ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2010. Том 17, № 2. С. 20–38

УДК 519.17

АЦИКЛИЧЕСКАЯ 4-РАСКРАШИВАЕМОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАФОВ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ 4- И 5-ЦИКЛОВ *)

О. В. Бородин

Аннотация. Известно, что всякий плоский граф ациклически 5-раскрашиваем (О. В. Бородин, 1976). Получен также ряд достаточных условий ациклической 4- и 3-раскрашиваемости. В частности, ациклическая 4-раскрашиваемость доказана для следующих плоских графов: не содержащих 3- и 4-циклов (О. В. Бородин, А. В. Косточка и Вудал, 1999); 4-, 5- и 6-циклов; 4-, 5- и 7-циклов; 4- и 5-циклов и пересекающихся 3-циклов (Монтасьер, Распо и Ванг, 2006); циклов длины 4, 5 и 8 (Чен и Распо, 2009).

В статье доказана ациклическая 4-раскрашиваемость всех плоских графов, не содержащих 4- и 5-циклов.

Ключевые слова: плоские графы, ациклическая раскраска, запрещённые циклы.

Введение

Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ множества вершин и рёбер графа G, а обхват графа G, т. е. длину минимального цикла в G, — через $g(G)$.

Правильная *k-раскраска* графа G есть отображение $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $f(x) \neq f(y)$, если вершины x и y смежны.

По теореме Грёцша [15] каждый плоский граф без треугольников 3-раскрашиваем. В 1976 г. Стейнберг предположил, что каждый плоский граф без 4- и 5-циклов является 3-раскрашиваемым. Эта гипотеза остаётся неподтверждённой. Эрдёш предложил следующее ослабление гипотезы Стейнберга [22]: существует ли такая константа C, что отсутствие циклов длины от 4 до C в плоском графе гарантирует его 3-раскрашиваемость? Аббот и Жу [5] доказали, что такое C существует, причём $C \leqslant 11$. Этот результат был далее улучшен до $C \leqslant 10$ О. В. Бородиным [8] и до $C \leqslant 9$ О. В. Бородиным [9] и независимо Сандерсом и Жао [21]. Наилучший результат в данном направлении, $C \leqslant 7$,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09–01–00244 и 08–01–00673).

получен О. В. Бородиным и др. [11]. В свою очередь, он был уточнён [12] следующим образом: всякий плоский граф без 5- и 7-циклов, не содержащий смежных 3-циклов, 3-раскрашиваем. Кроме того, в [12] даётся бесконечная серия контрпримеров к доказательству этого же утверждения, приведённому в [23].

Правильная вершинная раскраска графа называется *ациклической*, если на любом цикле встречается не менее трёх цветов (Грюнбаум [16]). Улучшая предыдущие оценки 9, 8, 7 и 6, полученные Грюнбаумом [16], Митчемом [19], Альбертсоном и Берманом [6] и А. В. Косточкой [4] соответственно, О. В. Бородин [1, 7] доказал гипотезу Грюнбаума об ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов. Эта оценка неулучшаема и, более того, существуют даже двудольные 2-вырожденные плоские графы, не являющиеся ациклически 4-раскрашиваемыми (А. В. Косточка, Л. С. Мельников [18]). Отметим, что ациклическая раскраска оказалась полезной при получении результатов для других типов раскрасок [13, 17].

Получен также ряд достаточных условий ациклической 4- и 3-раскрашиваемости плоских графов. Через $a(G)$ обозначим то минимальное k, при котором граф G ациклически k-раскрашиваем. О. В. Бородин, А. В. Косточка и Вудал [10] доказали, что если G – плоский граф обхвата g, то $a(G) \leqslant 4$ при $g \geqslant 5$ и $a(G) \leqslant 3$ при $g \geqslant 7$. Отметим, что первый из этих результатов уже неулучшаем в терминах обхвата ввиду упомянутой выше конструкции А. В. Косточки и Л. С. Мельникова [18]. О. В. Бородин [2] и независимо Окар и Монтасьер [14] доказали, что $a(G) \leqslant 3$ при условии, что в G нет циклов длины от 4 до 12. Монтасьер, Распо и Ванг [20] доказали оценку $a(G) \leqslant 4$ для любого плоского графа G без 4-, 5- и 6-циклов, без 4-, 5- и 7-циклов, а также без 4- и 5-циклов и пересекающихся 3-циклов, Чен и Распо (частное сообщение) — при условии, что в G нет 4-, 5- и 8-циклов, а О. В. Бородин [3] — при отсутствии 4- и 6-циклов.

Целью работы является следующая теорема, перекликающаяся с упомянутой выше гипотезой Стейнберга о 3-раскрашиваемости.

Теорема 1. *Всякий плоский граф, не содержащий 4- и 5-циклов, ациклически 4-раскрашиваем.*

1. Доказательство теоремы 1

Предположим, что граф G — наименьший по числу вершин контрпример к теореме 1. Через $F(G)$, $d(v)$ и $r(f)$ обозначим множество граней графа G, степень вершины v и ранг грани f соответственно.

Из формулы Эйлера $|V(G)|-|E(G)|+|F(F)| = 2$, используя известные равенства $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)| = \sum\limits_{f\in F(G)} r(f)$, имеем

$$\sum_{v\in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{f\in F(G)} (r(f) - 6) < 0. \tag{1}$$

Пусть *начальный заряд* каждой вершины $v \in V(G)$ и грани $f \in F(G)$ равен $\mathrm{ch}(v) = 2d(v) - 6$ и $\mathrm{ch}(f) = r(f) - 6$ соответственно. Заметим, что только 2-вершины и 3-грани имеют отрицательные начальные заряды, равные -2 и -3 соответственно. Далее дадим правила перераспределения зарядов, приводящие к *финальному заряду* ch^* такому, что

$$\sum_{x\in V(G)\cup F(G)} \mathrm{ch}^*(x) = \sum_{x\in V(G)\cup F(G)} \mathrm{ch}(x) < 0.$$

Затем, основываясь на структурных свойствах графа G, мы получим противоречие, доказав, что $\mathrm{ch}^*(x) \geqslant 0$ для каждого $x \in V(G) \cup F(G)$.

1.1. Структурные свойства минимального контрпримера. Ясно, что граф G 2-связен, а потому не содержит 1-вершин. Отметим, что никакие две 3-грани не смежны, поскольку в G нет 4-циклов. Число 3-граней, инцидентных вершине v, обозначим через $\tau(v)$; $\tau(v) \leqslant \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$. В частности, 3-вершина инцидентна не более чем одной 3-грани.

Вершина и ребро называются *треугольными*, если они инцидентны 3-грани. Легко видеть, что в G нет треугольных 2-вершин.

Треугольная 3-вершина, соединённая с вершиной v нетреугольным ребром, называется *плохим соседом* вершины v, а число плохих соседей вершины v равно $\beta(v)$.

Через $\nu_2(v)$ обозначим число 2-вершин, смежных с вершиной v. Вершина степени не менее (не более) k — это k^+-(k^--)*вершина*. Аналогичные наименования используются для граней.

Назовём 3-грань *слабой*, если она инцидентна 3-вершине, и *сильной* в противном случае. Число сильных и слабых граней при вершине v обозначим через $\tau_s(v)$ и $\tau_w(v)$ соответственно. 3-Грань uvw называется $(d(u), d(v), d(w))$*-гранью*. Пусть $\tau_{335}(v)$ — число $(3,3,5)$-граней при вершине v.

1.1.1. Основные свойства графа G.

Лемма 1. *Для всякой 3^--вершины v*

$$\nu_2(v) = 0 \quad \text{и} \quad \beta(v) = 0.$$

Доказательство. Первое утверждение легко следует из второго, поэтому пусть x — плохой сосед вершины v. Обозначим через v_1, v_2, x соседние с v вершины по часовой стрелке, и пусть x лежит в 3-грани xyz, также сориентированной по часовой стрелке. Ввиду минимальности G граф $G \setminus \{x\}$ имеет ациклическую 4-раскраску c. Без ограничения общности можно считать, что $c(y) = 1$, $c(z) = 2$.

