ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2010. Том 17, № 2. С. 57–78

УДК 518.9

РЕШЕНИЕ КООПЕРАТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Я. Б. Панкратова

Аннотация. В статье рассматривается неантагонистическая игра группового преследования с m преследователями и одним убегающим. Предложен новый подход к решению такого рода игр, который заключается в построении кооперативной формы игры преследования. Такой подход позволяет находить кооперативные решения игры, что является существенным упрощением поиска решения в дифференциальных играх преследования. В работе построено некооперативное решение рассматриваемой игры в форме равновесия по Нэшу. Вместе с тем показано, что кооперативное решение — C-ядро — данной игры непусто, и представлено его аналитическое описание. Доказано, что C-ядро данной игры динамически устойчиво. Проведен сравнительный анализ построенных решений игры.

Ключевые слова: игра группового преследования, равновесие по Нэшу, кооперативная дифференциальная игра, C-ядро, динамическая устойчивость.

Введение

Процесс преследования представляет собой типичную конфликтную ситуацию. Если в процессе преследования участвуют только два игрока, то такая ситуация может быть формализована как классическая дифференциальная игра преследования.

Антагонистические дифференциальные игры преследования впервые подробно описаны в монографии Айзекса [8]. Фундаментальные результаты в области теории антагонистических дифференциальных игр преследования получены отечественными исследователями Л. С. Понтрягиным, Н. Н. Красовским, Э. Г. Альбрехтом, О. А. Малафеевым, А. А. Меликяном, Е. Ф. Мищенко, Л. А. Петросяном, Б. Н. Пшеничным, Г. В. Томским, А. И. Субботиным, С. В. Чистяковым и др. В случае, когда больше двух игроков участвуют в игре и интересы игроков не строго противоположны, более естественно рассматривать такую игру как неантагонистическую.

В статье рассматривается неантагонистическая игра группового преследования с m преследователями и одним убегающим. Исследованию игр из указанного класса посвящены работы [3, 7, 10, 11]. Предложен новый подход к решению неантагонистических игр группового преследования, который заключается в построении кооперативной формы игры преследования с побочными платежами. Такой подход позволяет находить кооперативные решения игры преследования, что является существенным упрощением поиска решения в таких играх.

Статья имеет следующую структуру. Формализация дифференциальной неантагонистической игры преследования с одним убегающим и m преследователями приводится в разд. 1. В качестве решения такой игры рассматривается равновесие по Нэшу [9] — некооперативное решение. Разд. 2 посвящён построению соответствующей кооперативной игры преследования $n = m + 1$ лиц $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$. В качестве кооперативного решения рассматривается C-ядро [13]. Существование непустого C-ядра игры $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ доказывается в разд. 3. Кроме того, исследуется динамическая устойчивость [4, 5] решения кооперативной игры. В разд. 4 доказывается, что C-ядро игры $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ динамически устойчиво. Приводятся два примера, иллюстрирующие основные результаты статьи.

1. Дифференциальная игра преследования с одним убегающим и m преследователями

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_m$ — множество преследователей, а E — убегающий. Преследование происходит на плоскости. Игроки имеют ограниченные по модулю скорости $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и β соответственно. Кроме того, $\beta < \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta = \mathrm{const}$. Игра начинается в момент времени $t_0 = 0$ из положений $P_1^0 = x_1^0, \ldots, P_m^0 = x_m^0, E^0 = z^0$, причём предполагается, что $x_1^0 \neq x_2^0 \neq \ldots \neq x_m^0 \neq z^0$. Каждый игрок выбирает направление своего движения (вектор скорости) и имеет возможность его изменить в каждый последующий момент t. Таким образом, множества допустимых управлений игроков имеют вид

$$
\begin{aligned}
&U_{P_j} = \big\{\, \mathfrak{u}_{P_j} = \big(u_{P_j}^1, u_{P_j}^2\big) \mid \big(u_{P_j}^1\big)^2 + \big(u_{P_j}^2\big)^2 \leqslant \alpha_j^2 \big\}, \quad j = \overline{1, m},\\
&U_E = \big\{\, \mathfrak{u}_E = \big(u_E^1, u_E^2\big) \mid \big(u_E^1\big)^2 + \big(u_E^2\big)^2 \leqslant \beta^2 \big\}.
\end{aligned}
$$

Движение игроков описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_j = \mathfrak{u}_{P_j}, \quad \mathfrak{u}_{P_j} \in U_{P_j}, \qquad j = \overline{1, m},\\
&\dot{z} = \mathfrak{u}_E, \qquad \mathfrak{u}_E \in U_E,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_1^0,\ \ldots,\ x_m(0) = x_m^0,\ z(0) = z^0. \tag{2}$$

Будем рассматривать случай полной информации [6], т. е. игрокам в каждый момент времени t при выборе $\mathfrak{u}_{P_j}\big(x_1^t, \ldots, x_m^t, z^t, \mathfrak{u}_E^t\big)$ и $\mathfrak{u}_E\big(x_1^t, \ldots, x_m^t, z^t\big)$ известны фазовые состояния — своё и остальных игроков. При этом предполагается, что преследователи P_1, P_2, … , P_m обладают в каждый момент t информацией о выборе вектора $\mathfrak{u}_E^t$ убегающим E в этот же момент. В этом случае говорят, что игрок E *дискриминирован*.

Далее определим стратегии игроков. Известно, что стратегия должна описывать поведение игрока в любой точке, в которой он может оказаться в течение игры. Таким образом, под стратегией игрока будем понимать функцию, зависящую от времени и текущих местоположений всех игроков. Другими словами, стратегией игрока E является функция $u_E\big(t, x_1^t, \ldots, x_m^t, z^t\big)$, удовлетворяющая системе (1) с начальными условиями (2). Множество стратегий убегающего E обозначим через $\mathcal{U}_E$. Стратегия преследователя P_j — это функция, зависящая от времени, местоположений игроков и вектора-скорости убегающего E, т. е. $u_{P_j}\big(t, x_1^t, \ldots, x_m^t, z^t, \mathfrak{u}_E\big)$. Обозначим через $\mathcal{U}_{P_j}$ множества допустимых стратегий игроков P_j, $j = 1, \ldots, m$.

Убегающий считается *пойманным* преследователем P_j, если местоположения игроков P_j и E в некоторый момент времени совпадают. Обозначим через $P_j^t = x_j^t$, $E^t = z^t$ положения игроков в произвольный момент t при движении из начальных точек x_j^0, z^0. Тогда

$$t_{P_j}\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, u_{P_1}(\cdot), \ldots, u_{P_m}(\cdot), u_E(\cdot)\big) = \min\big\{t \mid x_j^t = z^t\big\},\ j = \overline{1, m},$$

— минимальное время, за которое преследователь P_j может поймать убегающего E. Если такого t не найдётся, то будем считать $t_{P_j} = \infty$.

Пусть

$$t_E\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, u_{P_1}(\cdot), \ldots, u_{P_m}(\cdot), u_E(\cdot)\big) = \min\{t_{P_1}, \ldots, t_{P_m}\}.$$

Тогда $t_E(\cdot)$ — первый момент встречи убегающего E с одним из преследователей. Игра заканчивается в момент времени $t = t_E(\cdot)$.

Выигрыш убегающего E определим как время встречи с первым из преследователей, умноженное на число $\gamma > 0$ — «цену» единицы времени:

$$\begin{aligned} K_E\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, u_{P_1}(\cdot), \ldots, u_{P_m}(\cdot), u_E(\cdot)\big) \\ = \gamma \cdot t_E\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, u_{P_1}(\cdot), \ldots, u_{P_m}(\cdot), u_E(\cdot)\big). \end{aligned}$$

Функцию выигрыша игрока P_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ положим равной функции выигрыша убегающего, взятой с обратным знаком:

$$K_{P_j}\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, u_{P_1}(\cdot), \ldots, u_{P_m}(\cdot), u_E(\cdot)\big) \\ = -\gamma \cdot t_E\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, u_{P_1}(\cdot), \ldots, u_{P_m}(\cdot), u_E(\cdot)\big).$$

Таким образом, определена неантагонистическая игра преследования в нормальной форме

$$\Gamma\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) = \langle N, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \rangle,$$

где $N = \{P_1, \ldots, P_m, E\}$ — множество игроков, $\mathcal{U}_i$ — множество допустимых стратегий i-го игрока и K_i — функция выигрыша i-го игрока, $i \in N$.

