ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2010. Том 17, № 2. С. 46–56

УДК 519.173.1

О СВЯЗИ СВИТЧИНГОВОЙ РАЗДЕЛИМОСТИ ГРАФА И ЕГО ПОДГРАФОВ *)

Д. С. Кротов

Аннотация. Граф порядка $n \geqslant 4$ называется *свитчингово разделимым*, если его сумма по модулю два с некоторым полным двудольным графом на том же множестве вершин разделена на два не связанных между собой подграфа на двух или более вершинах. Доказано, что если удалением одной или двух вершин из данного графа мы получаем только свитчингово разделимые подграфы, то и сам граф свитчингово разделим. С другой стороны, существует граф любого нечётного порядка, который сам не является свитчингово разделимым, а удаление любой вершины приводит к свитчингово разделимому подграфу. Показана связь с аналогичными фактами для разделимости булевых функций и n-арных квазигрупп.

Ключевые слова: два-граф, приводимость, разделимость, свитчинг графа, свитчинг Зейделя, связность графа, n-арная квазигруппа.

Введение

В статье рассматриваются только простые графы (без кратных дуг и петель) и индуцированные подграфы. Пусть U — некоторое множество вершин графа $G = (V, E)$. *Свитчингом*, или *U-свитчингом*, графа G называется граф $G_U = (V, E \triangle E_{U,V\setminus U})$, где $K_{U,V\setminus U} = (V, E_{U,V\setminus U})$ — полный двудольный граф с долями U, $V \setminus U$ (для общности будем считать, что одна из долей может быть пустой). Легко убедиться, что отношение «G' есть свитчинг G» является эквивалентностью. Множество свитчингов одного графа называется *свитчинговым классом*. Известно взаимно однозначное соответствие между свитчинговыми классами и так называемыми два-графами [6].

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08—01—00673, 10–01–00424).

Множество W вершин графа $G=(V,E)$ назовём *отделимым*, если $2\leqslant |W|\leqslant |V|-2$ и некоторый свитчинг графа не содержит рёбер, соединяющих W с $V\setminus W$. Граф порядка n назовём *свитчингово разделимым*, если существует отделимое множество вершин. Далее слово «свитчингово» будем опускать.

Замечание 1. Если граф разделим, то все его свитчинги, а также его дополнение разделимы. Все графы порядка 4 разделимы.

Целью настоящей статьи является изучение взаимоотношений между разделимостью графа и разделимостью его подграфов. Мотивацией исследования является связь с разделимостью n-арных квазигрупп и булевых функций, описанная в разд. 3. В разд. 1 и 2 докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если все подграфы порядков $n-1$ и $n-2$ графа G порядка n разделимы, то G — разделимый граф.*

Теорема 2. *Для любого нечётного n существует неразделимый граф порядка n, у которого все подграфы порядка $n-1$ разделимы.*

Вопрос с чётным порядком остаётся открытым, однако полным перебором для порядков 6 и 8 таких графов не найдено.

Гипотеза. Из любого неразделимого графа чётного порядка удалением одной вершины можно получить неразделимый подграф.

Основной результат можно переформулировать следующим образом.

Следствие 1. *Из любого неразделимого графа удалением одной или двух вершин можно получить неразделимый подграф, причём удаления одной вершины не всегда достаточно.*

Результаты частично докладывались на IX Международном семинаре «Дискретная математика и её приложения», посвящённом 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2007 г.)

1. Доказательство теоремы 1

Пусть χ — максимальный порядок неразделимого собственного подграфа графа G, K — множество вершин некоторого такого подграфа. По условию $3\leqslant\chi\leqslant n-3$.

Сначала рассмотрим случай $\chi>3$. Это неравенство будет неявно использоваться в местах, где выводится противоречие с неразделимостью K. Для четырёх вершин a, b, c, d графа G через $N(a,b;c,d)$ обозначим число рёбер графа G среди $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$.