Мы легко завершаем доказательство, если $c(v) \notin \{1, 2\}$, поэтому будем считать, что $c(v) = 1$ и через вершины v и y в $G \setminus \{x\}$ проходят двуцветные $(1, 3)$- и $(1, 4)$-цепи. Также ввиду симметрии можно считать, что v_1 и v_2 окрашены в цвета 3 и 4 соответственно. Поскольку нет $(2, 4)$-цепи между v_2 и z, можно положить $c(x) = 4$, $c(v) = 2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любой 4-вершины v имеют место утверждения:*
(i) $\nu_2(v) + \beta(v) \leqslant 1$ *при* $\nu_2(v) \geqslant 1$;
(ii) $\beta(v) \leqslant 2$.

Доказательство. Доказательство (i) можно найти в [10, 20]. Докажем (ii). Пусть $v_1, \ldots, v_4$ — все соседи вершины v по часовой стрелке, причём v_1, v_2 и v_3 — плохие соседи. Пусть v_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, лежит в 3-грани $u_i v_i w_i$, также сориентированной по часовой стрелке. Допустим, что $c(v_4) = 1$ в раскраске c графа $G \setminus \{v, v_1, v_2, v_3\}$.

Если цвет 2 встречается не более одного раза на шести вершинах u_i, w_i, то полагаем $c(v) = 2$, и тогда по меньшей мере две ветви не проводят двуцветных цепей. Если, скажем, $c(u_1) = 2$, то достаточно положить $c(v_1) \geqslant 3$ (и разумеется, $c(v_1) \neq c(w_1)$). Ввиду симметрии допустим теперь, что каждый из цветов 2, 3 и 4 встречается дважды. Можно считать, что $c(u_1) = 2$, $c(w_1) = 3$ и $\{c(u_3), c(w_3)\} = \{2, 4\}$. Тогда достаточно положить $c(v) = 2$, $c(v_1) = 4$ и $c(v_3) = 3$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Любая 5-вершина v обладает свойствами*:
(i) $\nu_2(v) + \beta(v) \leqslant 4$;
(ii) $\nu_2(v) + \beta(v) \leqslant 2$ *при* $\tau_{335} = 1$;
(iii) $\nu_2(v) = \beta(v) = 0$ *при* $\tau_{335} = 2$.

Доказательство. Возьмём раскраску c графа $G - v$ и обесцветим соседей вершины v. Пусть $d_2(v)$ — число вершин на расстоянии 2 от v. В частности, $d_2(v) \leqslant 5 \times 2 = 10$, если нарушено (i).

(*) Предположим, что мы продолжили c на G так, что (α, β)-цепь P проходит через v по цепи vxy. Тогда либо $d(x) = 2$, либо x входит в 3-грань xyz. Отметим, что мы можем порвать P, перекрасив x.

(**) Пусть v лежит в $(3, 3, 5)$-грани $u_k v w_k$, где оставшиеся соседи вершин u_k и w_k суть u'_k и w'_k. (Можно считать, что $k = 1$ в (ii) и $k \leqslant 2$

в (iii).) Заметим, что при любых $c(v)$, $c(u'_k)$ и $c(w'_k)$ можно избежать возникновения двуцветной цепи $u'_k u_k w_k w'_k$, положив сначала $c(u_k) \notin \{c(u'_k), c(v), c(w'_k)\}$, а затем $c(w_k) \notin \{c(u_k), c(v), c(w'_k)\}$.

Случай (i). Если покрасить v в цвет, встречающийся не более двух раз на 2-дистанционных соседях вершины v, а затем применить (*), то двуцветных цепей через v не получится.

Случай (ii). Так как $d_2(v) \leqslant 3\times 2+2 < 3\times 3$, то найдутся по меньшей мере два цвета, встречающиеся на 2-дистанционных соседях вершины v не более чем по два раза. Покрасим вершину v в один из них, а затем применим замечания (**) и (*) в этом порядке.

Случай (iii). Достаточно покрасить v в цвет, встречающийся не более одного раза в $\{c(u'_1), c(w'_1), c(u'_2), c(w'_2)\}$, затем применить (**), и наконец (*). Лемма 3 доказана.

Лемма 4 [20]. *В G нет $(3,3,4^-)$-грани.*

Лемма 5 [20]. *Никакая $(3,4,4)$-грань не имеет общей 4-вершины со слабой 3-гранью.*

1.1.2. Крабы и монстры. Наиболее трудной частью доказательства теоремы 1 является доказательство свойств треугольной 4-вершины, имеющей двух плохих соседей и называемой *крабом*, а особенно некоторых её разновидностей.

Плохой сосед называется *странным соседом*, если принадлежит такой $(3,4,4)$-грани, каждая из 4-вершин которой лежит в двух 3-гранях. Краб называется *монстром*, если имеет двух странных соседей.

Плохой сосед есть *полустранный сосед*, если принадлежит такой $(3,4,5)$-грани, у которой 4-вершина лежит в двух 3-гранях, а для 5-вершины z имеем $\tau(z)=2$, $\tau_{335}(z)=0$ и $\nu_2(z)+\beta(z)=1$. Краб называется *полумонстром*, если имеет одного странного и одного полустранного соседей.

Будем говорить, что монстр или полумонстр v *захватывает* 6^+-грань $x_1 v x_2 \ldots$, если x_1 — странный сосед вершины v, а x_2 — странный либо полустранный сосед вершины v соответственно. (Таким образом, захваченная грань противолежит 3-грани при крабе v.)

Треугольная грань называется *странной* или *полустранной*, если такова 3-вершина в этой грани.

Утверждение 1. *Если краб v лежит в 3-грани uvw и имеет плохих соседей x_1 и x_2, лежащих в 3-гранях $x_i y_i z_i$, где $1 \leqslant i \leqslant 2$, вершины u, x_1, x_2 и w расположены вокруг v по часовой стрелке, а обе 3-грани $x_i y_i z_i$*

также сориентированы по часовой стрелке, то имеют место следующие утверждения.

(i) *Если c — ациклическая 4-раскраска графа $G - \{v, x_1, x_2\}$, при которой $c(u) = 1$ и $c(w) = 2$, то $\{c(y_1), c(z_1)\} = \{c(y_2), c(z_2)\} = \{3, 4\}$.*

(ii) *Если к тому же x_1 является странным соседом для v, так что $d(y_1) = d(z_1) = 4$ и существуют 3-грани $y_1y_1'y_1''$ и $z_1z_1'z_1''$, сориентированные по часовой стрелке, то $\{c(y_1'), c(y_1'')\} = \{c(z_1'), c(z_1'')\} = \{1, 2\}$.*

Доказательство. Случай (i). Если, скажем, $3 \notin \{c(y_1), c(z_1), c(y_2), c(z_2)\}$, то положив $c(v) = 3$, мы избегаем появления двуцветных циклов при окраске x_1 и x_2. Ввиду симметрии остаётся рассмотреть два варианта.

Пусть сначала каждый из цветов 3 и 4 встречается в мультимножестве $\{c(y_1), c(z_1), c(y_2), c(z_2)\}$ ровно по разу. Без ограничения общности пусть $3 \in \{c(y_1), c(z_1)\}$. Если $4 \in \{c(y_1), c(z_1)\}$, то можно считать, что $c(y_1) = 3$ и $c(z_1) = 4$. Если нет $(2, 3)$-цепи из y_1 в w, то положим $c(v) = 3$ и $c(x_1) = 2$, а иначе $c(v) = 4$ и $c(x_1) = 1$. Пусть теперь $4 \in \{c(y_2), c(z_2)\}$. Тогда можно положить $c(v) = 3$ и $c(x_1) = 4$.

