ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Март—апрель 2010. Том 17, № 2. С. 79–96

УДК 519.865.3

# ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБМЕНА. ЧАСТЬ 2: МЕТОД ВСТРЕЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ С ФИКСИРОВАННЫМИ БЮДЖЕТАМИ *)

*В. И. Шмырёв*

**Аннотация.** В работе исследуется модель обмена с дробно-линейными функциями предпочтения участников. Для модели с фиксированными бюджетами предложен алгоритм, реализующий общую схему полиэдральной комплементарности, развитую автором для линейных моделей. При необременительном предположении невырожденности относительно стартового состояния доказывается, что алгоритм позволяет получить состояние равновесия за конечное число шагов.

**Ключевые слова:** модель обмена, экономическое равновесие, вектор цен, отображение, неподвижная точка, алгоритм, полиэдральная комплементарность.

## Введение

Данная статья продолжает исследования дробно-линейной модели обмена, начатые в [1], где изучены вопросы существования равновесных состояний и получено сведение проблемы равновесия к специальной задаче полиэдральной комплементарности [6].

В дробно-линейной модели обмена можно гарантировать существование только равновесия в обобщённом смысле — «free disposal equilibrium». В [1] исследование этого вопроса опирается на общую теорему из обзорной статьи Ж. Дебре [11], хотя рассмотрения значительно упрощаются благодаря специфике модели. Приведено простое условие существования равновесия в строгом смысле.

Для решения вопроса о численном отыскании равновесных состояний оказался эффективным подход на основе полиэдральной комплементарности, предложенный ранее автором для линейной модели обмена. Для этой модели известен метод Ивса [12], сводящий проблему к

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ–4113.2008.6).

задаче линейной комплементарности. Подход на основе полиэдральной комплементарности принципиально отличается от этого метода и позволяет разработать достаточно эффективные алгоритмы как для линейной модели обмена [3, 5], так и для различных её вариаций [4, 8–10, 17, 18]. Эти алгоритмы естественно рассматривать как процедуры симплексного типа для отыскания равновесных цен. В отличие от классического взгляда на равновесие, основанного на рассмотрении функции избыточного спроса, подход полиэдральной комплементарности базируется на рассмотрении специальных структур предполагаемых закупок товаров участниками модели подобно тому, как симплекс-метод в линейном программировании базируется на рассмотрении базисных множеств. Каждой такой структуре закупок сопоставляется два множества цен, именуемые условно зоной предпочтительности данной структуры и зоной её сбалансированности. Особенность рассматриваемых моделей в том, что вводимые множества являются многогранными и образуют два полиэдральных комплекса в двойственности. Вектор равновесных цен задаётся точкой пересечения отвечающих друг другу многогранников. Это новый класс задач полиэдральной комплементарности [6], являющийся естественным расширением класса задач линейной комплементарности [15, 16].

Применение подхода полиэдральной комплементарности к дробно-линейной модели обмена характеризуется рядом отличительных особенностей. В [1] получено описание возникающих полиэдральных комплексов для этой модели и показано, что решение задачи полиэдральной комплементарности даёт искомый равновесный вектор цен и равновесную систему закупок участников модели. Ниже приводится детальное описание процедуры решения этой задачи и обоснование конечности процесса при необременительном предположении невырожденности, являющимся аналогом известного условия при обосновании симплекс-метода в линейном программировании. Процесс характеризуется определённой монотонностью и может рассматриваться как аналог метода Лемке для задач линейной комплементарности в случае положительности главных миноров матрицы ограничений задачи (матрицы класса P) [15, 16]. Это позволяет мотивировать гипотезу о единственности равновесных цен в рассматриваемом классе моделей.

## 1. Модель

Для полноты изложения приводим необходимые сведения о модели и базовые конструкции, описанные в [1], которые будут использованы в предлагаемом методе отыскания равновесного состояния.