Пусть каждый игрок выбирает некоторую стратегию из множества допустимых стратегий. В результате складывается ситуация

$$(u_{P_1}(\cdot), \ldots, u_{P_m}(\cdot), u_E(\cdot)).$$

Функции $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ и $z(t)$, $t \in [0, t_E(\cdot)]$, удовлетворяющие системе (1) с начальными условиями (2), называются *траекториями* игроков P_j и E.

Напомним, что стратегия $u^{\Pi}_{P_j}$ называется *стратегией параллельного сближения* (П-*стратегией*), если в любой ситуации $\big(u^{\Pi}_{P_j}, u_E\big)$ отрезок $P_j^t E^t$, соединяющий точки местоположений игроков P_j и E в каждый момент времени $t > 0$ до момента встречи, параллелен отрезку $P_j^0 E^0$, и его длина строго убывает [2].

При параллельном сближении множество точек встречи убегающего E и преследователя P_j при всевозможных стратегиях убегающего содержится в круге Аполлония [2]. Его ограничивает окружность Аполлония.

Окружностью Аполлония $A_j = A\big(x_j^0, z^0\big)$ преследователя P_j и убегающего E называется геометрическое место точек M, удовлетворяющих равенству $|E^0 M|/\beta = \big|P_j^0 M\big|/\alpha_j$. Для случая двух преследователей на рис. 1 представлены окружности Аполлония $A_j = A\big(x_j^0, z^0\big)$ с центром O_j^0 и $A_{3-j} = A\big(x_{3-j}^0, z^0\big)$ с центром O_{3-j}^0 для игроков P_j, E и P_{3-j}, E $(j = 1, 2)$ в начальный момент времени $t = 0$.

Точкой Аполлония называется точка на окружности Аполлония, наиболее удалённая от местоположения убегающего игрока.

Определение 1. Ситуации $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ будем называть *эквивалентными в смысле выигрышей*, если

$$K_i(x_1, \ldots, x_n) = K_i(y_1, \ldots, y_n)$$

для всех $i \in N$.

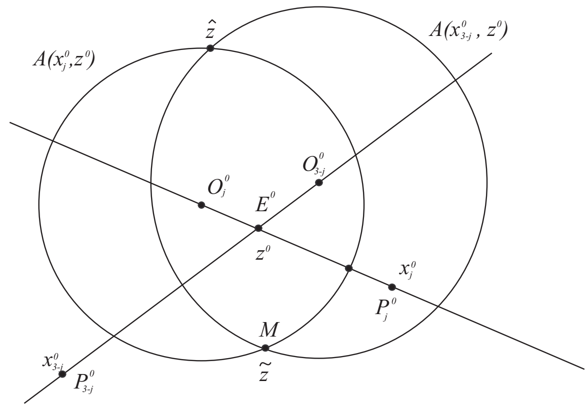

Рис. 1. Окружности Аполлония для игры $\Gamma\big(x_j^0, x_{3-j}^0, z^0\big)$, $j = 1, 2$

Приведём теорему существования ситуации равновесия по Нэшу в неантагонистической игре $\Gamma\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$.

Теорема 1. *В игре* $\Gamma\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ *существует единственное в смысле выигрышей равновесие по Нэшу, которое предписывает игрокам следующее поведение*:

(i) *игрок* E *движется с максимальной скоростью в точку*

$$\widehat{z} = \underset{z \in A_1 \cap \ldots \cap A_m}{\arg\max} \|z^0 - z\|;$$

(ii) *игроки* $P_1, \ldots, P_m$ *используют стратегии параллельного сближения.*

Стратегии игроков, образующие равновесие по Нэшу, описанное в теореме 1, будем называть *некооперативными* стратегиями игроков.

2. Кооперативная форма игры преследования $\boldsymbol{\Gamma\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)}$

Рассмотрим случай, когда игроки могут объединяться в коалиции. *Коалицией* S называется любое непустое подмножество множества игроков. Предположим, что выигрыши игроков трансферабельны, т. е. игроки из множества N находятся в таких условиях, что совокупный выигрыш, который в состоянии получить любая коалиция S, может быть произвольным образом поделён между членами коалиции.

Пусть 2^N — множество всех подмножеств N. Функция $v\;:\;2^N \to \mathbb{R}^1$ такая, что $v(\varnothing) = 0$, называется *характеристической функцией* кооперативной игры. Будем предполагать, что характеристическая функция обладает свойством супераддитивности, т. е. $v(S \cup R) \geqslant v(S) + v(R)$, $S, R \subset N$, $S \cap R = \varnothing$.

Участники коалиции S принимают групповые решения об индивидуальных действиях. Объединение игроков в коалицию S означает превращение их в единого игрока. Стратегиями этого объединённого игрока являются всевозможные комбинации стратегий составляющих его игроков.

Наихудшая ситуация, в которой может оказаться коалиция S, возникает в случае, когда остальные игроки также образуют коалицию с противоположными интересами. Тогда значение характеристической функции $v(S)$ определяется следующим образом:

$$v(S) = \max_{u_S} \min_{u_{N\setminus S}} \sum_{i\in S} K_i(u_S, u_{N\setminus S}), \tag{3}$$

где u_S и $u_{N\setminus S}$ — допустимые стратегии коалиций S и $N \setminus S$ соответственно, $\sum\limits_{i\in S} K_i(u_S, u_{N\setminus S})$ — суммарный выигрыш коалиции S.

Каждой игре $\Gamma\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ поставим в соответствие некоторую игру в форме характеристической функции $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$, где v определяется формулой (3).

Далее будем предполагать, что каждый преследователь использует стратегию параллельного сближения.

В [12] в игре преследования с двумя преследователями в качестве значений характеристической функции берутся значения соответствующих антагонистических игр. Однако для игр с тремя и более преследователями в качестве значений характеристической функции невозможно взять значения соответствующих антагонистических игр, так как значения этих игр неизвестны. Поэтому при определении кооперативной игры с m преследователями и одним убегающим в качестве значения характеристической функции коалиции S берётся нижнее значение соответствующей антагонистической игры, или, другими словами, гарантированный выигрыш, который игроки из S могут себе обеспечить.