Теперь допустим, что $c(y_1) = 3$, $c(z_1) = 4$ и $|\{3, 4\} \cap \{c(y_2), c(z_2)\}| = 1$. Можно положить $(c(v), c(x_1)) \in \{(3, 2), (4, 1)\}$. Если $c(v) \in \{c(y_2), c(z_2)\}$, то положим $c(x_2) \in \{3, 4\} - c(v)$, а иначе x_2 красится однозначно.

Случай (ii). Предположим противное и ввиду части (i) будем считать, что $c(y_1) = 3$ и $c(z_1) = 4$.

Сначала предположим, что $\{c(y_1'), c(y_1'')\} = \{1, 2\}$. Поскольку $3 \in \{c(z_1'), c(z_1'')\}$, то перекрасим y_1 в 4, а z_1 — в 1 или 2, нарушив таким образом единственную устойчивую раскраску, описанную в (i).

Ввиду равноправия цветов 3 и 4 пусть $\{c(y_1'), c(y_1'')\} = \{\alpha, 4\}$, где $\alpha \leqslant 2$, а $\{c(z_1'), c(z_1'')\} = \{\beta, 3\}$, где $\beta \leqslant 2$. Если $\alpha = \beta$, то достаточно положить $c(y_1) = 3 - \alpha$. Таким образом, $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$.

Если либо $c(y_1') = \alpha$, а $c(z_1'') = \beta$, либо $c(y_1') = 4$, а $c(z_1'') = 3$, то ввиду конфликта двуцветных цепей существует хотя бы одна из раскрасок $(c(z_1), c(y_1)) = (\alpha, 3)$ или $(c(z_1), c(y_1)) = (4, \beta)$, что противоречит (i).

Остаётся рассмотреть два варианта: либо $c(y_1') = \alpha$, а $c(z_1'') = 3$, либо $c(y_1') = 4$, а $c(z_1'') = \beta$. Они симметричны, поэтому разберём только первый.

Ввиду (i) должна существовать двуцветная $(\alpha, 3)$-цепь из y_1' в z_1''. Положим $c(x_1) = \beta$. Отметим, что двуцветного цикла через ребро vx_1 не возникнет, какой бы из цветов 3 или 4 ни оказался на v. (Напомним, что $c(u) = 1$, $c(w) = 2$, а $\{c(y_2), c(z_2)\} = \{3, 4\}$.) Таким образом, мы можем положить либо $(c(v), c(x_2)) = (c(z_2), 1)$, либо $(c(v), c(x_2)) = (c(y_2), 2)$, снова используя конфликт между двуцветными цепями. Утверждение 1 доказано.

Лемма 6. *Если краб имеет странного соседа, то второй его плохой сосед не может лежать в* $(3, 3, N)$*-грани.*

Доказательство. Сохраняя обозначения из утверждения 1, предположим, что $d(y_2) = 3$, а y_2' — сосед вершины y_2, отличный от x_2 и z_2.

Так как мы можем менять цвета 3 и 4 на y_1 и z_1, используя утверждение 1(ii), то можно считать, что $(c(y_1), c(z_1), c(y_2), c(z_2)) = (4, 3, 3, 4)$. Заметим, что $c(y_2') = 4$, поскольку иначе можно перекрасить y_2 в 1 или 2 и затем применить утверждение 1(i).

Возьмём $c(x_2) = 1$ и сначала попробуем сделать $c(v) = 3$. Заметим, что (3,1)-цикл через ребро vx_2 не пройдёт ни при каком цвете на x_1. Поэтому можно считать, что в $G - \{v, x_1\}$ существует $(3, 1)$-цепь, соединяющая z_1 с u. Но если так, то полагаем $c(x_1) = 2$. Если возникает (2,3)-цепь, соединяющая w с z_1, то положим $c(v) = 4$. Лемма 6 доказана.

Следующие две леммы имеют решающее значение для доказательства теоремы.

Лемма 7. *Если монстр* v *захватывает* 6*-грань* f*, то вершина* v^**, противолежащая* v *в* f*, имеет* $d(v^*) \geqslant 5$.

Доказательство. Заметим, что $d(v^*) \geqslant 4$ ввиду леммы 5. Дополняя обозначения из утверждения 1, предположим, что существуют 3-грани $y_2y_2'y_2''$ и $z_2z_2'z_2''$, причём каждая сориентирована по часовой стрелке. Поскольку утверждение 1(ii) применимо к x_2 как и к x_1 ввиду симметрии, имеем $\{c(y_2'), c(y_2'')\} = \{c(z_2'), c(z_2'')\} = \{1, 2\}$.

Без ограничения общности $f = vx_1z_1v^*y_2x_2$, т. е. $v^* = z_1'' = y_2'$. Напомним, что $c(u) = 1$ и $c(w) = 2$. Кроме того, ввиду зеркальной симметрии можно считать, что $c(v^*) = 1$, а $c(z_1') = c(y_2'') = 2$.

Предположим, что $d(v^*) = 4$. Возьмём $c(y_1) = c(y_2) = 3$, $c(z_1) = c(z_2) = 4$ и $c(x_2) = 1$. Сначала попробуем сделать $c(v) = 4$ и $c(x_1) = 1$. Единственным препятствием к этой раскраске является наличие $(1, 4)$-цепи из u в z_2 в графе $G - v$. Если так, то $(3, 2)$-цепь из y_1 в w невозможна, а значит, годятся $c(v) = 3$ и $c(x_1) = 2$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если полумонстр* v *захватывает* 6*-грань* $f = vx_1z_1v^*y_2x_2$*, где* x_2 *— полустранный сосед, то либо*

(i) $d(v^*) \geqslant 5$,

либо

(ii) $d(y_2) = 5$ *и существует сильная 3-грань* $v^*y_2y_2''$.

Доказательство. Дополняем обозначения из леммы 5. Вспомним, что $\tau(y_2) = 2$. Через s обозначим вершину, смежную с 5-вершиной из $\{y_2, z_2\}$ по нетреугольному ребру. Так как x_2 — полустранный сосед, то либо $d(s) = 2$, и тогда s смежна с $r \notin \{y_2, z_2\}$, либо s — плохой сосед, лежащий в 3-грани rst.

Заметим, что имеется 3-грань $v^* y_2 y_2''$, так как иначе $v^* = s$ вопреки лемме 5 либо отсутствию треугольных 2-вершин. Снова $d(v^*) \geqslant 4$ ввиду леммы 5, поскольку x_1 является странным соседом, поэтому предположим, что $d(v^*) = 4$.

Случай 1. $d(y_2) = 4$. В силу утверждения 1(i) $\{c(y_2), c(z_2)\} = \{3, 4\}$. Так как можно менять цвета вершин y_1 и z_1 ввиду утверждения 1(ii), применённого к странной вершине x_1, зафиксировав цвета на u, v^* и w, то, используя равноправие цветов 3 и 4, можно по-прежнему считать, что $c(y_1) = 3$, $c(z_1) = 4$, $c(y_2) = 3$ и $c(z_2) = 4$. Таким образом, для раскраски графа G применимы рассуждения из последнего абзаца в доказательстве леммы 5.

Случай 2. $d(y_2) = 5$, а 3-грань $v^* y_2 y_2''$ слабая. Имеем $d(y_2'') = 3$. Пусть вершина y_2'' смежна с $p \notin \{v^*, y_2\}$. Опять ввиду утверждения 1(i) можно без ограничения общности считать, что $c(y_2) = 3$, $c(z_2) = 4$, и тогда взять $c(y_1) = 3$, $c(z_1) = 4$ ввиду утверждения 1(ii).

Отметим, что в данный момент мы не можем сказать, что $c(v) = 1$, так как знаем из утверждения 1(ii) лишь то, что $\{c(z_1'), c(v)\} = \{1, 2\}$. Итак, пусть $c(v^*) = \alpha \leqslant 2$ и $c(z_1') = 3 - \alpha$.