Рассматривается модель обмена с фиксированными бюджетами в традиционном описании. На рынке имеется $n$ товаров, которые предлагаются $m$ участникам модели. Введём множества $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$. Для простоты считаем, что каждого товара имеется одна единица, т. е. наличие товаров характеризуется вектором $e = (1, \ldots, 1)$. Каждый участник $i$ располагает бюджетом $\lambda_i$, и его предпочтения характеризуются *функцией предпочтения* $f_i$: если $x', x'' \in \mathbb{R}^n_+$ — два различных набора товаров и $f_i(x') > f_i(x'')$, то для участника $i$ набор $x'$ предпочтительнее набора $x''$. В статье исследуется модель с дробно-линейными функциями предпочтения:

$$f_i(x) = \frac{(c^i, x) + c^i_\circ}{(d^i, x) + d^i_\circ} = \frac{c^i(x)}{d^i(x)},$$

где $c^i, d^i \in \mathbb{R}^n$, $c^i_\circ, d^i_\circ \in \mathbb{R}^1$ — заданы. При этом предполагается, что $d^i \geqslant 0$ и $d^i_\circ > 0$. Таким образом, функции $f_i$ определены на всём $\mathbb{R}^n_+$ и, как известно, являются квазивогнутыми и квазивыпуклыми одновременно.

Будем считать, что денежная единица выбрана таким образом, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

При фиксированном векторе цен $p \in \mathbb{R}^n_+$ участник $i$ приобретает набор $x^i$, стремясь при этом максимизировать свою функцию предпочтения, т. е. решает оптимизационную задачу вида

$$f_i(x^i) \to \max!, \tag{1}$$
$$(p, x^i) \leqslant \lambda_i, \tag{2}$$
$$x^i \geqslant 0. \tag{3}$$

Неравенство (2) принято называть *бюджетным ограничением*.

Если при $p = \widehat{p}$ все задачи участников разрешимы и среди оптимальных решений найдутся такие $\widehat{x}^i$, что выполняется баланс товаров

$$\sum_{i=1}^{m} \widehat{x}^i = e, \tag{4}$$

то говорят, что вектор цен $\widehat{p}$ и совокупность векторов $\{\widehat{x}^i\}$ задают *состояние равновесия* модели.

Даже в линейной модели обмена, когда все функции $f_i$ являются линейными, равновесие существует не всегда [13]. Более слабым является понятие равновесия «free disposal» [11], когда условие (4) баланса товаров

заменяется парой условий:

$$\sum_{i=1}^{m} \widehat{x}^i \leqslant e, \tag{5}$$

$$\left(\widehat{p}, \sum_{i=1}^{m} \widehat{x}^i - e\right) = 0. \tag{6}$$

В силу $\widehat{p} \geqslant 0$ из (5) и (6) следует, что $\widehat{p}_j \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{x}^i_j - 1\right) = 0$ при всех $j \in J$. Это означает, что не полностью раскупаемые товары имеют нулевую цену.

Для того чтобы различать эти два понятия равновесия, будем равновесие «free disposal» называть *слабым равновесием*, а равновесие в первоначальном классическом смысле — *строгим равновесием*. Ясно, что строгое равновесие является и слабым. Слабое, но не строгое равновесие назовём *существенно слабым*.

Вопросы существования равновесия в моделях конкурентной экономики достаточно полно изложены в обзорной статье Дебре [11]. Из рассмотрений [1] следует , что для дробно-линейной модели обмена с фиксированными бюджетами слабое равновесие существует в предположении ненасыщаемости функций предпочтения $f_i$ на $\mathbb{R}^n_+$: в $\mathbb{R}^n_+$ нет точек максимума этих функций. Показано также, что это условие эквивалентно требованию, что $\forall i \in I \ \exists j : \gamma^i_j > 0$, где

$$\gamma^i_j = \det \begin{vmatrix} c^i_j & c^i_\circ \\ d^i_j & d^i_\circ \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Если при выполнении условия ненасыщаемости задача участника $i$ разрешима, то на оптимальном решении бюджетное ограничение выполняется как равенство. Поэтому для равновесного вектора цен из (6) следует, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \widehat{p}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Ввиду этого ограничимся в дальнейшем рассмотрением векторов цен $p$ в *симплексе цен* $\sigma = \left\{ p \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}$. Тогда условие (6) заведомо выполняется и его можно опустить в определении слабого равновесия, оставляя лишь условие (5).

## 2. Полиэдральные комплексы

Перейдём к описанию порождаемых моделью полиэдральных комплексов $\omega$ и $\xi$ [1], на рассмотрении которых базируется предлагаемый алгоритм отыскания равновесия.