Построим характеристическую функцию игры $\Gamma\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$:

$$\begin{aligned} v\big(\{P_j\}; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) \\ = -\gamma \underline{\mathrm{Val}}\, \Gamma_{P_j \mathrm{vs}\{E \cup \mathfrak{P} \setminus P_j\}}\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) = -\infty, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

где $\underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{P_j \mathrm{vs}\{E \cup \mathfrak{P} \setminus P_j\}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr)$ — нижнее значение антагонистической игры преследования между игроками P_j и $\{E \cup \mathfrak{P} \setminus P_j\}$ и $\mathfrak{P}$ — множество всех преследователей;

$$v\bigl(\{P_j, E\}; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \ (\text{см. [12]});$$

$$v\bigl(\{P_i, P_j\}; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = -\gamma \underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{\mathfrak{P}_{ij} \mathrm{vs}\{E \cup \mathfrak{P} \setminus (\mathfrak{P}_{ij})\}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = -\infty,$$

где $\underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{\mathfrak{P}_{ij} \mathrm{vs}\{E \cup \mathfrak{P} \setminus (P_i, P_j)\}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr)$ — нижнее значение антагонистической игры преследования между двумя игроками $\mathfrak{P}_{ij} = \{P_i, P_j\}$ и $\{E \cup \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$;

$$v\bigl(\{P_i, P_j, E\}; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = \gamma \underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{\{P_i, P_j, E\} \text{ vs } \{\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}_{ij}\}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = -\gamma \frac{\|z^0 - \widetilde{z}_{i,j}\|}{\beta},$$

где $\underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{\{P_i, P_j, E\} \setminus \{\mathfrak{P} \mathrm{vs} \mathfrak{P}_{ij}\}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr)$ — нижнее значение антагонистической игры преследования между двумя игроками $\{P_i, P_j, E\}$ и $\{\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}_{ij}\}$ и $\widetilde{z}_{i,j} = \underset{z \in A_i \cap A_j}{\arg\min} \|z^0 - z\|$, $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$;

$$v\bigl(\{P_i, P_j, P_k\}; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = -\gamma \underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{\mathfrak{P}_{ijk} \text{ vs } \{E \cup \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}_{ijk}\}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = -\infty,$$

где $\underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{\mathfrak{P}_{ijk} \setminus \{E \cup \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}_{ijk}\}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr)$ — нижняя оценка значения антагонистической игры преследования между $\mathfrak{P}_{ijk} = \{P_i, P_j, P_k\}$ и $\{E \cup \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}_{ijk}\}$, $i, j, k = \overline{1, m}$, $i \neq j \neq k$;

$$v\bigl(\{P_i, P_j, P_k, E\}; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = \gamma \underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{\{\mathfrak{P}_{ijk} \cup E\} \text{ vs } \{\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}_{ijk}\}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = -\gamma \frac{\|z^0 - \widetilde{z}_{i,j,k}\|}{\beta},$$

где $i, j, k = \overline{1, m}$, $i \neq j \neq k$;

$$\cdots$$

$$v\bigl(\{E\}; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = \gamma \Gamma_{E \text{ vs } \mathfrak{P}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr) = \gamma \frac{\|z^0 - \widehat{z}\|}{\beta},$$

где $\underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{E \text{ vs } \mathfrak{P}}\bigl(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\bigr)$ — нижняя оценка значения антагонистической игры преследования между игроками $\mathfrak{P} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ и E,

$\widehat{z} = \underset{z \in A_1 \cap \ldots \cap A_m}{\arg\max} \|z^0 - z\|;$

$$v\big(\{P_1, \ldots, P_m\}, x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) = -m\gamma \underline{\mathrm{Val}}\ \Gamma_{\mathfrak{P}\mathrm{vs}E}\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) = -m\gamma \frac{\|z^0 - \widehat{z}\|}{\beta};$$

$$v\big(\{P_1, \ldots, P_m, E\}, x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) = \max_{u_{P_1} \in \mathcal{U}_{P_1}, \ldots, u_{P_m} \in \mathcal{U}_{P_m}, u_E \in \mathcal{U}_E} \big\{-\gamma t_E\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, u_{P_1}, \ldots, u_{P_m}, u_E\big)\big\} = -\gamma t_E\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0, \bar{u}_{P_1}, \ldots, \bar{u}_{P_m}, \bar{u}_E\big) = -\gamma \bar{t},$$

где $\bar{t}$ — минимальное время преследования в кооперативной игре преследования. В соответствии с выбранными стратегиями $(\bar{u}_{P_1}, \ldots, \bar{u}_{P_m}, \bar{u}_E)$ игроки будут двигаться в точку $\widetilde{z} = \underset{z \in A_1 \cap \ldots \cap A_m}{\arg\min} \|z^0 - z\|$. Таким образом,

$$v\big(\{P_1, \ldots, P_m, E\}, x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) = -\gamma \frac{\|z^0 - \widetilde{z}\|}{\beta}.$$

В случае классического определения характеристической функции (3) её значения для коалиций $\{P_j\}$, $\{P_j P_k\}$, …, $\{P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}\}$ равны $-\infty$. В работе предложено определять значения характеристической функции для данных коалиций как суммарный выигрыш преследователей, входящих в коалицию S и играющих против убегающего E. При этом предполагается, что преследователи, не входящие в коалицию S, не оказывают влияния на значения характеристической функции данной коалиции. Поэтому для указанных выше коалиций определим значения характеристической функции следующим образом:

$$v\big(\{P_j\}; x_j^0, z^0\big) = -\frac{\big\|x_j^0 - z^0\big\|}{\alpha_j - \beta}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$v\big(\{P_i, P_j\}; x_i^0, x_j^0, z^0\big) = -2\gamma \frac{\|z^0 - \widehat{z}_{i,j}\|}{\beta}, \quad i, j = \overline{1, m},\ i \neq j,$$
$$\widehat{z}_{i,j} = \underset{z \in A_i \cap A_j}{\arg\max} \big\|z^0 - z\big\| \ \text{(см. [12])};$$

$$v\big(\{P_i, P_j, P_k\}; x_i^0, x_j^0, x_k^0, z^0\big) = -3\gamma \frac{\|z^0 - \widehat{z}_{i,j,k}\|}{\beta}, \quad i, j, k = \overline{1, m},\ i \neq j \neq k;$$

$$\ldots$$

$$v\big(\{P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}\}; x_1^0, \ldots, x_{m-1}^0, z^0\big) = -(m-1)\gamma \frac{\|z^0 - \widehat{z}_{1,\ldots,m-1}\|}{\beta}.$$

Предложенный способ определения характеристической функции может быть использован, так как он сужает множество дележей рассматриваемой кооперативной игры.

Введём некоторые обозначения: $g_i^0 = \gamma \cdot \|x_i^0 - z^0\|/(\alpha_i - \beta)$, $\widehat{g}_{i,j}^0 = \gamma \cdot \|z^0 - \widehat{z}_{i,j}\|/\beta$, $\widehat{g}_{i,j,k}^0 = \gamma \cdot \|z^0 - \widehat{z}_{i,j,k}\|/\beta$, …, $g^0 = \gamma \cdot \|z^0 - \widehat{z}\|/\beta$, $\widetilde{g}_{i,j}^0 = \gamma \cdot \|z^0 - \widetilde{z}_{i,j}\|/\beta$, $\widetilde{g}_{i,j,k}^0 = \gamma \cdot \|z^0 - \widetilde{z}_{i,k,j}\|/\beta$, …, $g^* = \gamma \cdot \|z^0 - \widetilde{z}\|/\beta$.

Тогда

$$\begin{aligned}
&v\big(\{P_i\}, x_i^0, z^0\big) = -g_i^0, && i = \overline{1,m},\\
&v\big(\{E\}, x_i^0, z^0\big) = g^0, && i = \overline{1,m},\\
&v\big(\{P_i, P_j\}, x_i^0, x_j^0, z^0\big) = -2\widehat{g}_{i,j}^0, && i,j = \overline{1,m},\ i \neq j,\\
&v\big(\{P_i, E\}, x_i^0, z^0\big) = 0, && i = \overline{1,m},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&v\big(\{P_i, P_j, P_k\}, x_i^0, x_j^0, x_k^0, z^0\big) = -3\widehat{g}_{i,j,k}^0, && i,j,k = \overline{1,m},\ i \neq j \neq k,\\
&v\big(\{P_i, P_j, E\}, x_i^0, x_j^0, z^0\big) = -\widetilde{g}_{i,j}^0, && i,j = \overline{1,m},\ i \neq j,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v\big(\{P_1, \ldots, P_m\}, x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) = -m \cdot g^0,\\
&v\big(\{P_1, \ldots, P_m, E\}, x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) = -g^*.
\end{aligned} \tag{4}$$

Под *кооперативным* поведением будем понимать поведение, которое предполагает движение всех игроков с максимальной скоростью в точку $\widetilde{z}$ — ближайшую к начальному местоположению игрока E точку, принадлежащую множеству пересечения всех кругов Аполлония (рис. 2).