Лемма 1. *Множество вершин W графа G отделимо тогда и только тогда, когда для любых попарно различных a, b из W и c, d из $V \setminus W$ число $N(a, b; c, d)$ чётно.*

Доказательство. Достаточность. Пусть W отделимо, причём множество вершин U задаёт отделяющий свитчинг. Для любых попарно различных a, b из W и c, d из $V \setminus W$ среди рёбер $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$ графу G принадлежат в точности те же рёбра, что и полному двудольному графу $K_{U,V \setminus U}$. Легко убедиться, что в полном двудольном графе число рёбер, соединяющих две пары вершин, всегда чётно.

Необходимость. Рассмотрим две несмежные вершины a из W и c из $V \setminus W$ (если таких нет, то W-свитчинг отделяет множество W). Введём четыре множества:

$$W_0 = \{b \in W \mid \{b, c\} \in E\}, \qquad V_0 = \{d \in V \setminus W \mid \{a, d\} \in E\},$$

$$W_1 = \{b \in W \mid \{b, c\} \notin E\}, \qquad V_1 = \{d \in V \setminus W \mid \{a, d\} \notin E\}.$$

Утверждаем, что b из W_i и d из V_j соединены ребром, если и только если $i + j = 1$. Действительно, если $b = a$ или $d = c$, то требуемое следует непосредственно из определений множеств W_i и V_j; в противном случае — из чётности $N(a, b; c, d)$. Таким образом, взяв $U = W_0 \cup V_0$, получаем U-свитчинг без рёбер, соединяющих W и $V \setminus W$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любых попарно различных вершин a, b, c, d, e графа G из чётности $N(a, b; c, d)$ и $N(a, b; c, e)$ следует чётность $N(a, b; d, e)$.*

Доказательство. Имеем

$$N(a, b; d, e) = N(a, b; c, d) + N(a, b; c, e) - 2|\{\{a, c\}, \{b, c\}\} \cap E|.$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим произвольную вершину v не из K. По определению K граф $G|_{K \cup \{v\}}$ разделим, т. е. v принадлежит некоторому отделимому в $G|_{K \cup \{v\}}$ множеству вершин. Если это множество имеет больше двух вершин, то граф $G|_K$ также разделим, что противоречит определению K. Поэтому для любой вершины $v \notin K$ найдётся вершина $u = u(v) \in K$ такая, что $\{v, u\}$ отделимо в $G|_{K \cup \{v\}}$. Причём $u(v)$ определена однозначно (если $\{v, u\}$ и $\{v, u'\}$ отделимы и $u \neq u'$, то из лемм 1 и 2 получаем отделимость $\{v, u, u'\}$; противоречие с неразделимостью $G|_K$).

Предложение 1. *Число $N(v, u(v); v', u(v'))$ чётно для любых вершин $v, v' \notin K$ таких, что $u(v) \neq u(v')$.*

Доказательство. Из условия следует, что подграф $G|_{K\cup\{v,v'\}}$ разделим. Пусть v принадлежит множеству вершин M, отделимому в этом подграфе. Рассмотрим подслучаи.

1. $|M\cap K| = 0$, т. е. $M = \{v, v'\}$. По лемме 1 для любых $c, d \in K\setminus\{u(v)\}$ число $N(v, v'; c, d)$ чётно. Это же верно для $N(v, u(v); c, d)$, поскольку $\{v, u(v)\}$ отделимо в $G|_{K\cup\{v\}}$. По лемме 2 число $N(v', u(v); c, d)$ также чётно, откуда следует отделимость $\{v, v', u(v)\}$ в $G|_{K\cup\{v,v'\}}$ и отделимость $\{v', u(v)\}$ в $G|_{K\cup\{v'\}}$; противоречие с однозначностью $u(v')$.

2. $|M \cap K| = 1$. Если $M = \{v, u(v)\}$, то утверждение предложения 1 следует из леммы 1. Любой другой случай противоречит однозначности $u(v)$ или $u(v')$.