Введём множество

$$\Gamma_+ = \big\{(i,j) \in I \times J \mid \gamma^i_j > 0\big\}, \tag{8}$$

где $\gamma^i_j$ определяются в соответствии с (7).

Комплекс $\omega$ состоит из многогранных множеств — *клеток* $\Omega(\mathcal{B})$, каждая из которых отвечает некоторой структуре $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$. Описание совокупности $\mathfrak{B}$ и клеток комплекса $\omega$ состоит в следующем.

Любому набору векторов $\{x^i\}_{i\in I}$, задающих закупки участников модели, можно сопоставить множество $\mathcal{B} \subset I \times J$, характеризующее *структуру* закупок: $\mathcal{B} = \big\{(i,j) \in I \times J \mid x^i_j > 0\big\}$. В дальнейшем *структурой* будем называть любое множество $\mathcal{B} \subset I \times J$.

Каждой структуре $\mathcal{B}$ сопоставим граф $G(\mathcal{B})$ с множеством вершин $\{1,\dots,m+n\}$ и множеством дуг $\{(i, m+j) \mid (i,j) \in \mathcal{B}\}$. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{B}$ таких структур $\mathcal{B}$, что графы $G(\mathcal{B})$ не содержат циклов и обладают *свойством i-накрываемости*:

$$\forall\ i \in I \ \ \exists\, (i,j) \in \mathcal{B}, \tag{9}$$

т. е. вершины $i \in I$ не являются изолированными вершинами графа $G(\mathcal{B})$.

В [1] доказана

**Теорема 1.** *Для равновесного вектора цен $\widehat{p}$ существуют структура $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ и равновесный набор векторов закупок $\{\widehat{x}^i\}$ такие, что $\widehat{x}^i_j = 0$ при $(i,j) \notin \mathcal{B}$.*

В условиях этой теоремы величины $z_{ij} = \widehat{p}_j \widehat{x}^i_j$ будут удовлетворять системе уравнений классической транспортной задачи [2, 7]:

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = \lambda_i, \quad i = 1,\dots,m, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} \ = p_j, \quad j = 1,\dots,n, \tag{11}$$

и дополнительному условию

$$z_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin \mathcal{B}. \tag{12}$$

Граф $G(\mathcal{B})$ для $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ в общем случае не является связным. Пусть $\tau$ — число компонент связности этого графа. Для совместности условий (10)–(12) нужно, чтобы на каждой компоненте связности выполнялось условие баланса правых частей:

$$\sum_{j\in J_\nu} p_j = \sum_{i\in I_\nu} \lambda_i, \quad \nu = 1,\dots,\tau, \tag{13}$$

где $I_\nu \subset I$ и $J_\nu \subset J$ отвечают множеству вершин $\nu$-й компоненты, состоящему из вершин $i \in I_\nu$ и вершин $m+j$ при $j \in J_\nu$. При $I_\nu = \varnothing$ правая часть в (13) считается равной нулю.

При $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ каждая компонента связности графа $G(\mathcal{B})$ является деревом, и при выполнении условий (13) величины $z_{ij}, (i,j) \in \mathcal{B}$, из уравнений (10)–(12) определяются однозначно как линейные функции от $p_j$: $z_{ij} = z_{ij}^{\mathcal{B}}(p)$.

В результате получаем описание множества $\Omega(\mathcal{B})$ как множества решений линейной системы уравнений (13) и системы неравенств

$$z_{ij}^{\mathcal{B}}(p) \geqslant 0, \quad (i,j) \in \mathcal{B}, \tag{14}$$

при дополнительном условии $p \in \sigma$.

Клетки комплекса $\xi$ также отвечают структурам $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$. Сохраним для этих множеств обозначение $\widetilde{\Xi}(\mathcal{B})$ из [1]. Эти множества являются многогранными и представляют собой множества решений систем линейных уравнений и неравенств следующего вида:

$$\gamma_k^i p_j - \gamma_j^i p_k = \lambda_i \delta_{jk}^i, \qquad (i,j),(i,k) \in \mathcal{B}, \tag{15}$$

$$\gamma_l^i p_j - \gamma_j^i p_l \leqslant \lambda_i \delta_{jl}^i, \qquad (i,j) \in \mathcal{B}, (i,l) \in \Gamma_+ \setminus \mathcal{B}, \tag{16}$$