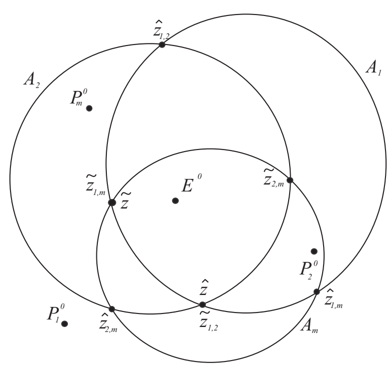

Рис. 2. Окружности Аполлония для игры с m преследователями и одним убегающим

Определение 2. Траектория $\big(\bar{x}_1(\cdot), \ldots, \bar{x}_m(\cdot), \bar{z}(\cdot)\big)$, удовлетворяющая системе (1) с начальными условиями (2) и такая, что

$$K_N\big(\bar{x}_1(\cdot), \ldots, \bar{x}_m(\cdot), \bar{z}(\cdot)\big) = \sum_{i \in N} K_i\big(\bar{x}_1(\cdot), \ldots, \bar{x}_m(\cdot), \bar{z}(\cdot)\big) \\ = v\big(N; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big),$$

называется *кооперативной траекторией* в игре $\Gamma\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$.

Определение 3. Пара $\big\langle N, v\big(S; x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)\big\rangle$, где $N = \big\{P_1, \ldots, P_m, E\big\}$ — множество игроков и v — характеристическая функция, определённая формулами (4), называется *кооперативной игрой преследования* и обозначается через $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$.

Утверждение 1. *В игре* $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ *характеристическая функция, определённая формулами* (4), *является супераддитивной.*

В качестве решения кооперативной игры $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ будем рассматривать C-ядро.

3. Существование непустого C-ядра в кооперативной игре преследования $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$

Обозначим через $\xi = (\xi_{P_1}, \ldots, \xi_{P_m}, \xi_E)$ делёж. Множество дележей игры $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ имеет вид

$$E_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) \\ = \Big\{\xi \mid \xi_{P_i} \geqslant -g_i^0,\ i \in \{1, m\},\ \xi_E \geqslant g^0;\ \sum_{i \in N} \xi_i = -g^*\Big\}. \quad (5)$$

Известно [1, 14], что делёж ξ принадлежит C-ядру рассматриваемой игры $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ тогда и только тогда, когда выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{array}{ll}
\xi_{P_i} + \xi_{P_j} \geqslant -2 \cdot \widehat{g}_{i,j}^0, & i, j \in \{1, m\},\ i \neq j; \\
\multicolumn{2}{c}{(C_m^2 \text{ неравенств})} \\
\xi_{P_k} + \xi_E \geqslant 0, & k \in \{1, m\}; \\
\xi_{P_i} + \xi_{P_j} + \xi_{P_k} \geqslant -3 \cdot \widehat{g}_{i,j,k}^0, & i, j, k \in \{1, m\},\ i \neq j \neq k; \\
\multicolumn{2}{c}{(C_m^3 \text{ неравенств})}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
\xi_{P_i} + \xi_{P_j} + \xi_E \geqslant -\widetilde{g}^0_{i,j}, & i, j \in \{1, m\},\ i \neq j; \\
\multicolumn{2}{c}{(C_m^2 \text{ неравенств})} \\
\multicolumn{2}{c}{\dots} \\
\xi_{P_1} + \ldots + \xi_{P_m} \geqslant -m \cdot g^0; & \\
\underbrace{\xi_{P_i} + \ldots + \xi_{P_k}}_{m-1 \text{ компонент}} + \xi_E \geqslant -\widetilde{g}^0_{i,\ldots,k}, & i, \ldots, k \in \{1, m\},\ i \neq \ldots \neq k. \\
\multicolumn{2}{c}{(m \text{ неравенств})}
\end{array}
\tag{6}
$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *В кооперативной дифференциальной игре преследования* $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ *существует непустое* C*-ядро для любых начальных местоположений игроков.*

Доказательство. Сначала покажем, что произвольный делёж из C-ядра удовлетворяет системе (6). Предположим, что

$$
(\xi_{P_1}, \ldots, \xi_{P_m}, \xi_E) \in C\big(\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)\big).
$$

Покажем, что система (6) совместна. Просуммировав неравенства системы (6) и домножив результат на -1, получим

$$
\begin{aligned}
&-\left(C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1}\right) \cdot (\xi_{P_1} + \xi_{P_2} + ... + \xi_{P_m} + \xi_E) \\
&\leqslant 2\,\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2} + \widehat{g}^0_{1,3} + \ldots\right)}_{C_m^2} + 3\,\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2,3} + \widehat{g}^0_{1,2,4} + \ldots\right)}_{C_m^3} + \underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2} + \widetilde{g}^0_{1,3} + \ldots\right)}_{C_m^2} + \\
&\quad + 4\,\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2,3,4} + \widehat{g}^0_{1,2,3,5} + \ldots\right)}_{C_m^4} + 2\,\underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2,3} + \widetilde{g}^0_{1,2,4} + \ldots\right)}_{C_m^3} + \ldots \\
&\quad + m \cdot \underbrace{g^0}_{C_m^m} + (m-2) \cdot \underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2,\ldots,m-1} + \widetilde{g}^{+}_{1,2,\ldots,m-2,m} + \ldots\right)}_{C_m^{m-1}}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Упростим левую часть неравенства (7). Известно, что

$$
C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.
$$

Тогда $C_m^1 + \ldots + C_m^{m-1} = 2^m - 2$. Так как $v(N) = \xi_{P_1} + \ldots + \xi_{P_m} + \xi_E = -g^*$,

то (7) можно записать в виде

$$\left(C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1}\right) \cdot g^* \leqslant 2\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2} + \widehat{g}^0_{1,3} + \ldots\right)}_{C_m^2}$$

$$+\, 3\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2,3} + \widehat{g}^0_{1,2,4} + \ldots\right)}_{C_m^3} + \underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2} + \widetilde{g}^0_{1,3} + \ldots\right)}_{C_m^2} + 4\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2,3,4} + \widehat{g}^0_{1,2,3,5} + \ldots\right)}_{C_m^4}$$

$$+\, 2\underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2,3} + \widetilde{g}^0_{1,2,4} + \ldots\right)}_{C_m^3} + \ldots + m \cdot \underbrace{g^0}_{C_m^m}$$

$$+\, (m-2) \cdot \underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2,\ldots,m-1} + \widetilde{g}^+_{1,2,\ldots,m-2,m} + \ldots\right)}_{C_m^{m-1}}.$$

Сравнивая $v(N)$ и значения характеристической функции для остальных коалиций, получаем соотношения

$$g* = \frac{\gamma}{\beta} \min_{z \in A_1 \cap \ldots \cap A_m} \left\|z^0 - z\right\| \leqslant \ldots \leqslant \frac{\gamma}{\beta} \min_{z \in A_i \cap A_j} \left\|z^0 - z\right\|,$$

$$g^0 = \frac{\gamma}{\beta} \max_{z \in A_1 \cap \ldots \cap A_m} \left\|z^0 - z\right\| \leqslant \ldots \leqslant \frac{\gamma}{\beta} \max_{z \in A_i \cap A_j} \left\|z^0 - z\right\|.$$