Идея оставшейся части доказательства: переделаем нашу раскраску c графа $G - \{x_1, v, x_2\}$ в другую ациклическую 4-раскраску c^* этого графа такую, что $\{c^*(y_2), c^*(z_2)\} \neq \{3, 4\}$, а затем применим утверждение 1(i).

Положим $c^*(v^*) = 3$ и $c^*(y_2) = \alpha$. Если $c(p) \in \{3 - \alpha, 3\}$, то берём $c^*(y_2'') = 4$, а если $c(p) = 4$, то полагаем $c^*(y_2'') = 3 - \alpha$. В обоих случаях s красим в 4 лишь вынужденно. Пусть, наконец, $c(p) = \alpha$, положим снова $c^*(y_2'') = 3 - \alpha$. Если $\alpha \notin \{c(r), c(t)\}$, то проблем с окраской вершины s не возникает, а если $3 \notin \{c(r), c(t)\}$, то можно взять $c^*(s) = 3$. Поэтому пусть $\{c(r), c(t)\} = \{\alpha, 3\}$, тогда мы полагаем $c^*(y_2) = 3 - \alpha$ и $c^*(y_2'') = c^*(s) = 4$. Лемма 8 доказана.

1.1.3. Свойства $(3,4,4)$-, $(3,4,5)$- и $(3,5,5)$-граней. Мы должны изучить такие *младшие* 3-грани довольно подробно.

Треугольная 4-вершина v называется *бедной*, если $\nu_2(v) + \beta(v) \geqslant 1$, *средней*, если $\tau(v) = 2$, и *богатой*, если $\tau(v) = 1$, а $\nu_2(v) = \beta(v) = 0$.

Треугольная 5-вершина v — *бедная*, если либо $\nu_2(v) + \beta(v) = 3$, либо $\nu_2(v) + \beta(v) = \tau_{335}(v) = 1$, а $\tau(v) = 2$; *средняя*, если $\tau_w(v) = 2$, $\tau_{335}(v) = 0$

и $\nu_2(v)+\beta(v)=1$; *особая*, если $\nu_2(v)+\beta(v)=1$, $\tau_s(v)=1$ и v инцидентна полустранному треугольнику либо (3,5,5)-грани, инцидентной захваченной 6-грани; *богатая* в остальных случаях.

Отметим, что: (1) 5-вершина в полустранной (3,4,5)-грани является либо средней, либо особой; (2) ввиду лемм 5, 7 и 6 в границе захваченной 6-грани не могут лежать бедные вершины, а средние 5-вершины могут находиться там лишь в качестве вершины y_2, причём лишь если $d(v^*)\geqslant 5$ и $d(y_2'')=3$; (3) (3,4,4)- или (3,4,5)-грань, содержащая две средние вершины, является странной или полустранной соответственно.

Утверждение 2. *Если 3-грань uvw содержит 3-вершину v и бедную 4-вершину u, а c — раскраска графа $G-v$, то $c(u)\neq c(v')=c(w)$, где $v'\notin\{u,w\}$ — вершина, смежная с v.*

Доказательство. Обозначим остальных соседей вершины u через x и y, где $d(x)=2$, либо x — плохой сосед для u. В рассмотрении нуждается лишь случай $\{c(x),c(y),c(w)\}=\{2,3,4\}$, но тогда берём $c(u)=c(x)$ и затруднений с вершинами v и x не возникает. Утверждение 2 доказано.

В лемме 9 заключена основная идея доказательства теоремы 1.

Лемма 9. *Всякая $(3,4,4)$-грань либо является странной, либо содержит богатую 4-вершину.*

Доказательство. От противного. Пусть 3-грань uvw сориентирована по часовой стрелке, причём $d(v)=3$, а $d(u)=d(w)=4$. Пусть c — раскраска графа $G-v$ и $c(v')=1$, где $v'\notin\{u,w\}$ — смежная с v вершина. Тогда цвет 1 должен появиться на u или w, иначе нам нечего доказывать. Пусть $c(u)=1$, тогда из утверждения 2 следует, что u — средняя. Значит, имеется 3-грань $uu'u''$, пусть также сориентированная по часовой стрелке. Согласно утверждению 2 можно считать, что $c(u')=3$ и $c(u'')=4$, поскольку иначе v можно сразу покрасить.

Мы должны доказать, что w не бедная. Допустим, что $c(w)=2$, $d(x)=2$, либо x — плохой сосед вершины w, лежащий в 3-грани $xx'x''$, а через y обозначим четвёртого соседа вершины w. Более того, v' соединена с u' посредством $(3,1)$-цепи в $G-v$. Сначала перекрасим u в 2. Теперь если $c(y)=\alpha\in\{1,3\}$, то берём $c(v)=3$, перекрашиваем w в 4, а цвет α на x допускаем лишь в том случае, когда на её соседях встречаются все остальные цвета. Допустим теперь, что $c(y)=4$, и положим $c(w)=1$ и $c(v)=3$. Тогда затруднения возможны лишь при $\{c(x'),c(x'')\}=\{1,2\}$. Если так, то возьмём $c(w)=3$ и $c(v)=c(x)=4$. Лемма 9 доказана.

Утверждение 3. *Если 3-грань uvw содержит 3-вершину v, 4^+-вершину w и бедную 5-вершину u, а c — раскраска графа $G-v$, то $c(u)\neq c(v')=$*

$c(w)$, где вершина $v' \notin \{u, w\}$ смежна с v.

Доказательство. Через x_1, x_2 и x_3 обозначим соседние с u вершины, отличные от v и w. Если $\tau(u) = 1$ при $\nu_2(u) + \beta(u) = 3$, то каждая x_i либо лежит в 3-грани $x_i x_i' x_i''$, либо является 2-вершиной, смежной с $x_i' \neq x_i$. Если $\tau_{335}(u) = 1$ при $\nu_2(u) + \beta(u) = 1$, то пусть x_1 — по-прежнему плохой сосед вершины u либо $d(x_1) = 2$, а ещё существует цепь $x_2' x_2 x_3 x_3'$, где $d(x_2) = d(x_3) = 3$.

Пусть без ограничения общности $c(u) = c(v') = 1$, а $c(w) = 2$. Заметим, что в мультимножестве $X = \{c(x_1'), c(x_1''), \ldots, c(x_3'')\}$ цвет 1 встречается по меньшей мере дважды, потому что иначе мы можем покрасить v сразу. Обесцветим все вершины x_i.

Случай 1. Если цвет 3 встречается в X не более одного раза, то берём $c(u) = 3$, а если, скажем, $c(x_1') = 3$, то мы легко избегаем единственно опасного $(3, 2)$-цикла через цепь $x_1 u w$, взяв $c(x_1) \neq 2$.

Теперь ввиду симметрии можно считать, что каждый из цветов 3 и 4 встречается в X дважды, как и 1. Тогда возникает фактически единственная ситуация: $(c(x_1'), c(x_1''), c(x_2'), c(x_2''), c(x_3'), c(x_3'')) = (1, 3, 1, 4, 3, 4)$, и можно взять $(c(x_1), c(x_2), c(x_3)) = (4, 2, 1)$.

Случай 2. Без ограничения общности можно считать, что возникает $(4, 1)$-цикл через x_2, если положить $c(v) = 4$. Тогда $(3, 1)$-цикл должен проходить либо через x_1, либо через x_3. В обоих случаях перекрасим u в цвет 4.

В первом варианте достаточно взять $c(x_3) = 1$ при $c(x_3') = 4$, а иначе $c(x_3) \in \{2, 3\}$. Во втором мы должны позаботиться лишь о том, чтобы не создать $(4, 2)$-цикл через ребро $x_1 u$, но это не составляет труда. Утверждение 3 доказано.

Из утверждений 2 и 3 получаем

Следствие 1. *Никакая слабая 3-грань не содержит двух бедных вершин.*

Леммы 10 и 11 похожи на лемму 9, но доказываются сложнее.