3. $2 \leqslant |M \cap K| \leqslant \chi - 2$; противоречие с неразделимостью $G|_K$.

4. $|M \cap K| = \chi - 1$. Единственной вершиной из $K \setminus M$ может быть только $u(v')$, и утверждение предложения 1 следует из леммы 1.

Предложение 1 доказано.

Рассмотрим некоторую вершину w из K с непустым прообразом $u^{-1}(w)$. Обозначим $W = u^{-1}(w) \cup \{w\}$ и покажем, что это множество отделимо. По лемме 1 это эквивалентно чётности $N(a, b; c, d)$ для любых попарно различных вершин a, b из W и c, d из $V \setminus W$. По лемме 2 достаточно рассмотреть случай $b = w = u(a)$. Если c и d принадлежат K, то нужная чётность следует из определения $u(a)$; если $d = u(c)$ — то из предложения 1. Остальные случаи выводятся из этих двух посредством леммы 2. Таким образом, разделимость G в случае $\chi > 3$ доказана.

Рассмотрим случай $\chi = 3$. Без потери общности можно считать, что граф G содержит некоторую изолированную вершину o (в противном случае выберем произвольную вершину в качестве o и рассмотрим свитчинг по множеству смежных с ней вершин).

Предложение 2. *Граф G не содержит подграфа вида*

$$(\{o, a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\})\,.$$

Доказательство. Существование такого подграфа противоречило бы условию теоремы в силу его неразделимости. Предложение 2 доказано.

Две несовпадающие вершины назовём *парными*, если любая вершина, смежная с одной из них, смежна и с другой.

Предложение 3. *Если v, w — парные вершины, то $\{v, w\}$ — отделимое множество.*

Доказательство. Пусть U — множество вершин, смежных с v и w. Тогда U-свитчинг графа G не содержит рёбер, соединяющих v или w с остальными вершинами. Предложение 3 доказано.

Таким образом, чтобы показать разделимость графа G, достаточно найти две парные вершины. Рассмотрим максимальную последовательность вершин $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_t)$, удовлетворяющую следующему свойству:

$(*)$ вершины u_i и u_j, $1 \leqslant i < j \leqslant t$, смежны, если и только если i нечётно.

Если $t = 1$, то граф пустой и доказывать нечего. Пусть $t > 1$. Покажем от противного, что вершины u_{t-1} и u_t парные. Предположим, что это не так, тогда найдётся вершина w, смежная ровно с одной из u_{t-1}, u_t, причём из $(*)$ следует, что w не принадлежит $\bar{u}$. Мы покажем, что в этом случае последовательность $\bar{u}$ не максимальна.

Сначала рассмотрим случай, когда t нечётно. Без потери общности можно считать, что w смежна с u_t (в противном случае мы можем переставить местами u_{t-1} и u_t, при этом свойство (*) сохранится). Заметим, что

для каждого нечётного i, меньшего t, вершины u_i и w смежны, иначе вершины o, u_{t-1}, u_i, u_t, w порождают запрещённый подграф (предложение 2);

для каждого чётного i, меньшего $t-1$, вершины u_i и w несмежны, иначе вершины o, u_i, w, u_{t-2}, u_{t-1} порождают запрещённый подграф (предложение 2).

Таким образом, последовательность $(u_1, u_2, \dots, u_t, w)$ опровергает максимальность $\bar{u}$ среди последовательностей, удовлетворяющих свойству $(*)$. Полученное противоречие доказывает, что вершины u_{t-1} и u_t парные.

Случай чётного t рассматривается аналогично. Теорема 1 доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть n нечётно. Обозначим через G_n граф с множеством вершин $V_n = \{v_i\}_{i=0}^{n-1}$ и рёбрами $\{v_i, v_{i+j}\}$, $j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ (здесь и далее вычисления с индексами будем производить по модулю n).