Очевидно, что $g^* \leqslant g^0$, т. е. g^* больше любого из слагаемых (7). Следовательно, для правой части неравенства (7) справедлива оценка

$$2\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2} + \widehat{g}^0_{1,3} + \ldots\right)}_{C_m^2} + 3\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2,3} + \widehat{g}^0_{1,2,4} + \ldots\right)}_{C_m^3} + \underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2} + \widetilde{g}^0_{1,3} + \ldots\right)}_{C_m^2}$$

$$+\, 4\underbrace{\left(\widehat{g}^0_{1,2,3,4} + \widehat{g}^0_{1,2,3,5} + \ldots\right)}_{C_m^4} + 2\underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2,3} + \widetilde{g}^0_{1,2,4} + \ldots\right)}_{C_m^3} + \ldots$$

$$+\, m \cdot \underbrace{g^0}_{C_m^m} + (m-2) \cdot \underbrace{\left(\widetilde{g}^0_{1,2,\ldots,m-1} + \widetilde{g}^+_{1,2,\ldots,m-2,m} + \ldots\right)}_{C_m^{m-1}}$$

$$\geqslant \left(2C_m^2 + 3C_m^3 + C_m^2 + 4C_m^4 + 2C_m^3 + \ldots + m \cdot C_m^m + (m-2) \cdot C_m^{m-1}\right) \cdot g^*.$$

Докажем, что имеет место неравенство

$$(2^m - 2) \cdot g^* \leqslant \left(2C_m^2 + 3C_m^3 + C_m^2 + 4C_m^4 + 2C_m^3 + \ldots + m \cdot C_m^m + (m-2) \cdot C_m^{m-1}\right) \cdot g^*$$

или

$$2^m - 2 \leqslant 2C_m^2 + 3C_m^3 + C_m^2 + 4C_m^4 + 2C_m^3 + \ldots + m \cdot C_m^m + (m-2) \cdot C_m^{m-1}, \quad (8)$$

поскольку если верно неравенство (8), то и неравенство (7) справедливо. Так как $C_m^1 + 2C_m^2 + 3C_m^3 + \ldots + m \cdot C_m^m = m \cdot 2^{m-1}$, то $2C_m^2 + 3C_m^3 + \ldots + m \cdot C_m^m = m \cdot (2^{m-1} - 1)$. Следовательно, неравенство

$$2 \cdot (2^{m-1} - 1) \leqslant m \cdot (2^{m-1} - 1)$$

выполняется для $m \geqslant 2$. Поэтому неравенство (8) верно. Это означает, что неравенство (7) выполняется для любых начальных местоположений игроков. Таким образом, система (6), описывающая C-ядро, совместна, что означает существование непустого C-ядра в описанной выше кооперативной игре.

Тем самым для произвольного дележа из C-ядра система (6) совместна. Осталось показать, что неравенство (8) выполняется, поскольку любой вектор, удовлетворяющий системе (6), является дележом игры $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$. Действительно, легко проверить, что вектор

$$\eta^0 = (-g^0, -g^0, \ldots, -g^0, -g^*, (m-1) \cdot g^0)$$

удовлетворяет системе (6) и является дележом данной игры. Теорема 2 доказана.

4. Динамическая устойчивость C-ядра игры $\boldsymbol{\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)}$

В динамической игре существование непустого C-ядра в начальный момент времени не является достаточным для того, чтобы считать его приемлемым решением. В процессе движения в динамической игре в каждый текущий момент времени t игроки попадают в некоторую подыгру со своими начальными положениями и продолжительностью. Это означает, что с течением времени изменяются условия конфликта и возможности участвующих в нём сторон, а выбранный изначально принцип оптимальности перестаёт, возможно, отвечать их интересам.

Таким образом, динамическая устойчивость является важным свойством решения и означает, что игроки в каждый момент игры не имеют причин отклоняться от первоначально выбранного оптимального поведения.

Рассматриваемым решением игры $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$, построенным в начальный момент времени $t = 0$, является $C_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$. Из теоремы 2 следует, что $C_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big) \neq \varnothing$. Напомним, что $(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t))$, $t \in [0, \bar{t}]$, — кооперативная траектория игры $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$. Исследуем поведение $C_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ вдоль кооперативной траектории $\big(\bar{x}_1(\cdot), \ldots, \bar{x}_m(\cdot), \bar{z}(\cdot)\big)$. В связи с этим рассмотрим текущую подыгру.

В каждый момент времени t текущая подыгра $\Gamma_v\big(\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t)\big)$ определяется тем же способом, что и игра $\Gamma_v\big(x_1^0,\dots,x_m^0,z^0\big)$, с той лишь разницей, что игра $\Gamma_v\big(\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t)\big)$ начинается из текущего положения $(\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t))$, находящегося на кооперативной траектории, и имеет продолжительность $\bar{t}-t$.

В подыгре $\Gamma_v\big(\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t)\big)$, используя формулы (4), определим характеристическую функцию:

$$
\begin{aligned}
&v(\{P_i\},\bar{x}_i(t),\bar{z}(t)) = -g_i(t), \quad i=\overline{1,m},\\
&v(\{E\},\bar{x}_i(t),\bar{z}(t)) = g(t),\\
&v(\{P_i,P_j\},\bar{x}_i(t),\bar{x}_j(t),\bar{z}(t)) = -2\widehat{g}_{i,j}(t), \quad i,j=\overline{1,m},\ i\neq j,\\
&v(\{P_i,E\},\bar{x}_i(t),\bar{z}(t)) = 0, \quad i=\overline{1,m},\\
&v(\{P_i,P_j,P_k\},\bar{x}_i(t),\bar{x}_j(t),\bar{x}_k(t),\bar{z}(t)) = -3\widehat{g}_{i,j,k}(t), \ i,j,k=\overline{1,m},\ i\neq j\neq k,\\
&v(\{P_i,P_j,E\},\bar{x}_i(t),\bar{x}_j(t),\bar{z}(t)) = -\widetilde{g}_{i,j}(t), \quad i,j=\overline{1,m},\ i\neq j,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&v(\{P_1,\dots,P_m\},\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t)) = -m\cdot g(t),\\
&v(\{P_1,\dots,P_m,E\},\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t)) = -g^*(t).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим функции $g_i(t)=\gamma\frac{\|\bar{x}_i(t)-\bar{z}(t)\|}{\alpha_1-\beta}$, $i=\overline{1,m}$, $g(t)=\gamma\frac{\|\bar{z}(t)-\widehat{z}(t)\|}{\beta}$. Эти функции являются непрерывными монотонно убывающими функциями по t на $[0,\bar{t}]$.

Замечание 1. Из определения окружности Аполлония следует, что функции $g_i(t)$ имеют вид

$$g_i(t)=\gamma\left(1-\frac{t}{\bar{t}}\right)\frac{\big\|x_i^0-z^0\big\|}{\alpha_i-\beta}, \quad i=1,\dots,m.$$

Утверждение 2. *Функция $g(t)$ является линейной функцией по t, т. е.*

$$g(t)=\gamma\left(1-\frac{t}{\bar{t}}\right)\frac{\|z^0-\widehat{z}\|}{\beta}.$$

Обозначим через $C_v\big(\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t)\big)$ C-ядро текущей подыгры. Предположим, что оно непусто вдоль всей кооперативной траектории для любого $t\in[0,\bar{t}]$. Если это не так, то игроки не будут придерживаться выбранного принципа оптимальности.

Как было отмечено ранее, находясь в начальных местоположениях $\big(x_1^0,\dots,x_m^0,z^0\big)$, игроки соглашаются на делёж $\xi^0\in C_v\big(x_1^0,\dots,x_m^0,z^0\big)$ такой, что доля i-го игрока в нём равна ξ_i^0. Предположим, что выигрыш игрока i (его доля) на $[0,t]$ будет $\xi_i\big(\bar{x}_1(t),\dots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t)\big)$. Тогда на

оставшемся интервале времени $[t, \bar{t}]$ в соответствии с дележом ξ^0 игрок i получит $\xi_i^t = \xi_i^0 - \xi_i\big(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)\big)$.