Лемма 10. *Всякая $(3, 4, 5)$-грань либо является полустранной, либо содержит богатую вершину.*

Доказательство. Пусть $f = uvw$ сориентирована по часовой стрелке, $d(u) = 5$, $d(w) = 4$, а c — раскраска графа $G - v$, причём $c(v') = 1$, где $v'v \in E(G)$, $v' \notin \{u, w\}$. Остальных соседей вершин u и w обозначим через u_1, u_2, u_3, w_1 и w_2.

Ввиду (3) и следствия 1 достаточно доказать, что если одна из вершин u и w бедная, то другая не может быть средней.

Случай 1. $\tau(w)=2$, а u бедная. Нужно исключить две возможности: $\nu_2(u)+\beta(u)=3$, либо $\nu_2(u)+\beta(u)=1$ при $\tau_{335}(u)=1$. Пусть одна из них имеет место, тогда из утверждения 3 следует, что $c(w)=1$, так что пусть $c(u)=2$. Берём остальные обозначения из утверждений 2 и 3 и без ограничения общности считаем, что $c(w_1)=3$ и $c(w_2)=4$. Перекрасим w в цвет 2 и обесцветим u, u_1, u_2 и u_3.

Подслучай 1.1. $\nu_2(u)+\beta(u)=3$. Если цвет 1 встречается не более одного раза в мультимножестве $U=\{c(u_1'),c(u_1''),\ldots,c(u_3'')\}$, то можно положить $c(u)=1$, $c(v)=3$, а затем плохого соседа, скажем, u_1, вершины u, на 3-грани $u_1u_1'u_1''$ которого встречается цвет 1, покрасить в цвет 2 или 4. (Это ещё легче сделать, если $d(u_1)=2$ и $c(u_1')=1$.)

Замечание. Чтобы не отвлекаться на 2-вершины, будем в похожих ситуациях говорить только о плохих соседях, так как с 2-вершинами справляться легче.

Аналогичное рассуждение годится, если цвет 3 или 4 встречается в U не более одного раза (тогда мы красим плохого соседа u_i в 2, лишь если все остальные цвета встречаются на его соседях).

Итак, пусть каждый из цветов 1, 3 и 4 встречается в U ровно два раза. Тогда без ограничения общности $(c(u_1'),c(u_1''),c(u_2'),c(u_2''),c(u_3'),c(u_3''))=(1,3,3,4,4,1)$, так что можно взять $(c(u_1),c(u_2),c(u_3))=(4,1,2)$.

Подслучай 1.2. $\nu_2(u)+\beta(u)=1$ и имеется $(3,3,5)$-грань u_1uu_2. Пусть $\alpha\in\{1,3,4\}-\{c(u_1'),c(u_2')\}$. Положим $c(u)=\alpha$, $c(u_1)\notin\{\alpha,c(u_1'),c(u_2')\}$, а затем $c(u_2)\notin\{\alpha,c(u_1),c(u_2')\}$. Если $\alpha\in\{c(u_3'),c(u_3'')\}$, то возьмём $c(u_3)\neq 2$. При $\alpha=1$ ещё потребуем $c(v)\neq c(u_3)$.

Случай 2. $\tau(w)=1$, $\nu_2(w)+\beta(w)\geqslant 1$, $\nu_2(u)+\beta(u)=1$, $\tau_w(u)=2$, w_1 — плохой сосед вершины w. Предположим противное, т. е. без ограничения общности u_1 — плохой сосед вершины u, лежащий в 3-грани $u_1u_1'u_1''$, и существует 3-грань uu_2u_3, где u_3 — 3-вершина, смежная с $u_3'\notin\{u,u_2\}$.

Из утверждения 2 следует, что $c(u)=1$, поэтому пусть $c(w)=2$. Достаточно было бы положить $c(v)=3$ или $c(v)=4$, если бы не возникал $(3,1)$- или $(4,1)$-цикл в G соответственно. Пусть такие циклы возникают. Тогда доказательство разбивается на три подслучая, причём мы повсюду используем равноправие цветов 3 и 4.

Подслучай 2.1. $c(u_2)=3$, $c(u_3)=4$, $c(u_3')=1$. Попытка взять $c(u)=4$ (а следовательно, $c(u_3)=2$) недостаточна, лишь если $\{c(u_1'),c(u_1'')\}=\{1,4\}$. Если так, то положим $c(u)=2$ и обесцветим w и w_1. Если $c(w_2)\neq 4$, то полагаем $c(w)=4$, и тогда затруднений с окраской вершины w_1 нет. Пусть $c(w_2)=4$. Если $3\notin\{c(w_1'),c(w_1'')\}$, то достаточно взять $c(w) = 3$, поэтому пусть $3 \in \{c(w_1'), c(w_1'')\}$. Полагаем $c(w) = 1$, $c(v) = 3$, а затем берём $c(w_1) = 4$, лишь если $\{c(w_1'), c(w_1'')\} = \{2, 3\}$).

Подслучай 2.2. $c(u_1) = 3$, $c(u_1') = 1$, $c(u_3) = 4$, $c(u_3') = 1$. Заметим, что $c(u_2) = 2$, поскольку иначе имеем подслучай 2.1. Положим $c(u) = 3$, что исключает двуцветные циклы через ребро u_1u, и обесцветим w и w_1.

Если $c(w_2) \neq 4$, то возьмём $c(w) = 4$, и тогда покрасить w_1 опять легко. Поэтому пусть $c(w_2) = 4$. Если $1 \notin \{c(w_1'), c(w_1'')\}$, то достаточно взять $c(w) = 1$ и $c(v) = 2$. Пусть $1 \in \{c(w_1'), c(w_1'')\}$. Тогда если $3 \in \{c(w_1'), c(w_1'')\}$, то достаточно взять $c(w_1) = 3$. Наконец, пусть $\{c(w_1'), c(w_1'')\} = \{1, 3\}$. Тогда полагаем $c(v) = 4$, $c(w) = 2$ и $c(w_1) = 4$.

Подслучай 2.3. $c(u_1) = 4$, $c(u_1') = 1$, $c(u_2) = 3$. Отметим сначала, что в рассмотрении нуждается лишь вариант $c(u_3) = 4$ и $c(u_3') = 3$. Действительно, иначе достаточно положить $c(u) = 4$, а затем либо перекрасить u_3 в цвет 1 при $c(u_3') = 4$, либо в цвет 1 или 2, если $c(u_3') = 2$ или $c(u_3') = 1$ соответственно.

Если $c(w_2) = \alpha \in \{3, 4\}$, то полагаем $c(u) = 2$, $c(v) = 7 - \alpha$, $c(w) = 1$, и проблемы с w_1 возможны лишь при $\{c(w_1'), c(w_1'')\} = \{1, 2\}$, но тогда достаточно взять $c(w) = 7 - \alpha$.

Остаётся рассмотреть вариант $c(w_2) = 1$. Наша следующая цель — доказать, что

(*) $\{c(u_1'), c(u_1'')\} = \{1, 2\}$, $\{c(w_1'), c(w_1'')\} = \{3, 4\}$;

(**) существуют все четыре двуцветные цепи между $\{u_1', u_1''\}$ и $\{w_1', w_1''\}$.

(2+4) Положим $c(u, w) = (2, 4)$. Будем пытаться избежать возникновения $(4, 2)$-цикла через ребро uw, подбирая цвета сначала для w_1, а затем для u_1. Если $4 \notin \{w_1', w_1''\}$, то такой цикл невозможен. Если $4 \in \{w_1', w_1''\}$, а $3 \notin \{w_1', w_1''\}$, то полагаем $c(w_1) = 3$. Если $\{w_1', w_1''\} = \{3, 4\}$, то полагаем $c(w_1) = 2$ и работаем с u_1 аналогично. Но нам уже нечего доказывать, если $c(u_1'') \neq 2$. Если же $c(u_1'') = 2$, то окраске u_1 в цвет 4 может помешать лишь (2,4)-цепь из u_1'' в $\{w_1', w_1''\}$.