где коэффициенты $\gamma_k^i, \gamma_j^i, \gamma_l^i$ определяются в соответствии с (7) и

$$\delta_{jk}^i = \det \begin{vmatrix} c_j^i & c_k^i \\ d_j^i & d_k^i \end{vmatrix}, \quad \delta_{jl}^i = \det \begin{vmatrix} c_j^i & c_l^i \\ d_j^i & d_l^i \end{vmatrix}.$$

В результате каждой структуре $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, отвечают два многогранных множества: $\Omega(\mathcal{B})$ и $\widetilde{\Xi}(\mathcal{B})$. При этом любая их грань также принадлежит рассматриваемой совокупности множеств, т. е. порождается некоторой структурой $\mathcal{B}' \subset \Gamma_+$, $\mathcal{B}' \in \mathfrak{B}$. Это свойство является определяющим для полиэдральных комплексов. Легко видеть, что из $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ следует $\Omega(\mathcal{B}_1) \subset \Omega(\mathcal{B}_2)$ и $\widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_1) \supset \widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_2)$. Поэтому о комплексах $\omega$ и $\xi$ естественно говорить как о *двойственных* друг другу.

Введённым двойственным друг другу полиэдральным комплексам можно сопоставить точечно-множественное отображение $F$:

$$F(p) = \widetilde{\Xi}(\mathcal{B}), \quad p \in \Omega^0(\mathcal{B}),$$

где $\Omega^0(\mathcal{B})$ — относительная внутренность множества $\Omega(\mathcal{B})$. Задача отыскания неподвижной точки этого отображения, т. е. пары отвечающих друг другу множеств $\Omega(\mathcal{B})$ и $\widetilde{\Xi}(\mathcal{B})$ с непустым пересечением, является частным случаем задачи полиэдральной комплементарности [6].

В [1] показано, что верна

**Теорема 2.** *Если $r \in \Omega(\mathcal{B}) \cap \widetilde{\Xi}(\mathcal{B})$, то $\mathcal{B}$ — равновесная структура, а $r$ — равновесный вектор цен модели.*

### 3. Метод встречных траекторий

Предлагаемый процесс отыскания равновесной структуры $\widehat{\mathcal{B}}$ является реализацией общего метода для задач полиэдральной комплементарности, описанного в [6], и состоит в построении двух траекторий изменяющихся векторов цен $p$ и $q$, которые в конце процесса встречаются в равновесной точке $\widehat{p}$. Этим и объясняется название метода.

Заметим, что для $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$, фигурирующая в теореме 3 точка $r$ определяется единственным образов заданием самой структуры $\mathcal{B}$. Справедлива

**Лемма 1.** *Любая структура $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$, однозначно порождает точку $p = r(\mathcal{B})$ как решение объединённой системы уравнений* (13), (15).

Доказательство. Структуре $\mathcal{B}$ отвечает граф $G(\mathcal{B})$. Рассмотрим $\nu$-ю компоненту связности этого графа и отвечающие ей множества $I_\nu$, $J_\nu$. Так как $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, то выполняется условие $i$-накрываемости (9), и множество $J_\nu$ непусто. Если оно одноэлементно, т.е. $J_\nu = \{j_\circ\}$, то из (13) имеем $p_{j_\circ} = \sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i$. При этом в случае $I_\nu = \varnothing$ будет $p_{j_\circ} = 0$.

Пусть множество $J_\nu$ имеет более одного элемента. Как легко видеть, принимая для какого-либо $k \in J_\nu$ величину $p_k$ за параметр $v$, можно ввиду связности компоненты получить из системы (15) все остальные $p_j$, $j \in J_\nu$, как аффинные функции введённого параметра $v$. При этом ввиду (8) и того, что $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$, все коэффициенты при $v$ будут положительны:

$$p_j = \alpha_j v + \beta_j, \quad \alpha_j > 0,\ j \in J_\nu. \tag{17}$$

Параметр $v$ определится после подстановки таких $p_j$ в соответствующее уравнение системы (13):

$$v \sum_{j \in J_\nu} \alpha_j + \sum_{j \in J_\nu} \beta_j = \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i,$$

и здесь $\sum\limits_{j \in J_\nu} \alpha_j > 0$. Лемма 1 доказана.