Предложение 4. *Граф G_n неразделим.*

Доказательство. Обозначим $m = \lfloor (n+1)/4 \rfloor$ и $u_i = v_{im}$. Поскольку $n = 4m \pm 1$, числа m и n взаимно просты, откуда $\{u_i\}_{i=0}^{n-1} = V_n$. Теперь рассмотрим произвольное подмножество $A \subset V_n$ мощности не меньше 2 и не больше $n-2$ и покажем, что оно неотделимо (эквивалентно, $V_n \setminus A$ неотделимо). Имеет место один из следующих двух случаев.

1. Для некоторого i либо $u_i, u_{i+1} \in A$, $u_{i+2}, u_{i+3} \notin A$, либо $u_i, u_{i+1} \notin A$, $u_{i+2}, u_{i+3} \in A$. Тогда $N(u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}) = 1$ (рис. 1), и по лемме 1 множество A неотделимо.

2. Для некоторого i либо $u_i, u_{i+2} \in A$, $u_{i+1} \notin A$, либо $u_i, u_{i+2} \notin A$, $u_{i+1} \in A$. Рассмотрим для примера второй подслучай. Заметим, что любая вершина u_j, отличная от u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, смежна ровно с одной из u_i, u_{i+2} (см. рис. 1). Взяв такую u_j из A, получаем, что $N(u_i, u_{i+2}; u_{i+1}, u_j)$ равно 1 или 3 в зависимости от $n \bmod 4$, и по лемме 1 множество A неотделимо.

По определению если любое множество вершин неотделимо, то граф является неразделимым. Предложение 4 доказано.

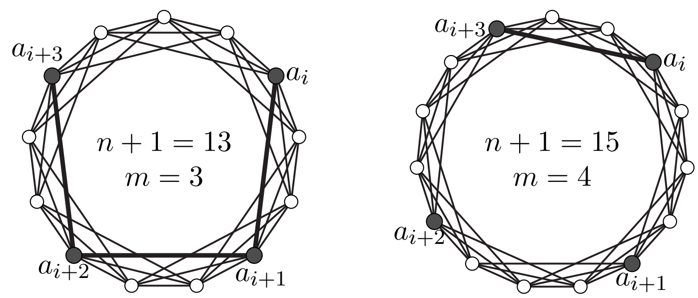

Рис. 1. Примеры графа G_n, случаи $n \equiv 1 \bmod 4$ и $n \equiv 3 \bmod 4$

Предложение 5. *Удаление любой вершины в графе G_n приводит к разделимому графу.*

Доказательство. В силу симметрии можно считать, что удалили вершину v_0. Легко видеть (см. рис. 1), что все оставшиеся вершины, кроме v_m и v_{-m}, делятся на смежные с v_m и смежные с v_{-m}. Отсюда следует, что множество $\{v_m, v_{-m}\}$ отделимо (для соответствующего U-свитчинга нужно взять множество U, состоящее из v_m и всех вершин, смежных с v_{-m}). Предложение 5 доказано.

Таким образом, теорема 2 доказана. Заметим, что в силу теоремы 1 в графе G_n есть неразделимый подграф порядка $n-2$. Аналогично доказательству предложения 4 можно показать, что удаление вершин v_i и v_{i+m} приводит к неразделимому подграфу.

3. Графы, булевы функции, квазигруппы

В этом разделе кратко обсудим связь разделимости графов с аналогичным свойством для булевых функций и n-арных квазигрупп. Подграфам графа соответствуют так называемые *ретракты* n-арных ква-

зигрупп и подфункции булевых функций, которые получаются фиксацией некоторых аргументов. В терминах ретрактов и подфункций для n-арных квазигрупп и булевых функций верны теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 (последняя известна для n-арных квазигрупп только в случае, когда порядок кратен 4). Причём, учитывая, что по графу при помощи квадратичного многочлена можно построить булеву функцию и затем n-арную квазигруппу порядка 4, теорема 1 является, вообще говоря, следствием соответствующей теоремы для квазигрупп [2, 4], а из теоремы 2, наоборот, следует существование аналогичного примера в n-арных квазигруппах порядка 4 [1].