Итак, доказаны (*) и четвёртая часть утверждения (**): существует $(4, 2)$-цепь, соединяющая $\{u_1', u_1''\}$ с $\{w_1', w_1''\}$ в $G^* = G \setminus \{u_1, u, w, w_1\}$.

(2+3) Раскраска $c(u_1, u, w, w_1) = (3, 2, 4, 2)$ обнаруживает $(3, 2)$-цепь, соединяющую $\{u_1', u_1''\}$ с u_2 в G^*, а раскраска $c(u_1, u, w, w_1) = (4, 2, 3, 2)$ не годится, только если вершина u_2 соединена $(3, 2)$-цепью с $\{w_1', w_1''\}$. В итоге мы находим $(3, 2)$-цепь из $\{u_1', u_1''\}$ в $\{w_1', w_1''\}$ в G^*.

(1+4) Раскраска $c(u_1, u, v, w, w_1) = (4, 1, 2, 4, 2)$ даёт нам $(4, 1)$-цепь из $\{u_1', u_1''\}$ в w_2, а раскраска $c(u_1, u, w, w_1) = (4, 2, 4, 1)$ — из w_2 в $\{w_1', w_1''\}$, что в сумме составляет $(4, 1)$-цепь из $\{u_1', u_1''\}$ в $\{w_1', w_1''\}$.

(1+3) Аналогично используя раскраски $(3,1,2,4,2)$, $(4,1,\ 2,3,2)$ и $(4,2,4,3,1)$, строим искомую $(3,1)$-цепь в виде суммы трёх подцепей с промежуточными пунктами u_2 и w_2.

Завершая доказательство леммы 10, предположим без ограничения общности, что обе 3-грани $u_1u_1'u_1''$ и $w_1w_1'w_1''$ сориентированы по часовой стрелке и $c(u_1', u_1'', w_1', w_1'') = (1,2,3,4)$. Тогда (u_1', w_1')- и (u_1'', w_1'')-цепи исключают друг друга ввиду наличия цепи w_1wuu_1. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Если* $(3,5,5)$*-грань содержит бедную вершину, то вторая её* 5*-вершина — богатая.*

Доказательство. Пусть $d(v) = 3$ для $(3,5,5)$-грани $f = uvw$. Ввиду следствия 1 достаточно доказать, что если w бедная, то u не может быть средней.

Пусть f сориентирована по часовой стрелке, а c — раскраска графа $G - v$ такая, что $c(v') = 1$, где $v'v \in E(G)$, $v' \notin \{u, w\}$. Обозначим остальных соседей вершин u и w через u_1, u_2, u_3, w_1, w_2 и w_3. Известно из утверждения 3, что $c(u) = 1$.

Пусть $\tau_w(u) = 2$ и $\nu_2(u) + \beta(u) = 1$. Точнее, существует плохой сосед u_1, лежащий в 3-грани $u_1u_1'u_1''$, и 3-грань uu_2u_3 с $d(u_3) = 3$, где u_3 смежна с $u_3' \notin \{u, u_2\}$. Можно считать, что $c(w) = 2$, а $c(u_2) \in \{2,3\}$.

Ввиду возможности покрасить v в цвета 3 и 4 должны существовать (1,3)- и (1,4)-цепи в $G - v$, проходящие через $\{u_1, u_2, u_3\}$. Отсюда следует, что $\{3,4\} \subseteq \{c(u_1), c(u_2), c(u_3)\}$, а значит, $4 \in \{c(u_1), c(u_3)\}$. Обесцветим вершины w, w_1, w_2 и w_3.

Возможны следующие варианты окраски вершин u_1, u_2, u_3:

(I) $c(u_2) = 2$, $c(u_1) = 4$, $c(u_3) = 3$;

(II) $c(u_2) = 3$, $c(u_3) = 4$;

(III) $c(u_2) = 3$, $c(u_1) = 4$, с такими подвариантами: (a) $c(u_3) \neq 4$; (b) $c(u_3) = 4$, $c(u_3') \neq 3$; (c) $c(u_3) = 4$, $c(u_3') = 3$.

В случае III(c) положим $c(u) = 2$, а во всех остальных случаях — $c(u) = 4$. Перекрасим u_1, причём в цвет $c(u_2)$ только вынужденно. Вершину u_3 перекрасим лишь при необходимости, т. е. в случаях II и III(b). Заметим, что при окраске w в цвет α в $G - v$ может образоваться лишь двуцветный цикл, проходящий через ребро uw, причём при $\alpha \neq 1$ двуцветного цикла через вершину v не возникнет.

Случай 1. $\nu_2(w) + \beta(w) = 3$. Пусть w_i инцидентна 3-грани $w_iw_i'w_i''$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, а $W = \{c(w_1'), c(w_2'), \ldots, c(w_3'')\}$.

Если цвет $\alpha \neq c(u)$ встречается в W не более одного раза, то положим $c(w) = \alpha$. Если $\alpha \notin W$, то w_1, w_2 и w_3 красим произвольно. Если, скажем, $\alpha \in \{c(w_1'), c(w_1'')\}$, то возьмём $c(w_1) \neq c(u)$, а w_2 и w_3 красим произвольно. При $\alpha = 1$ дополнительно потребуем, чтобы $c(v) \neq c(w_1)$.

Пусть теперь каждый из цветов 1, $\beta = 6 - c(u)$ и 3 встречается в W ровно дважды. Тогда имеем $(c(w_1'), c(w_1''), c(w_2'), c(w_2''), c(w_3'), c(w_3'')) = (1, \beta, \beta, 3, 3, 1)$ и годится раскраска $(c(w), c(w_1), c(w_2), c(w_3)) = (\beta, 3, 1, c(u))$.

Случай 2. $\tau_{335}(w) = \nu_2(w) + \beta(w) = 1$. Пусть плохой сосед w_1 входит в 3-грань $w_1 w_1' w_1''$ и существует $(3,3,5)$-грань ww_2w_3, где третьи соседи вершин w_2 и w_3 обозначены через w_2' и w_3' соответственно.

Пусть $\alpha \in \{1, \beta, 3\} \setminus \{c(w_2'), c(w_3')\}$. Положим $c(w) = \alpha$ и обесцветим w_1, w_2 и w_3. Чтобы исключить двуцветный цикл через цепь $w_2' w_2 w_3 w_3'$, возьмём $c(w_2) \notin \{\alpha, c(w_2'), c(w_3')\}$, а затем $c(w_3) \notin \{\alpha, c(w_2), c(w_3')\}$.

Если $\alpha \notin \{c(w_1'), c(w_1'')\}$, то ограничений на раскраску w_1 и v нет. В противном случае положим $c(w_1) \neq c(u)$, а при $\alpha = 1$ дополнительно потребуем $c(v) \neq c(w_1)$. Лемма 11 доказана.

1.2. Завершение доказательства теоремы 1.

1.2.1. Правила перераспределения зарядов. Перераспределим заряды вершин и граней графа G следующим образом.

R0: Каждая 7^+-грань $\ldots uvw \ldots$ такая, что v — краб, а рёбра uv и vw нетреугольные, даёт v:

(i) 1, если v — монстр;

(ii) 1/2, если v — полумонстр.

R1: Каждая 2-вершина получает по 1 от каждой смежной 4^+-вершины.

R2: Если у 4^+-вершины z есть плохой сосед v, лежащий в 3-грани $f = uvw$, то z даёт f:

(i) 1, если v — странный сосед;

(ii) 1/2, если либо v — полустранный сосед, либо f — $(3,3,N)$-грань.

R3: Каждая сильная 3-грань получает 1 от каждой инцидентной вершины.

R4: Каждая слабая 3-грань получает от инцидентной 4-вершины v заряд 2, если v — богатая вершина, и 1 в противном случае.

R5: Каждая слабая 3-грань $f = uvw$ получает от 5-вершины v:

(i) 2, если либо $d(u) = d(w) = 3$, либо v — богатая вершина;

(ii) 3/2, если v — особая либо средняя вершина;

(iii) 1 в остальных случаях.