Описание одного шага процесса. Перейдём к формальному описанию алгоритма отыскания состояния равновесия.

Пусть проделано уже $s$ шагов. К началу очередного, $(s+1)$-го шага имеется некоторая структура $\mathcal{B}_s \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{B}_s \subset T$, и точки $p^s \in \Omega(\mathcal{B}_s)$ и $q^s \in \widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_s)$.

1. Находим точку $r^s = r(\mathcal{B}_s)$, решая объединённую систему уравнений (13), (15), соответствующую структуре $\mathcal{B}_s$. По лемме 1 эта система имеет единственное решение.

2. Полагаем $p(t) = p^s + t(r^s - p^s)$ и $q(t) = q^s + t(r^s - q^s)$. Находим максимальное $t = t_s^* \in [0,1]$ такое, что ещё $p(t) \in \Omega(\mathcal{B}_s)$ и $q(t) \in \widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_s)$, т. е. при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$ для $p = p(t)$ остаются справедливыми неравенства (14), а для $p = q(t)$ — неравенства (16).

Если $t_s^* = 1$, то по теореме 2 вектор $p = r^s$ — равновесный вектор цен. При $t_s^* < 1$ дальнейшие действия зависят от того, какое условие сдерживает увеличение $t$.

2.1. Пусть таковым является условие $p(t) \in \Omega(\mathcal{B}_s)$. Тогда увеличению $t$ препятствует условие неотрицательности некоторого $z_{ij}(p(t))$, определяемого для $\mathcal{B}_s$ из (10)–(12), скажем, $z_{i_\circ j_\circ}(p(t))$. Переходим к следующему шагу, полагая $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s \backslash \{(i_\circ, j_\circ)\}$, $p^{s+1} = p(t_s^*)$, $q^{s+1} = q(t_s^*)$. При этом компонента связности графа $G(\mathcal{B}_s)$, содержащая дугу $(i_\circ, m + j_\circ)$, распадётся на две компоненты. Но условие $i$-накрываемости (9) не нарушится, так как если $(i_\circ, m + j_\circ)$ — единственная дуга графа $G(\mathcal{B}_s)$, инцидентная вершине $i_\circ$, то $z_{i_\circ j_\circ}(p(t)) \equiv \lambda_{i_\circ} > 0$. Следовательно, $\mathcal{B}_{s+1} \in \mathfrak{B}$.

2.2. Пусть увеличение $t$ сдерживается условием $q(t) \in \widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_s)$. Тогда при $p = q(t_s^*)$ для некоторой пары $(i_\circ, l_\circ)$ обращаются в равенство отвечающие ей неравенства из (16), т. е. у участника $i_\circ$ появляется новый «предпочтительный» товар $l_\circ$. При этом возможны два подслучая.

(i) Дуга $(i_\circ, m + l_\circ)$ соединяет две различные компоненты связности графа $G(\mathcal{B}_s)$, т. е. при добавлении этой дуги не образуется цикла. Переходим к следующему шагу с $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s \cup \{(i_\circ, l_\circ)\}$, $p^{s+1} = p(t_s^*)$, $q^{s+1} = q(t_s^*)$.

(ii) Вершины $i_\circ$ и $(m + l_\circ)$ принадлежат одной компоненте связности. Тогда дуга $(i_\circ, m + l_\circ)$ замыкает цикл на графе $G(\mathcal{B}_s)$. Выполняем стандартную процедуру метода потенциалов [2, 7] для транспортных задач линейного программирования: увеличиваем насколько возможно величину $z_{i_\circ l_\circ}$, корректируя прочие величины $z_{ij}$ на цикле так, чтобы не нарушалась их неотрицательность и соблюдались балансы (10) и (11) в вершинах цикла. Пусть при этом увеличение $z_{i_\circ l_\circ}$ сдерживается условием неотрицательности величины $z_{i'j'}$, т. е. она обращается в нуль. Переходим к следующему шагу с $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s \cup \{(i_\circ, l_\circ)\} \backslash \{(i', j')\}$, $p^{s+1} = p(t_s^*)$, $q^{s+1} = q(t_s^*)$. Ясно, что $\mathcal{B}_{s+1} \in \mathfrak{B}$ и $p^{s+1} \in \Omega(\mathcal{B}_{s+1})$, $q^{s+1} \in \widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_{s+1})$.