3.1. Расширенные булевы функции. *Расширенной булевой функцией* назовём частичную булеву функцию, заданную на наборах с чётным числом единиц. Заметим, что расширенную булеву функцию можно интерпретировать как обычную булеву функцию от на единицу меньшего числа аргументов. Расширенную булеву функцию f от n аргументов назовём *разделимой*, если она представима в виде суммы двух булевых функций f' и f'' от $n-2$ или меньшего числа аргументов, причём наборы аргументов f' и f'' не перекрываются (ограничение $n-2$ достаточно естественно: в этом случае булевы функции в разложении могут быть заданы меньшим числом значений в точках, чем сама расширенная булева функция). *Степенью* расширенной булевой функции назовём минимальную степень многочлена (над полем GF(2)), с помощью которого она может быть представлена. Под термином «квадратичный» будем подразумевать «степени не больше двух». *Графом квадратичного многочлена* назовём граф на множестве аргументов, у которого две вершины смежны тогда и только тогда, когда произведение соответствующих переменных входит в многочлен.

Лемма 3. *Множество графов, соответствующих представлениям данной квадратичной расширенной булевой функции в виде квадратичного полинома, образует свитчинговый класс.*

Доказательство. Любая (в частности, квадратичная) расширенная булева функция f от n аргументов, будучи булевой функцией от первых $n-1$ своих аргументов, единственным образом представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = p(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где p — многочлен.

Любой многочлен r от n переменных $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ однозначно пред-

ставим в виде

$$q(x_1, \ldots, x_{n-1}) + (x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n)l(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где q и l — многочлены от $x_1, \ldots, x_{n-1}$, причём если r квадратичный, то q квадратичный и l линейный. Поскольку $x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n = 0$ везде на области определения расширенной булевой функции, многочлен q совпадает у всех многочленов, представляющих одну и ту же расширенную булеву функцию. Легко убедиться, что добавление $(x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n)l(x_1, \ldots, x_{n-1})$ с линейным l приводит к свитчингу соответствующего графа, точнее, к U-свитчингу, где U — множество переменных, от которых l существенно зависит. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Квадратичная расширенная булева функция разделима тогда и только тогда, когда разделимы графы квадратичных многочленов, представляющих эту функцию.*

Доказательство. Из разделимости графа по определению следует разделимость булевой функции, представимой квадратичным многочленом с соответствующим графом.

Для доказательства обратного с учётом предыдущей леммы достаточно показать, что для разделимой квадратичной расширенной булевой функции f элементы её некоторого разложения f' и f'' из определения разделимости также квадратичны. Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f'(\bar{y}) + f''(\bar{z}),$$

где $\bar{y}$ и $\bar{z}$ — непересекающиеся наборы переменных из $x_1, \ldots, x_n$. Представим $f'(\bar{y}) + f''(\bar{z})$ как всюду определённую булеву функцию в виде

$$f'(\bar{y}) + f''(\bar{z}) = q(x_1, \ldots, x_{n-1}) + (x_1 + \cdots + x_n)l(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Поскольку f квадратична, q также квадратична (см. доказательство леммы 3). Разобьём полином l в сумму двух полиномов $l_1 + l_2$, где l_1 линейный, а l_2 составлен из одночленов степени 2 и выше. Имеем

$$f'(\bar{y}) + f''(\bar{z}) = q(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n} x_i l_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n} x_i l_2(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Легко видеть, что последнее слагаемое состоит из одночленов степени не меньше 3 (действительно, если l_2 содержит одночлен $x_i x_j$, то в произведении с $x_i + x_j$ он даст нуль, а произведение с остальными переменными даст одночлены третьей степени). Таким образом, отбрасывание этого слагаемого равносильно отбрасыванию одночленов степени больше двух в полиномиальном представлении f' и f'', после чего имеем

$$g'(\bar{y}) + g''(\bar{z}) = q(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n} x_i l_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