R6: Каждая слабая 3-грань $f = uvw$ получает 2 от v, если $d(v) \geqslant 6$.

R7: Если монстр или полумонстр v захватывает 6-грань $f = vx_1z_1v^* y_2x_2$, где x_1 — странный сосед вершины v, то v получает:

(i) 1 от v^*, если v — монстр;

(ii) 1/2 от v^*, если v — полумонстр, а $d(v^*) \geqslant 5$;

(iii) 1/2 от y_2, если $d(v^*) = 4$, а $d(y_2) = 5$.

1.2.2. Проверка того, что $\mathrm{ch}^*(f) \geqslant 0$ для любой грани f. Пусть $f = v_1 \dots v_r \in F(G)$. Если $r = 6$, то $\mathrm{ch}^*(f) = \mathrm{ch}(f) = 0$. При $r \geqslant 7$ грань f может давать заряд вершине v_4 по R0, только если оба ребра v_3v_4 и v_4v_5 нетреугольные, а все v_1v_2, v_2v_3 и v_5v_6 — треугольные согласно определению странного и полустранного соседей. Если v_4 получает 1 или 1/2, то мы можем разделить этот заряд поровну соответственно между четырьмя или двумя рёбрами, ближайшими к v_4 в границе грани f. Заметим, что никакое ребро не получит более 1/4, откуда следует, что

$$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant r - 6 - \frac{r}{4} = \frac{3(r-8)}{4},$$

так что при $r \geqslant 8$ мы уже доказали требуемое. При $r = 7$ нетрудно проверить, что f даёт либо 1 не более чем одному монстру, либо по 1/2 не более чем двум полумонстрам, откуда

$$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant 7 - 6 - 2 \times 1/2 = 0.$$

Пусть, наконец, $f = xyz$, так что $\mathrm{ch}(f) = r(f) - 6 = -3$. Мы должны проверить, что f получает суммарный заряд не менее 3 от x, y и z по правилам R2–R6.

Если f сильная, то $\mathrm{ch}^*(f) = -3 + 3 \times 1 = 0$ по R3. Пусть $3 = d(x) \leqslant d(y) \leqslant d(z)$. Если $d(z) \geqslant 6$, то f получает 2 от z по R6 и не менее 1 от y по R4–R6, если $d(y) \geqslant 4$. Ввиду леммы 4 остаётся рассмотреть 3-грани четырёх видов.

Случай 1. $d(y) = 3$. Здесь $d(z) \geqslant 5$ согласно лемме 4, поэтому

$$\mathrm{ch}^*(f) = -3 + 2 \times 1/2 + 2 = 0$$

по R2(ii) в сочетании с R5(i) или R6.

Случай 2. $d(y) = d(z) = 4$. Если f — странная грань, то

$$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant -3 + 3 \times 1 = 0$$

по R2(i) и R4. В противном случае по крайней мере одна из вершин y и z даёт грани f заряд 2 по правилу R4 ввиду леммы 9, а другая — не менее 1 по R4.

Случай 3. $d(y) = 4$, а $d(z) = 5$. Вспомним, что z даёт грани f заряд 1, 3/2 или 2 согласно R5.

Допустим, что $\mathrm{ch}^*(f) < 0$. Тогда y даёт 1 по R4, а z не более 3/2 по R5. Если y — бедная вершина, то грань f не может быть полустранной по определению. Ввиду леммы 10 это означает, что z должна быть богатой, но такая z даёт 2 по R5(i); противоречие.

Пусть теперь y — средняя вершина. Если f является полустранной, то получает $1/2$ от x' по R2(ii), 1 от y по R4 и $3/2$ от z по R5(ii), откуда $\mathrm{ch}^*(f) = 0$; противоречие. Значит, f не полустранная, но тогда согласно лемме 10 вершина z является богатой.

Случай 4. $d(y) = d(z) = 5$. Если вершина y бедная, то z — богатая ввиду леммы 11 и даёт f заряд 2 согласно R5(i). Если же среди вершин y и z нет бедной, то $\mathrm{ch}^*(f) \geqslant -3 + 2 \times 3/2 = 0$ по R5(i, ii).

1.2.3. Проверка того, что $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 0$ для любой вершины v. Пусть $v \in V(G)$. Если $d(v) = 2$, то $\mathrm{ch}^*(v) = -2 + 2 \times 1 = 0$ по R1 и лемме 1. Если $d(v) = 3$, то v не может давать заряд по R2 и R3 ввиду леммы 1, поэтому $\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) = 0$.

Случай 1. $d(v) = 4$. Заметим, что v не может делать передач через захваченную 6-грань по R7 ввиду лемм 5 и 6, и поэтому может отдавать заряд только по правилам R1–R4. Если v нетреугольная, то

$$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant \mathrm{ch}(v) - 2 \times 1 = 0$$

по R1 и R2 ввиду леммы 2. Если $\tau(v) = 2$, то $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2 - 2 \times 1 = 0$ по R3 и R4.

Поэтому пусть $\tau(v) = 1$. Если v богатая, то $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2 - 2 = 0$ по R3 или R4. Если $\nu_2(v) + \beta(v) = 1$, то $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2 - 2 \times 1 = 0$ по R3 и R4.

Пусть $\nu_2(v) + \beta(v) = 2$, тогда по лемме 2 v — краб. Если v не даёт 1 странному соседу по R2(i), то $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2 - 1 - 2 \times 1/2 = 0$ по R2(ii), R3 и R4.

Предположим поэтому, что у v есть странный сосед x_1, а также плохой сосед x_2. В рассмотрении нуждается лишь случай, когда 3-грань $x_2y_2z_2$ получает 1 или $1/2$ от v по R2. Мы знаем из леммы 6, что x_2 не входит в $(3, 3, N)$-грань. Если x_2 является странным соседом, то v получает 1 либо по R7, либо по R0, так что $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 2 - 1 - 2 \times 1 + 1 = 0$ согласно R2(i), R3 и R4.

Пусть, наконец, x_2 является полустранным соседом, т. е. v — полумонстр. Если v захватывает 7^+-грань, то $\mathrm{ch}^*(v) = 2-1-1-1/2+1/2 = 0$ по R2(i), R4 (или R3), R2(ii) и R0 соответственно. Если же v захватывает 6-грань, то верно то же самое с заменой R0 на R7.

Случай 2. $d(v) = 5$. Заметим, что теперь v может отдавать заряд по правилам R1–R3 и R5, а из лемм 4–6 следует, что передачи от v через захваченную 6-грань по R7 возможны, лишь если v является богатой или особой, и при этом $\tau(v) = 2$.

Если $\tau(v) = 0$, то $\nu_2(v)+\beta(v) \leqslant 4$ согласно лемме 3(i), откуда $\mathrm{ch}^*(v) \geqslant \mathrm{ch}(v) - 4 \times 1 = 0$ по R1 и R2.

Пусть $\tau(v)=1$. Если $\nu_2(v)+\beta(v)=3$, то $\tau_{335}(v)=0$ ввиду леммы 3(ii), так что v — бедная, а значит, $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-4\times 1=0$ по R1–R3 и R5(iii). Если $\nu_2(v)+\beta(v)\leqslant 2$, то $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-2-2\times 1=0$ по R1–R3 и R5.

Наконец, пусть $\tau(v)=2$.

Подслучай 2.1. v не участвует в R7. Если $\nu_2(v)=\beta(v)=0$, то $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-2\times 2=0$ по R3 и R5, поэтому пусть $\nu_2(v)+\beta(v)=1$. Ввиду леммы 3(iii) существует 3-грань T при v, не являющаяся $(3,3,5)$-гранью. Если $\tau_{335}(v)=1$, то T получает 1 от бедной вершины v согласно R3 или R5(iii), а $(3,3,5)$-грань при v получает 2 по R5(i), откуда $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-2-2\times 1=0$.