Для того чтобы начальное соглашение (делёж ξ^0) оставалось в силе в момент t, необходимо, чтобы вектор $\xi^t = \big(\xi_{P_1}^t, \dots, \xi_{P_m}^t, \xi_E^t\big)$ принадлежал $C_v\big(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)\big)$. Если это условие выполняется в каждый момент времени $t \in [0, \bar{t}]$, то делёж ξ^0 реализуем. Эта концепция описывает динамическую устойчивость [5].

Определение 4. Делёж $\xi^0 \in C_v\big(x_1^0, \dots, x_m^0, z^0\big)$ называется *динамически устойчивым* в игре $\Gamma_v\big(x_1^0, \dots, x_m^0, z^0\big)$, если выполняются следующие условия:

(i) $C_v\big(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)\big) \neq \varnothing$ вдоль кооперативной траектории $\big(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)\big)$ в каждый момент времени t, $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$;

(ii) существует интегрируемая функция $\tau(t) = \big(\tau_{P_1}(t), \dots, \tau_{P_m}(t), \tau_E(t)\big)$ на $[0, \bar{t}]$ такая, что $\tau_i(t) \geqslant 0$, $i \in N$, для каждого $t \in [0, \bar{t}]$ и

$$\xi^0 - \xi(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)) \in C_v\big(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)\big), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}\xi(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)) = (\xi_{P_1}(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)), \dots, \xi_{P_m}(\bar{x}_1(t), \dots, \\ \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)), \xi_E(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t))),\end{aligned}$$

$$\xi_i(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)) = \int\limits_0^t \tau_i(y)dy, \quad i \in \{P_1, \dots, P_m, E\}.$$

C-ядро является динамически устойчивым, если каждый делёж из C-ядра динамически устойчив.

Справедлива

Теорема 3. *В кооперативной дифференциальной игре преследования* $\Gamma_v\big(x_1^0, \dots, x_m^0, z^0\big)$ *C-ядро* $C_v\big(x_1^0, \dots, x_m^0, z^0\big)$ *является динамически устойчивым.*

Доказательство. Рассмотрим семейство текущих подыгр

$$\{\Gamma_v(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant \bar{t}\}.$$

Покажем сначала, что для каждого $t \in [0, \bar{t}]$ $C_v\big(\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)\big)$ непусто.

Используя (6), умножая на -1 и суммируя соответствующие неравенства, получаем

$$
\begin{aligned}
&-\left(C_m^1+\ldots+C_m^{m-1}\right)\cdot(\xi_{P_1}+\xi_{P_2}+...+\xi_{P_m}+\xi_E)\leqslant 2\,\underbrace{\left(\widehat{g}_{1,2}(t)+\widehat{g}_{1,3}(t)+\ldots\right)}_{C_m^2}\\
&+3\,\underbrace{\left(\widehat{g}_{1,2,3}(t)+\widehat{g}_{1,2,4}(t)+\ldots\right)}_{C_m^3}+\underbrace{\left(\widetilde{g}_{1,2}(t)+\widetilde{g}_{1,3}(t)+\ldots\right)}_{C_m^2}\\
&+4\,\underbrace{\left(\widehat{g}_{1,2,3,4}(t)+\widehat{g}_{1,2,3,5}(t)+\ldots\right)}_{C_m^4}+2\,\underbrace{\left(\widetilde{g}_{1,2,3}(t)+\widetilde{g}_{1,2,4}(t)+\ldots\right)}_{C_m^3}\\
&+\ldots+m\cdot\underbrace{g(t)}_{C_m^m}+(m-2)\cdot\underbrace{\left(\widetilde{g}_{1,2,\ldots,m-1}(t)+\widetilde{g}_{1,2,\ldots,m-2,m}(t)+\ldots\right)}_{C_m^{m-1}}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
g(t)=\frac{\gamma}{\beta}\|\bar{z}(t)-\widehat{z}(t)\|=\max_{z(t)\in A_1(t)\cap\ldots\cap A_m(t)}\|\bar{z}(t)-z(t)\|\leqslant\ldots\leqslant\widehat{g}_{i,j,k}(t)
$$

$$
=\max_{z(t)\in A_i(t)\cap A_j(t)\cap A_k(t)}\|\bar{z}(t)-z(t)\|\leqslant\widehat{g}_{i,j}(t)=\max_{z(t)\in A_i(t)\cap A_j(t)}\|\bar{z}(t)-z(t)\|
$$

и

$$
g^*(t)=\frac{\gamma}{\beta}\|\bar{z}(t)-\widetilde{z}(t)\|=\min_{z(t)\in A_1(t)\cap\ldots\cap A_m(t)}\|\bar{z}(t)-z(t)\|\leqslant\ldots\leqslant\widetilde{g}_{i,j,k}(t)
$$

$$
=\min_{z(t)\in A_i(t)\cap A_j(t)\cap A_k(t)}\|\bar{z}(t)-z(t)\|\leqslant\widetilde{g}_{i,j}(t)=\min_{z(t)\in A_i(t)\cap A_j(t)}\|\bar{z}(t)-z(t)\|,
$$

где $A_i(t)\subset A_i$ — окружности Аполлония в игре $\Gamma_{P_i\setminus E}(\bar{x}_i(t),\bar{z}(t))$, $i=1,\ldots,m$. Очевидно, что $g^*(t)\leqslant g(t)$ для всех $t\in[0,\bar{t}]$. Следовательно, неравенство (10) можно переписать в виде

$$
(2^m-2)\cdot g^*\leqslant\left(2C_m^2+3C_m^3+C_m^2+4C_m^4+2C_m^3+\ldots+m\cdot C_m^m+(m-2)\cdot C_m^{m-1}\right)\cdot g^*.
$$

Тогда уравнение (10) выполняется для всех $t\in[0,\bar{t}]$. Далее, рассуждая как в теореме 1, можем утверждать, что

$$
C_v\left(\bar{x}_1(t),\ldots,\bar{x}_m(t),\bar{z}(t)\right)\neq\varnothing
$$

для всех $t\in[0,\bar{t}]$.

Теперь осталось проверить условие (ii) определения динамической устойчивости. Так как C-ядро является динамически устойчивым, если каждый делёж из C-ядра динамически устойчив, то необходимо показать, что соотношение (9) выполняется для всех дележей C-ядра. Для

простоты перейдём к эквивалентной игре $\Gamma_{v'}\big(x_1^0,\ldots,x_m^0,z^0\big)$, взяв $k=1$, $c_{P_i}=g_i(0)=g_i^0$, $c_E=0$. В таком случае характеристическая функция v' имеет вид

$$
\begin{aligned}
&v'\big(\{P_i\},x_i^0,z^0\big)=0, \quad i=\overline{1,m},\\
&v'\big(\{E\},x_i^0,z^0\big)=g^0,\\
&v'\big(\{P_i,P_j\},x_i^0,x_j^0,z^0\big)=g_i^0+g_j^0-2\widehat{g}_{i,j}^0, \quad i,j=\overline{1,m},\ i\neq j,\\
&v'\big(\{P_i,E\},x_i^0,z^0\big)=g_i^0, \quad i=\overline{1,m},\\
&v'\big(\{P_i,P_j,P_k\},x_i^0,x_j^0,x_k^0,z^0\big)=g_i^0+g_j^0+g_k^0-3\widehat{g}_{i,j,k}^0,\\
&v'\big(\{P_i,P_j,E\},x_i^0,x_j^0,z^0\big)=g_i^0+g_j^0-\widetilde{g}_{i,j}^0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v'\big(\{P_1,\ldots,P_m\},x_1^0,\ldots,x_m^0,z^0\big)=g_1^0+\ldots+g_m^0-m\cdot g^0,\\
&v'\big(\{P_1,\ldots,P_m,E\},x_1^0,\ldots,x_m,z^0\big)=g_1^0+\ldots+g_m^0-g^*.
\end{aligned}
$$

C-ядро такой игры имеет различные формы в зависимости от начальных местоположений игроков. Для доказательства динамической устойчивости C-ядра рассмотрим случай самого широкого C-ядра, покрывающий все остальные случаи.

