренной орбитной раскраски получим совершенную 2-раскраску с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$.

Покажем, что существуют совершенные 2-раскраски графа $J(2m,3)$ с матрицами параметров

$$\begin{pmatrix} 3(2m-5) & 6 \\ 4(m-2) & 2m-1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 3(m-3) & 3m \\ m-2 & 5m-7 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3(m-1) & 3(m-2) \\ (m+4) & 5m-13 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что совершенные 2-раскраски $J(2m,3)$ с первыми двумя матрицами параметров описали Годсил и Прэгер.

Конструкция 3. Рассмотрим полный двудольный граф, каждая доля которого имеет m вершин. Удалим в этом графе совершенное паросочетание. Полученный граф обозначим через G. Занумеруем вершины графа G некоторым образом числами от 1 до $2m$. Построим разбиение вершин графа $J(2m,3)$ на орбиты группы автоморфизмов графа G. Для этого рассмотрим все трёхвершинные подмножества множества вершин графа G. Эти множества разбиваются на следующие группы, внутри которых $\mathrm{Aut}(G)$ действует транзитивно:

1) все три вершины принадлежат одной доле графа G;

2) две вершины принадлежат одной доле графа G, а третья — другой, причём последняя смежна с обеими вершинами из первой доли;

3) две вершины принадлежат одной доле графа G, а третья — другой, причём последняя смежна лишь с одной вершиной из двух вершин первой доли.

Тем самым действие $\mathrm{Aut}(G)$ разбивает вершины $J(2m,3)$ на три орбиты. Рассматривая граф G, нетрудно видеть, что матрица параметров $B_{3\times 3}$ орбитной раскраски вершин $J(2m,3)$, соответствующей $\mathrm{Aut}(G)$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3(m-3) & 3(m-2) & 6 \\ m-2 & 5(m-3)+2 & 6 \\ m-2 & 3(m-2) & 2m-1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица порядка 3 обладает следующим интересным свойством: в каждом столбце два внедиагональных элемента равны, что позволяет с помощью леммы 1 объединять соответствующие цвета. Например, покрасим белым цветом вершины первого или второго цвета, а третьего — чёрным цветом. Тогда любая вершина белого цвета видит одинаковое количество вершин белого цвета в силу указанного свойства матриц, и матрица параметров полученной совершенной раскраски в два цвета примет вид $\begin{pmatrix} 3(2m-5) & 6 \\ 4(m-2) & 2m-1 \end{pmatrix}$. Объединяя второй и третий цвета, первый и третий цвета, получим совершенные раскраски с матрицами параметров

$$\begin{pmatrix} 3(m-3) & 3m \\ m-2 & 5m-7 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3(m-1) & 3(m-2) \\ (m+4) & 5m-13 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 6.

Рассмотрим совершенную раскраску графа $J(8,3)$ с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Согласно утверждению 2 младшее собственное значение $a_{11} - a_{21}$ совершенной 2-раскраски является собственным значением графа $J(n,w)$, т. е. равно $(5-k)(3-k)-k$ для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant 3$. Рассмотрим случаи $k = 1,2,3$.

Пусть $k = 1$. По теореме 4 кроме совершенной 2-раскраски с матрицей $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, построенной с помощью конструкции 1, не существует совершенных 2-раскрасок $J(8,3)$ с младшим собственным значением, являющимся первым собственным значением графа $J(n,w)$.

Пусть $k = 2$. В этом случае число 1 является младшим собственным значением совершенной раскраски с матрицей A. По следствию 1 число $\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}} C_{n-k+1}^{w-k+1}$, равное $\frac{a_{11}-1}{14} C_7^2$, является целым. Отсюда с точностью до переименования цветов имеем следующие варианты для a_{11}: $3, 5, 7$.

Условия $a_{11}-a_{21}=1$, $a_{11}+a_{12}=a_{11}+a_{12}=15$ позволяют однозначно в каждом из этих случае найти неизвестные параметры a_{12} и a_{22}. Матрицы соответствующих параметров равны

$$\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Первая и третья из этих матриц являются матрицами параметров совершенных 2-раскрасок, полученных с помощью конструкции 3, вторая матрица совпадает с матрицей совершенной раскраски, полученной с помощью конструкции 2.

Пусть $k=3$. Ввиду утверждения 3 существование совершенных 2-раскрасок графа $J(8,3)$ с младшим собственным значением, равным -3, эквивалентно существованию $2-(8,3,\lambda)$-схем. В силу несуществования таких схем (см. теорему 2) совершенных 2-раскрасок $J(8,3)$ с третьим собственным значением не существует. Теорема 6 доказана.

5. Совершенные 2-раскраски графа $J(8,4)$

Основным результатом этого раздела является

Теорема 7. *Матрицы параметров совершенных 2-раскрасок графа $J(8,4)$ исчерпываются следующим списком:*

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вначале опишем конструкции совершенных 2-раскрасок $J(8,4)$. Следующие две конструкции получены объединением цветов орбитной раскраски, соответствующей стабилизатору нескольких координат на множестве вершин графа Джонсона.