Пусть $\tau_{335}(v)=0$ и v инцидентна 3-граням T_1 и T_2. Если и T_1, и T_2 получают не более $3/2$ от v, то $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-1-2\times 3/2=0$ согласно R1–R3 и R5(ii, iii). Предположим, что T_1 получает 2. Тогда v является богатой вершиной, а T_2 — сильная грань (так как иначе v была бы средней), а значит, $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-2-2\times 1=0$ по R1–R3 и R5(i).

Подслучай 2.2. Вершина v играет роль вершин v^* или y_2 в правиле R7. Мы переходим на обозначения из R7 и доказываем, что: (*) $\mathrm{ch}^*(v^*)\geqslant 0$ при $d(v^*)=5$ и (**) $\mathrm{ch}^*(y_2)\geqslant 0$, если $d(y_2)=5$, а $d(v^*)=4$.

(*) Если v^* даёт 1 монстру, который захватил 6-грань, согласно R7(i), то обе 3-грани $z_1z_1'v^*$ и $v^*y_2''y_2$ при v^* являются сильными ввиду леммы 5. Отсюда следует, что $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-4\times 1=0$ по R1–R3 и R7(i).

Пусть v^* даёт $1/2$ своему полумонстру по R7(ii). Тогда 3-грань $z_1z_1'v^*$ является сильной согласно лемме 5, а значит, получает 1 от v^* по R3. Пусть $\nu_2(v^*)+\beta(v^*)=1$. Тогда v^* является особой, если 3-грань $T=v^*y_2''y_2$ — слабая, и богатой в противном случае. Поэтому T получает от v^* не более $3/2$ по R3 и R5, откуда $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-1-1/2-1-3/2=0$. Если $\nu_2(v^*)=\beta(v^*)=0$, то $\mathrm{ch}^*(v)\geqslant 4-1-1/2-2>0$.

(**) Здесь y_2 даёт $1/2$ полумонстру, захватившему 6-грань, согласно R7(iii). Заметим, что $\nu_2(y_2)+\beta(y_2)=1$ по определению полустранного соседа x_2. Кроме того, 3-грань $v^*y_2''y_2$ при y_2 является сильной ввиду леммы 6(ii), а другая 3-грань при y_2 — полустранная, а значит, y_2 — особая вершина. Отсюда следует, что $\mathrm{ch}^*(y_2)=4-2\times 1-1/2-3/2=0$ по R1–R3, R5(ii) и R7(iii).

Случай 3. $d(v)=d\geqslant 6$. Пусть $f_1,f_2,\ldots$ — грани при v в циклическом порядке. Через d_{ss} обозначим число передач в 1 от v на 6-грани, захваченные монстрами, согласно R7(i). Мы знаем из леммы 5, что такая передача на 6-грань f_2 бывает, лишь если и f_1, и f_3 — сильные 3-грани. Пусть d_{sw} — число полумонстров, получающих $1/2$ от v через 6-грани по

R7(ii). Ввиду леммы 5 такая передача в 1/2 через f_2 происходит, лишь когда среди f_1 и f_3 есть сильная грань. Отсюда $d_{ss} + 1/2d_{sw} \leqslant \tau_s(v)$.

Поскольку v также отдаёт не более 1 по любому нетреугольному ребру согласно R1 и R2, заряд 2 каждой инцидентной слабой 3-грани по R6, а также 1 каждой инцидентной сильной 3-грани по R3, то

$$\mathrm{ch}^*(v) = 2d-6-\tau_s(v)-(d-2\tau_s(v)-2\tau_w(v))\times 1-2\tau_w(v)-\tau_s(v) = d-6 \geqslant 0.$$

Итак, после перераспределения зарядов согласно правилам R0–R7 заряды всех вершин и граней графа G неотрицательны, что противоречит (1). Теорема 1 доказана.

Автор благодарит университет Бордо-1 за приглашение на первую половину 2009 г. и лично Андре Распо за гостеприимство, а А. О. Иванову и А. Н. Глебова — за многочисленные рекомендации по улучшению первоначального текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В.** Доказательство гипотезы Б. Грюнбаума об ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов // Докл. АН СССР. — 1976. Т. 231. — С. 18–20.
2. **Бородин О. В.** Ациклическая предписанная 3-раскрашиваемость плоских графов, не содержащих циклов длины от 4 до 12 // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. Т. 16, № 5. — С. 26–33.
3. **Бородин О. В.** Ациклическая 4-раскрашиваемость плоских графов без циклов длины 4 и 6 // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. Т. 16, № 6. — С. 3–11.
4. **Косточка А. В.** Ациклическая 6-раскраска плоских графов // Методы дискрет. анал. — 1976. — Вып. 28. — С. 40—56.
5. **Abbott H. L., Zhou B.** On small faces in 4-critical graphs // Ars Comb. — 1991. — Vol. 32. — P. 203–207.
6. **Albertson M. O., Berman D.** Every planar graph has an acyclic 7-coloring // Israel J. Math. — 1977. — Vol. 28. — P. 169—177.
7. **Borodin O. V.** On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. — 1979. — Vol. 25. — P. 211–236.
8. **Borodin O. V.** To the paper of H. L. Abbott and B. Zhou on 4-critical planar graphs // Ars Comb. — Vol. 43. — P. 191–192.
9. **Borodin O. V.** Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings // J. Graph Theory. — 1996. — Vol. 21, N 2. — P. 183–186.
10. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.** Acyclic colorings of planar graphs with large girth // J. London Math. Soc. — 1999. — Vol. 60. — P. 344–352.

11. **Borodin O. V., Glebov A. N., Raspaud A., Salavatipour M. R.** Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable // J. Comb. Theory. Ser. B. — 2005. — Vol. 93. — P. 303–311.
12. **Borodin O. V., Glebov A. N., Montassier M., Raspaud A.** Planar graphs without 5- and 7-cycles and without adjacent triangles are 3-colorable // J. Comb. Theory. Ser. B. — 2009 — Vol. 99. — P. 668–673.
13. **Hell P., Nešetřil J.** Graphs and homomorphisms // Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol. 28. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. — 244 p.
14. **Hocquard H., Montassier M.** Every planar graph without cycles of lengths 4 to 12 is acyclically 3-choosable // Inf. Process. Lett. — 2009. — Vol. 109, N 21–22. — P. 1193–1196.
15. **Grötzsch H.** Ein Dreifarbenzatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel // Wiss. Z. Martin–Luther–Univ. Halle–Wittenberg Math.–Natur. Reihe 8. — 1959. — P. 109–120.
16. **Grünbaum B.** Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. — 1973. — Vol. 14, N 3. — P. 390–408.
17. **Jensen T.R., Toft B.** Graph coloring problems. — New York: Wiley Interscience, 1995. — 245 p.
18. **Kostochka A.V., Mel'nikov L.S.** Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings // Discrete Math. — 1976. — Vol. 14. — P. 403–406.
19. **Mitchem J.** Every planar graph has an acyclic 8-coloring // Duke Math. J. — 1974. — Vol. 14. — P. 177—181.
20. **Montassier M., Raspaud A., Wang W.** Acyclic 4-choosability of planar graphs without cycles of specific lengths. Topics in discrete mathematics // Algorithms Comb. Vol. 26. — Berlin: Springer-Verl., 2006. — P. 473–491.
21. **Sanders D. P., Zhao Y.** A note on the three color problem // Graphs Comb. — 1995. — Vol. 11. — P. 91–94.
22. **Steinberg R.** The state of the three color problem, Quo Vadis, Graph Theory? J. Gimbel, J. W. Kennedy & L. V. Quintas (eds.) // Ann. Discrete Math. — 1993. — Vol. 55. — P. 211–248.
23. **Xu B.** On 3-colorable plane graphs without 5- and 7-cycles // J. Comb. Theory. Ser. B. — 2006. — Vol. 96. — P. 958–963.

Бородин Олег Вениаминович,
e-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

Статья поступила
17 июня 2009 г.
Переработанный вариант —
11 февраля 2010 г.