$C_{v'}\big(x_1^0,\ldots,x_m^0,z^0\big)$ представляет собой выпуклую линейную оболочку крайних дележей

$$
\begin{aligned}
&\eta^1=\big(g_1^0-g^0,g_2^0-g^0,\ldots,g_{m-1}^0-g^0,g_m^0-g^*,(m-1)g^0\big),\\
&\eta^2=\big(g_1^0-g^0,g_2^0-g^0,\ldots,g_{m-1}^0-g^*,g_m^0-g^0,(m-1)g^0\big),\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots\\
&\eta^{m-1}=\big(g_1^0-g^0,g_2^0-g^*,\ldots,g_{m-1}^0-g^0,g_m^0-g^0,(m-1)g^0\big),\\
&\eta^m=\big(g_1^0-g^*,g_2^0-g^0,\ldots,g_{m-1}^0-g^0,g_m^0-g^0,(m-1)g^0\big),\\
&\eta^{m+1}=\big(0,g_2^0-g^*,\ldots,g_{m-1}^0,g_m^0,g_1^0\big),\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots\\
&\eta^{2m}=\big(0,g_2^0,\ldots,g_{m-1}^0,g_m^0-g^*,g_1^0\big),\\
&\eta^{2m+1}=\big(g_1^0-g^*,0,\ldots,g_{m-1}^0,g_m^0,g_2^0\big),\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots\\
&\eta^{m^2}=\big(g_1^0,g_2^0,\ldots,g_{m-1}^0-g^*,0,g_m^0\big),\\
&\eta^{m^2+1}=\big(0,g_1^0+g_2^0-2g^0,\ldots,g_{m-1}^0-g^0,g_m^0-g^0,mg^0-g^*\big),\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$\eta^{m^2+m-1} = \big(0, g_2^0 - g^0, \ldots, g_{m-1}^0 - g^0, g_1^0 + g_m^0 - 2g^0, mg^0 - g^*\big),$$
$$\ldots$$
$$\eta^{2m^2-2m+2} = \big(g_1^0 + g_m^0 - 2g^0, g_2^0 - g^0, \ldots, g_{m-1}^0 - g^0, 0, mg^0 - g^*\big),$$
$$\ldots$$
$$\eta^{2(m-1)m} = \big(g_1^0 - g^0, g_2^0 - g^0, \ldots, g_{m-1}^0 + g_m^0 - 2g^0, 0, mg^0 - g^*\big).$$

Здесь любой делёж $\eta^0 \in C_{v'}\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ может быть представлен как $\eta^0 = \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \eta^j$, $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geqslant 0$, $j = \overline{1,p}$. Подставляя (11) в последнее равенство и используя обозначения

$$s_1 = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j + \sum_{j=2m}^{m^2} \lambda_j + \sum_{j=m^2+m}^{(2m-1)m} \lambda_j, \lambda_{m^2+1}, \ldots, \lambda_{m^2+m-1}, \sum_{j=m+1}^{2m-1} \lambda_j \right)^T,$$

$$s_2 = \left(\lambda_{m^2+m}, \sum_{j=1}^{2m-1} \lambda_j + \sum_{j=3m-1}^{m^2+m-1} \lambda_j + \sum_{j=m^2+2m-1}^{(2m-1)m} \lambda_j, \ldots, \right.$$
$$\left. \lambda_{m^2+m+2}, \sum_{j=2m}^{3m-2} \lambda_j \right)^T,$$
$$\ldots$$
$$s_m = \left(\lambda_{2m^2-2m+2}, \lambda_{2m^2-2m+3}, \ldots, \sum_{j=1}^{m^2-m+1} \lambda_j + \sum_{j=m^2+1}^{m^2-2m+1} \lambda_j, \right.$$
$$\left. \sum_{j=m^2-m+2}^{m^2} \lambda_j \right)^T,$$

$$s_{m+1} = \left(-\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j - 2\lambda_{m^2+m} - \sum_{m^2+m+1}^{m^2+2m-2} \lambda_j - \ldots - 2\lambda_{2m^2-2m+2} \right.$$
$$- \sum_{j=2m^2-2m+3}^{(2m-1)m} \lambda_j, -\sum_{j=1}^{m-2} \lambda_j - \lambda_m - 2\lambda_{m^2+1} - \ldots - 2\lambda_{2m^2-m-1}$$
$$\left. - \lambda_{2m^2-m}, \ldots, (m-1)\sum_{j=1}^{m} \lambda_j + m \sum_{j=m^2+1}^{(2m-1)m} \lambda_j \right)^T,$$

$$s_{m+2} = \Bigg(\lambda_m + \lambda_{2m} + \ldots + \lambda_{m^2-m+2}, \lambda_{m-1} + \lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_{3m-1}, \ldots,$$
$$\lambda_1 + \lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_{m^2-m+1}, \sum_{j=m^2+1}^{(2m-1)m} \lambda_j\Bigg)^T,$$

где ^{T} — знак операции транспонирования, имеем

$$\eta^0 = g_1^0 s_1 + g_2^0 s_2 + \ldots + g_m^0 s_m + g^0 s_{m+1} - g^* s_{m+2}.$$

Для доказательства динамической устойчивости дележа η^0 осталось найти интегрируемую вектор-функцию $\tau(t)$ на $[0, \bar{t}]$ такую, что $\tau_i(t) \geqslant 0$, $i \in N$, и условие (9) выполняется.

Действительно, C-ядро становится пустым в момент $t = \bar{t}$ как решение текущей подыгры $\Gamma_{v'}(\bar{x}(\bar{t}), \ldots, \bar{x}_m(\bar{t}), \bar{z}(\bar{t}))$ с интегральным выигрышем и нулевой продолжительностью. Таким образом, из условия (9) следует

$$\eta(\bar{x}(\bar{t}), \ldots, \bar{x}_m(\bar{t})) = \int_0^{\bar{t}} \tau(y)dy = \eta^0. \tag{12}$$

Учитывая (12), можно положить

$$\tau(y) = \frac{g_1^0}{\bar{t}} s_1 + \frac{g_2^0}{\bar{t}} s_2 + \ldots + \frac{g^0}{\bar{t}} s_{m+1} - \gamma s_{m+2}.$$

Следовательно,

$$\eta^0 = \int_0^{\bar{t}} \tau(y)dy = \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{g_1^0}{\bar{t}} s_1 + \frac{g_2^0}{\bar{t}} s_2 + \ldots + \frac{g^0}{\bar{t}} s_{m+1} - \gamma s_{m+2}\right] dy =$$
$$= g_1^0 s_1 + g_2^0 s_2 + \ldots + g^0 s_{m+1} - g^* s_{m+2}.$$

Теперь нам осталось показать, что делёж $\eta^0 - \eta(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t))$ принадлежит C-ядру текущей игры $\Gamma_{v'}(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t))$ для любого $t \in [0, \bar{t}]$. Подставляя вектор-функцию $\tau(t)$ в (9) и учитывая утверждение 2 и замечание 1, получаем

$$\eta^0 - \eta(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)) = \eta^0 - \int_0^t \tau(y)dy$$
$$= \big[g_1^0 s_1 + g_2^0 s_2 + \ldots + g^0 s_{m+1} - g^* s_{m+2}\big](1 - t/\bar{t}) = \eta^t$$

для всех $t \in [0, \bar{t}]$.