Конструкция 4 (см. [1]). Пусть i,j — произвольные элементы множества $\{1,\ldots,2w\}$. Всякий вектор веса w длины $2w$, у которого значения координат i,j равны, покрасим в белый цвет, все прочие вершины покрасим в чёрный цвет. Получим совершенную 2-раскраску $J(2w,w)$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} w(w-2) & 2w \\ 2(w-1) & (w-1)^2+1 \end{pmatrix}.$$

Конструкция 5. Пусть i,j,k — произвольные элементы множества $\{1,\ldots,2w\}$. Всякий вектор веса w длины $2w$, у которого значения координат i,j,k равны, покрасим в белый цвет, все прочие векторы покрасим

в чёрный. Нетрудно видеть, что данная раскраска является совершенной с матрицей

$$\begin{pmatrix} w(w-1)+2 & w-2 \\ 3w & w(w-3) \end{pmatrix}.$$

Конструкция 6. Покажем, что существует совершенная раскраска графа $J(8,4)$ с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. Рассмотрим граф, являющийся объединением клик K_1, K_2, K_5 на восьми вершинах — координатах. Группа автоморфизмов этого графа естественным образом индуцирует разбиение вершин графа $J(8,4)$ на орбиты, которое можно представить таблицей

	K_1	K_2	K_5
1	1	0	3
2	0	2	2
3	0	0	4
4	0	1	3
5	1	1	2
6	1	2	1

Здесь принадлежность вектора веса 4 длины 8 i-й орбите однозначно характеризуется распределением вершин с номерами его единичных координат по графам K_1, K_2, K_5. Орбитная раскраска вершин графа Джонсона, соответствующая данному разбиению на орбиты, является совершенной раскраской в шесть цветов с матрицей параметров

	1	2	3	4	5	6
1	$*$	$*$	2	2	6	0
2	$*$	$*$	0	6	2	2
3	4	0	$*$	$*$	$*$	$*$
4	1	3	$*$	$*$	$*$	$*$
5	3	1	$*$	$*$	$*$	$*$
6	0	4	$*$	$*$	$*$	$*$

Чтобы получить искомую совершенную раскраску в два цвета, используем идею, аналогичную сформулированной в лемме 1. Покрасим вершины цветов с номерами 1 и 2 в белый цвет, а вершины цветов с номерами 3, 4, 5 и 6 — в чёрный цвет. Из вида матрицы параметров рассмотренной орбитной раскраски следует, что всякая вершина белого цвета смежна с шестью вершинами белого цвета, а всякая вершина чёрного цвета — с четырьмя вершинами белого, т. е. полученная раскраска будет совершенной с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 7.

Рассмотрим произвольную совершенную раскраску графа $J(8,4)$ с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. По утверждению 2 младшее собственное значение $a_{11} - a_{21}$ этой совершенной раскраски равно $(4-k)(4-k)-k$ для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant 4$. Рассмотрим случаи $k = 1, 2, 3, 4$.

Пусть $k = 1$. Согласно теореме 4 кроме совершенной 2-раскраски с матрицей $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, построенной с помощью конструкции 1, не существует совершенных раскрасок $J(8,4)$ с младшим собственным значением, являющимся первым собственным значением графа $J(n,w)$.

Пусть $k = 2$. В этом случае число 2 является младшим собственным значением совершенной раскраски с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Согласно следствию 1 число $\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}} \cdot C_{7-k}^{3-k}$, равное $\frac{a_{11}-2}{14} C_7^3$, является целым. Тогда с точностью до переименования цветов имеем следующие альтернативы для a_{11}: $4, 6, 8$. Равенства $a_{11} - a_{21} = 2$, $a_{11} + a_{12} = a_{11} + a_{12} = 16$ позволяют найти неизвестные параметры a_{12} и a_{22}. Матрицы, в которых записаны соответствующие параметры, суть в точности матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Все эти матрицы являются матрицами параметров совершенных 2-раскрасок, полученных с помощью конструкций 4, 5 и 6 соответственно.

Пусть $k = 3$. В этом случае число -2 является младшим собственным значением совершенной раскраски с матрицей $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Из следствия 1 получаем, что число $\frac{a_{21}}{a_{12}+a_{21}} C_{7-k}^{3-k}$, равное $\frac{a_{11}+2}{18} C_6^2$, должно быть целым. Отсюда получаем, что $a_{21} = 6$. Более того, из равенств $a_{11} + a_{12} = 16$, $a_{11} - a_{21} = -2$ имеем $a_{12} = 12$. Однако согласно утверждению 1 число белых вершин совершенной 2-раскраски с такими параметрами равно $\frac{6}{18} C_8^4$. Так как это число не является целым, то совершенных 2-раскрасок $J(8,4)$, у которых младшее собственное значение является третьим собственным значением графа $J(8,4)$, не существует.