Определение стартовых $\mathcal{B}_0$, $p^0$, $q^0$. В качестве $q^0$ можно взять любой положительный вектор из симплекса $\sigma$. Находим решения задач участников (1)–(3) при $p = q^0$ . Незначительной вариацией $q^0$ можно добиться, чтобы решение каждой задачи было единственным: $\widehat{x}^i_{j_i} = \lambda_i / q^0_{j_i}$

и $\widehat{x}_k^i = 0$ при $k \neq j_i$. Множество $\mathcal{B}_0$ формируется из пар $(i, j_i)$. Очевидно, что $\mathcal{B}_0 \in \mathfrak{B}$. Кроме того, как несложно убедиться, из $f_i(\widehat{x}^i) > f_i(0)$ получаем $\gamma_{j_i}^i > 0$, и потому $\mathcal{B}_0 \subset \Gamma_+$. Из рассмотрений [1] следует, что неравенства $\gamma_{j_i}^i > 0$ и $q^0 > 0$ являются достаточными для $q^0 \in \widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_0)$. Компоненты вектора $p^0$ задаются формулами $p_k^0 = \sum\limits_{i \in I_k}$, где $I_k = \{i \mid j_i = k\}$. При $I_k = \varnothing$ считаем $p_k^0 = 0$. Имеем $p^0 \in \Omega(\mathcal{B}_0)$.

## 4. Обоснование метода

Сопоставим каждой структуре $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$, аффинные многообразия $L(\mathcal{B})$ и $M(\mathcal{B})$ — множества решений систем линейных уравнений (13) и (15) соответственно. Имеем $\Omega(\mathcal{B}) \subset L(\mathcal{B})$ и $\widetilde{\Xi}(\mathcal{B}) \subset M(\mathcal{B})$.

**Лемма 2.** *Подпространства, сдвигами которых являются многобразия $L(\mathcal{B})$ и $M(\mathcal{B})$, алгебраически взаимно дополняют друг друга: любая точка $\theta$ может быть представлена единственным образом в виде $\theta = p - q$ при $p \in L(\mathcal{B})$, $q \in M(\mathcal{B})$.*

Доказательство. Анализ систем (13) и (15) показывает, что размерности многообразий $L(\mathcal{B})$ и $M(\mathcal{B})$ равны $n - \tau$ и $\tau$ соответственно, т. е. сумма их размерностей совпадает с размерностью всего пространства. Кроме того, как показано в лемме 1, объединённая система (13), (15) однозначно разрешима. Значит, подпространства, отвечающие многобразиям $L(\mathcal{B})$ и $M(\mathcal{B})$, алгебраически взаимно дополняют друг друга. Чтобы получить для произвольной точки $\theta$ разложение $\theta = p - q$, нужно выполнить процедуру, аналогичную приведённой в разд. 3 при рассмотрении точки $r(\mathcal{B})$. Если при этом множество $J_\nu$, соответствующее $\nu$-й компоненте связности графа $G(\mathcal{B})$, одноэлементно, т. е. $J_\nu = \{j_\circ\}$, то $p_{j_\circ} = \sum\limits_{i \in I_\nu} \lambda_i$ и $q_{j_\circ} = p_{j_\circ} - \theta_{j_\circ}$. Если $J_\nu$ содержит более одного элемента, то используем (15) для получения коэффициентов $\alpha_j, \beta_j$ в формулах $q_j = \alpha_j v + \beta_j$, $j \in J_\nu$, задающих $q_j$ как линейные функции одного параметра $v$. Затем для $j \in J_\nu$ полагаем $p_j = \theta_j + q_j = \theta_j + \alpha_j v + \beta_j$ и определяем значение параметра $v$ после подстановки таких $p_j$ в соответствующее уравнение системы (13). Получив $v$, найдём по приведённым формулам требуемые $p_j$ и $q_j$. Указанные действия нужно проделать для каждой компоненты связности графа $G(\mathcal{B})$. Лемма 2 доказана.