Несложно проверить, что η^t принадлежит $C_{v'}\big(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t)\big)$ игры $\Gamma_{v'}(\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_m(t), \bar{z}(t))$. Таким образом, условие (ii) определения 4 выполняется для всех $t \in [0, \bar{t}]$ и для всех $\eta^0 \in C_{v'}\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z_0\big)$. Так как $\Gamma_v\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ и $\Gamma_{v'}\big(x_1^0, \ldots, x_m^0, z^0\big)$ — эквивалентные игры, имеем

$$\eta_E^0 = \xi_E^0 + g_E^0, \quad \eta_{P_j}^0 = \xi_{P_j}^0 + g_{P_j}^0, \quad j = \overline{1, m},$$

где $\xi^0 = (\xi_{P_1}, \ldots, \xi_{P_m}, \xi_E)$ — произвольный делёж исходной игры Γ_v. Следовательно, делёж ξ^0 динамически устойчив. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *В неантагонистической дифференциальной игре преследования любой делёж из C-ядра предписывает игрокам выигрыш не меньше, чем в ситуации равновесия по Нэшу.*

С целью иллюстрации полученных теоретических результатов приведём два примера.

Пример 1. Рассмотрим $\Gamma\big(x_1^0, x_2^0, z^0\big)$ — неантагонистическую дифференциальную игру с тремя участниками. Пусть игроки имеют следующие начальные местоположения и скорости: $z^0 = (6; 6)$, $\beta = 3$; $x_1^0 = (2; 8)$, $\alpha_1 = 6$; $x_2^0 = (10; 9)$, $\alpha_2 = 5{,}6$.

Кооперативное поведение подразумевает движение всех игроков в точку $\widetilde{z} = (6{,}193; 8{,}088)$, а некооперативное — в точку $\widehat{z} = (7{,}247; 2{,}353)$. Равновесию по Нэшу в такой игре соответствует вектор выигрышей $(-1{,}285; -1{,}285; 1{,}285)$.

Используя формулы (4), построим характеристическую функцию: $v(P_1) = -1{,}49$; $v(P_2) = -1{,}92$; $v(E) = 1{,}285$; $v(P_1, P_2) = -2{,}157$; $v(P_1, E) = 0$; $v(P_2, E) = 0$; $v(P_1, P_2, E) = -0{,}69$. При этом $\bar{t} = 0{,}69$ — минимальное время преследования в построенной кооперативной игре.

Для простоты перейдём к стратегически эквивалентной кооперативной игре: $v(P_1) = 0$; $v(P_2) = 0$; $v(E) = 1{,}285$; $v(P_1, E) = 1{,}491$; $v(P_2, E) = 1{,}923$; $v(P_1, P_2) = 0{,}844$; $v(P_1, P_2, E) = 2{,}715$.

C-ядро такой игры имеет вид

$$\{0{,}206 \leqslant \alpha_{P_1} \leqslant 1{,}224;\ 0{,}638 \leqslant \alpha_{P_2} \leqslant 0{,}792;\ 1{,}285 \leqslant \alpha_E \leqslant 1{,}871; \\ \alpha_{P_1} + \alpha_{P_2} + \alpha_E = 2{,}715\}.$$

Вектор выигрышей игроков в равновесии по Нэшу в построенной эквивалентной игре равен $(0{,}206; 0{,}638; 1{,}285)$. Очевидно, что вектор выигрышей, соответствующий равновесию по Нэшу, не принадлежит C-ядру и все выигрыши, которые игроки получают при кооперативном поведении, не меньше, чем при некооперативном поведении для всех участников.

Пример 2. Рассмотрим игру $\left(x_1^0, x_2^0, z^0\right)$ — неантагонистическую дифференциальную игру с тремя участниками. Пусть игроки имеют следующие начальные местоположения и скорости: $z^0 = (6; 6)$, $\beta = 3$; $x_1^0 = (2; 6)$, $\alpha_1 = 6$; $x_2^0 = (10; 9)$, $\alpha_2 = 5{,}6$. Соответствующие окружности Аполония изображены на рис. 3.

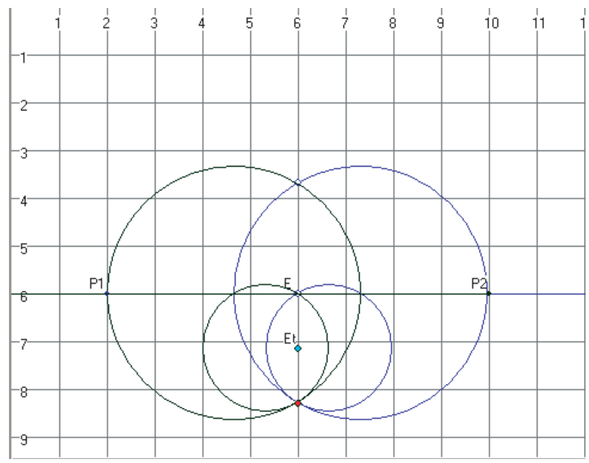

Рис. 3. Окружности Аполлония

Здесь расстояния между убегающим и каждым из преследователей одинаковы. В качестве точки пересечения, наиболее удалённой от игрока E, можно взять как $\widehat{z}_1 = (6; 3{,}69)$, так и $\widehat{z}_2 = (6; 8{,}31)$. Аналогично, ближайшей точкой пересечения окружностей Аполлония может быть и $\widetilde{z}_1 = (6; 3{,}69)$, и $\widetilde{z}_2 = (6; 8{,}31)$. В данной игре характеристическая функция имеет вид $v(P_1) = 0$; $v(P_2) = 0$; $v(E) = 0{,}77$; $v(P_1, E) = 0{,}77$; $v(P_2, E) = 0{,}77$; $v(P_1, P_2) = 0$; $v(P_1, P_2, E) = 0{,}77$.

Очевидно, что C-ядром этой игры является одна точка $(0; 0; 0{,}77)$, которая совпадает с вектором выигрышей игроков в равновесии по Нэшу. В этом примере нет различия между некооперативным и кооперативным поведениями игроков, т. е. отсутствует эффект кооперации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бондарева О. Н.** Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Проблемы кибернетики. Вып. 10. — С. 119–140.
2. **Петросян Л. А.** Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве $\mathbb{R}^n$ // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 161, № 1. — С. 52–54.

3. **Петросян Л. А.** Дифференциальные игры преследования. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 224 с.
4. **Петросян Л. А.** Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. — 1977. — Т. 19, вып. 4. — С. 46–52.
5. **Петросян Л. А., Данилов Н. Н.** Устойчивые решения в неантагонистических дифференциальных играх с нетрансферабельными выигрышами // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. — 1979. — Вып. 1. — С. 52–59.
6. **Петросян Л. А., Томский Г. В.** Геометрия простого преследования. — Новосибирск: Наука, 1983. — 140 с.
7. **Петросян Л. А., Ширяев В. Д.** Простое преследование одним преследователем двух преследуемых // Некоторые вопросы дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения. Вып. 3. — Якутск: Якутск. гос. ун-т, 1978. — С. 103–108.
8. **Isaaks R.** Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit // Control and optimization. — New York: Wiley Press, 1965. — 384 p.
9. **Nash J. F.** Equilibrium points in n-person games // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1950. — Vol. 36. — P. 48–49.
10. **Pankratova Ya., Tarashnina S.** How many people can be controlled in a group pursuit game. Theory and decision. — Amsterdam: Kluwer Academic Publ. — 2004. — Vol. 56. — P. 165–181.
11. **Tarashnina S.** Nash equilibria in a differential pursuit game with one pursuer and m evaders// Game theory and applications. Vol. III. — N.Y.: Nova Science Publ., 1998. — P. 115–123.
12. **Tarashnina S.** Time-consistent solution of a cooperative group pursuit game // Int. Game Theory Rev. — 2002. — Vol. 4. — P. 301–317.
13. **Scarf H. E.** The core of an n-person game // Econometrica. — 1967. — Vol. 35. — P. 50–69.
14. **Shapley L.** On balanced sets and cores // Nav. Res. Logist. — 1967. — Vol. 14. — P. 453–460.

Панкратова Ярослава Борисовна,
e-mail: yasyap@gmail.com

Статья поступила
25 мая 2009 г.

Переработанный вариант —
15 января 2010 г.