для некоторых квадратичных функций g' и g''. Очевидно, что $g'(\bar{y})+g''(\bar{z})$ также равны расширенной булевой функции f на всей её области определения, т. е. мы получили квадратичное представление f, которому соответствует разделимый граф. По лемме 3 все другие квадратичные представления также соответствуют разделимым графам. Лемма 4 доказана.

3.2. n-Арные квазигруппы. Пусть Σ — некоторое множество. n-Арная операция $Q : \Sigma^n \to \Sigma$ называется *n-арной квазигруппой* порядка $|\Sigma|$, если в уравнении $x_0 = Q(x_1, \ldots, x_n)$ значения любых n переменных однозначно задают значение оставшейся переменной. (Строго говоря, n-арной квазигруппой называется пара (Σ, Q), наше определение — общепринятое упрощение терминологии.) Из определения следует, что n-арная квазигруппа обратима в каждой позиции, в случае конечного порядка это свойство можно взять за определение. Введём обозначение $Q\langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle \Leftrightarrow x_0 = Q(x_1, \ldots, x_n)$ для предикатной записи n-арной квазигруппы; часто предикатная запись удобнее функциональной ввиду симметричности относительно всех переменных. Если в предикате $Q\langle \ldots \rangle$ зафиксировать значения некоторых $m \in \{1, \ldots, n\}$ аргументов, то полученный $(n{+}1{-}m)$-местный предикат соответствует $(n{-}m)$-арной квазигруппе, которая называется *ретрактом* квазигруппы Q. n-Арная квазигруппа называется *разделимой*, если она представима в виде бесповторной суперпозиции двух квазигрупп меньшей арности, где порядок переменных в суперпозиции может отличаться от первоначального.

Замечание 2. В литературе также известен термин «приводимая n-арная квазигруппа», который чаще относится к представимости в виде суперпозиции с тем же порядком переменных. В англоязычной литературе перевод слова «разделимая» сильно перегружен, поэтому разделимые квазигруппы также называют «перестановочно приводимыми».

Пусть $\Sigma = \{[0,0], [0,1], [1,0], [1,1]\}$ — множество двоичных пар и λ —

некоторая расширенная булева функция от $n+1$ переменных. Предикат

$$Q_\lambda\Big\langle[x_0,y_0],\dots,[x_n,y_n]\Big\rangle \Leftrightarrow \begin{cases}|x_0+\dots+x_n| = 0,\\ |y_0+\dots+y_n| = \lambda(x_0,\dots,x_n)\end{cases}$$

соответствует n-арной квазигруппе Q (сложение производится по модулю 2), эта конструкция является частным случаем сплетения n-арных квазигрупп, в данном случае тривиальных квазигрупп порядка 2. (Термин «сплетение» для n-арных квазигрупп не соответствует сплетению групп, поэтому следует быть осторожным при его использовании, дабы избежать возможных разночтений.)

Лемма 5 [1]. *Разделимость n-арной квазигруппы Q_λ эквивалентна разделимости расширенной булевой функции λ.*

Таким образом, разделимость графов тесно связана с разделимостью n-арных квазигрупп, по крайней мере в рамках следующей конструкции: по графу порядка $n+1$ мы строим квадратичную расширенную булеву функцию λ (ребру соответствует одночлен степени 2, линейная часть выбирается произвольно); потом строим n-арную квазигруппу Q_λ порядка 4; далее можем построить n-арную квазигруппу порядка $4k$ для любого k, в том числе бесконечного, при помощи прямого произведения с n-арной квазигруппой $P(x_1,\dots,x_n) = x_1\star\dots\star x_n$, где $\star$ — коммутативная групповая операция.