Пусть $k = 4$. В этом случае число -4 является собственным значением совершенной раскраски. $3-(8,4,\lambda)$-схемы существуют при $\lambda = 1, 2, 3$ согласно теореме 3. Заметим, что простая $3-(8,4,4)$-схема также существует, так как всякая такая схема является дополнением некоторой $3-(8,4,1)$-схемы до множества всех вершин графа $J(8,4)$. Тогда в силу утверждения 3 существуют совершенные 2-раскраски $J(8,4)$ с матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, с точностью до переименования цветов существуют совершенные 2-раскраски $J(8,4)$ с матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ и других совершенных 2-раскрасок $J(8,4)$ с младшим собственным значением, равным -4, не существует.

6. Заключение

В [17] показано, что параметры любой совершенной 2-раскраски $J(6,3)$ совпадают с параметрами одной из совершенных раскрасок, полученных с помощью конструкции 1 или индуцированных кратными тривиальными совершенными кодами в $J(6,3)$ или $2-(6,3,2)$-схемой. Там же доказано, что любая совершенная 2-раскраска $J(7,3)$ либо получается с помощью конструкции 1, либо индуцирована $2-(7,3,1)$- или $2-(7,3,2)$-схемами. В нашей статье получены новые конструкции совершенных раскрасок некоторых графов Джонсона (конструкции 2, 3, 5, 6). Также показано, что параметры совершенных 2-раскрасок графов Джонсона $J(8,3)$ и $J(8,4)$ исчерпываются параметрами совершенных раскрасок из этих конструкций, конструкций 1, 4 и параметрами совершенных раскрасок, индуцируемых $3-(8,4,1)$- и $3-(8,4,2)$-схемами.

Несмотря на ряд конструкций вопрос существования совершенных 2-раскрасок графов $J(9,3)$ остаётся открытым для совершенных раскрасок с матрицей $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Могильных И. Ю.** О регулярности совершенных раскрасок графа Джонсона в два цвета // Пробл. передачи информ. — 2007. — Т. 43, № 4. — С. 37–44.
2. **Могильных И. Ю.** О несуществовании некоторых совершенных 2-раскрасок графов Джонсона // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 5. — С. 52–68.
3. **Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.** Спектры графов: теория и применение. — Киев: Наукова Думка, 1984. — 384 с.
4. **Фон-дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — № 4. — С. 292–295.
5. **Фон-дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 923–930.
6. **Dehon M.** On the existence of 2-designs $S_\lambda(2,3,v)$ without repeated blocks // Discrete Math. — 1961. — Vol. 43. — P. 155–171.

7. **Delsarte P.** An algebraic approach to the association schemes of coding theory // Philips Res. Rep. Suppl. — 1973. — Vol. 10. — P. 1–97.
8. **Etzion T., Schwarz M.** Perfect constant-weight codes // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2004. — Vol. 50, N 9. — P. 2156–2165.
9. **Fon-der-Flaass D.** A bound on correlation immunity // Сиб. электрон. мат. изв. — 2007. — N 4. — P. 133–135.
10. **Godsil C., Royle G.** Algebraic graph theory. Graduate Texts in Mathematics. Vol. 207. — New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verl., 2001. — 439 p.
11. **Hanani H.** On quadruple systems // Can. J. Math. — 1960. — Vol. 12. — P. 145–157.
12. **Hartman A., Phelps K. T.** Tetrahedral quadruple systems // Utilitas Math. — 1990. — Vol. 37. — P. 181–189.
13. **Martin W. J.** Completely regular designs of strength one // J. Algebr. Comb. — 1994. — Vol. 3. — P. 17–185.
14. **Martin W. J.** Completely regular designs // J. Comb. Des. — 1998. — Vol. 6, N 4. — P. 261–273.
15. **Meyerowitz A.** Cycle–balanced partitions in distance–regular graphs // Discrete Math. — 2003. — Vol. 264. — P. 149–165.
16. **Mogilnykh I. Yu., Avgustinovich S. V.** Perfect colorings of Johnson graph in two colors // Proc. XI Int. Symp. Problems of Redundancy in Information and Control Systems (Saint-Petersburg, Russia, July 2–6, 2007). — Saint-Petersburg: ГУАП, 2007. — P. 205–209.
17. **Mogilnykh I. Yu., Avgustinovich S. V.** Perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(6,3)$ and $J(7,3)$ // Lect. Notes Comp. Sci. — 2008. — Vol. 5228. – P. 11—19.
18. **Phelps K. T., Stinson D. R., Vanstone S. A.** The existence of simple $S_3(3,4,v)$ // Discrete Math. — 1989. — Vol. 77. — P. 255–258.
19. **Shapiro G. S., Slotnik D. S.** On the mathematical theory of error correcting codes // IBM J. Res. Dev. — 1959. — Vol. 3. — P. 68–72.

Августинович Сергей Владимирович,
e-mail: avgust@math.nsc.ru

Могильных Иван Юрьевич,
e-mail: ivmog84@gmail.com

Статья поступила
10 августа 2009 г.