При этом разделимость каждого звена цепочки эквивалентна разделимости всех остальных звеньев. Более того, разделимость подграфа эквивалентна разделимости соответствующих подфункций расширенной булевой функции и ретрактов n-арной квазигруппы. Тем самым теорема 1 — это следствие приведённой ниже теоремы 3, а приведённая ниже теорема 4 следует из теоремы 2. В защиту разд. 1 и 2 заметим, что содержащиеся в них доказательства значительно проще имеющихся доказательств для квазигрупп.

В заключение сформулируем известные теоремы для n-арных квазигрупп, связанные с рассмотренными в настоящей работе теоремами 1 и 2. Для n-арной квазигруппы Q обозначим через $\chi(Q)$ наибольшую арность её неразделимого ретракта.

Теорема 3. *Если $\chi(Q) < n-2$, то n-арная квазигруппа Q разделима. Если $\chi(Q) = n-2$ и порядок Q — простое число, то Q разделима.*

Случай $2 < \chi(Q) < n-2$ доказан в [2], случай $\chi(Q) = 2$ для порядка 4 — в [4], общий случай $\chi(Q) = 2$ и случай $\chi(Q) = n-2$ для простого порядка — в [5]. Теорема 3 полезна при индуктивной характеризации

классов n-арных квазигрупп, например, при доказательстве того, что любая n-арная квазигруппа порядка 4 полулинейна (т. е. эквивалентна некоторой Q_λ) или разделима, использован тот факт, что минимальный потенциальный контрпример обязан иметь неразделимый полулинейный $(n-1)$- или $(n-2)$-арный ретракт.

Теорема 4. *Для любого чётного n и любого k существует неразделимая n-арная квазигруппа Q порядка $4k$ такая, что $\chi(Q) = n-2$* [1]. *Для любого $n \geqslant 3$ и $k \geqslant 4$ существует неразделимая n-арная квазигруппа порядка k с $\chi(Q) = n-1$* [3].

Теоретически неисследованными на предмет существования неразделимой n-арной квазигруппы остались следующие случаи:

$\chi(Q) = n-2$, нечётное n (связан с гипотезой, сформулированной во введении), непростой порядок (для простого — не существует);

$\chi(Q) = n-2$, произвольное n, непростой порядок, не кратный 4;

Известен пример неразделимой 4-арной квазигруппы Q порядка 6 с $\chi(Q) = 2$.

Автор благодарит А. Н. Глебова, В. Н. Потапова, А. В. Пяткина и анонимного рецензента за интерес к данной работе и замечания, благодаря которым была обнаружена неполнота доказательства теоремы 1 в предварительной версии статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Krotov D. S.** On irreducible n-ary quasigroups with reducible retracts // Eur. J. Comb. — 2008. — Vol. 29, N 2. — P. 507–513.
2. **Krotov D. S.** On reducibility of n-ary quasigroups // Discrete Math. — 2008. — Vol. 308, N 22. — P. 5289–5297.
3. **Krotov D. S., Potapov V. N., Sokolova P. V.** On reconstructing reducible n-ary quasigroups and switching subquasigroups // Quasigroups Relat. Syst. — 2008. — Vol. 16, N 1. — P. 55–67.
4. **Krotov D. S., Potapov V. N.** n-Ary quasigroups of order 4 // SIAM J. Discrete Math. — 2009. — Vol. 23, N 2. — P. 561–570.
5. **Krotov D. S., Potapov V. N.** On connection between reducibility of an n-ary quasigroup and that of its retracts // Electronic preprint, arXiv:0801.0055. Submitted.
6. **Spence E.** Two-graphs // CRC Handbook of combinatorial designs. — Boca Raton, FL: CRC Press, 1996. — P. 686—694.

Кротов Денис Станиславович,
e-mail: krotov@math.nsc.ru

Статья поступила
1 октября 2009 г.