Переходя к анализу сходимости предлагаемого метода, поставим в соответствие произвольной структуре закупок $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$, множество $\Theta(\mathcal{B}) = \Omega(\mathcal{B}) - \widetilde{\Xi}(\mathcal{B})$. Так как множества $\Omega(\mathcal{B})$ и $\widetilde{\Xi}(\mathcal{B})$ являются полиэдральными, то полиэдральным будет и множество $\Theta(\mathcal{B})$.

**Лемма 3.** *Если на каждом шаге процесса $t_s^* > 0$, то структуры $\mathcal{B}_s$ не повторяются.*

Доказательство. Рассматриваемым на $(s+1)$-м шаге процесса точкам $p(t)$ и $q(t)$ отвечает точка $\theta(t) = p(t) - q(t) = (1-t)(p^s - q^s)$. При $t = 0$ имеем $p(0) = p^s \in \Omega(\mathcal{B}_s)$, $q(0) = q^s \in \widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_s)$ и, следовательно, $\theta(0) = p^s - q^s = \theta^s \in \Theta(\mathcal{B}_s)$. При $t = t_s^*$ получаем

$$\theta(t_s^*) = p^{s+1} - q^{s+1} = \theta^{s+1}.$$

По выбору $t_s^*$ имеем $\theta^{s+1} \in \Theta(\mathcal{B}_s)$ и $\theta^{s+1} = (1 - t_s^*)\theta^s$. Отсюда следует, что $\theta^{s+1} = \mu_{s+1}\theta^0$ при $\theta^0 = p^0 - q^0$ и $\mu_{s+1} = (1 - t_s^*)\ldots(1 - t_0^*)$. Имеем $\mu_{s+1} = (1 - t_s^*)\mu_s$ и $\mu_{s+1} < \mu_s$ при $t_s^* > 0$.

Из изложенного следует, что все получаемые точки $\theta^s$ располагаются на луче $\Lambda = \{\mu\theta^0 \mid \mu \geqslant 0\}$, монотонно приближаясь с ростом $s$ к его вершине.

При $t \in [0, t_s^*]$ имеем $\theta(t) \in \Lambda$ и при этом $\theta(t) = p(t) - q(t)$, $p(t) \in L(\mathcal{B}_s)$, $q(t) \in M(\mathcal{B}_s)$. По лемме 2 это представление точки $\theta(t)$ единственно. Таким образом, при движении точки $\theta(t)$ по лучу $\Lambda$ отвечающие ей точки $p(t)$ и $q(t)$ также движутся по лучам в многобразиях $L(\mathcal{B}_s)$ и $M(\mathcal{B}_s)$ соответственно. При $t > t_s^*$ одна из них покидает «своё» множество ($\Omega(\mathcal{B}_s)$ или $\widetilde{\Xi}(\mathcal{B}_s)$), вследствие чего точка $\theta(t)$ покидает множество $\Theta(\mathcal{B}_s)$. Так как пересечение любого луча с выпуклым множеством односвязно, то

$$\mu_{s+1} = \min\{\mu \mid \mu\theta^0 \in \Lambda \cap \Theta(\mathcal{B}_s)\}.$$

Это означает, что $\mu_{s+1}$ однозначно определяется множеством $\mathcal{B}_s$. По предположению все $t_s^*$ положительны, поэтому $\mu_s$ строго убывают. Следовательно, ни одно из пройденных множеств $\mathcal{B}_s$ не повторяется. Лемма 3 доказана.

Покажем, что положительность $t_s^*$ на каждом шаге можно гарантировать при выполнении определённого условия невырожденности, аналогичного известному условию при доказательстве конечности симплекс-метода в линейном программировании.

Для формулировки этого условия следует избавиться от определённой избыточности в системе уравнений и неравенств (15), (16). С этой целью для каждого участника $i \in I$ при фиксированном векторе $q \in \mathbb{R}^n$ введём на множестве $J_i^+ = \{j \in J \mid \gamma_j^i > 0\}$ бинарное отношение $\succcurlyeq_i$ — отношение «предпочтения» в множестве товаров:

$$j \succcurlyeq_i l \iff \gamma_l^i q_j - \gamma_j^i q_l \leqslant \lambda_i \delta_{jl}^i.$$

**Лемма 4.** *Отношение* $\succcurlyeq_i$ *транзитивно: из* $j \succcurlyeq_i k$, $k \succcurlyeq_i l$ *следует* $j \succcurlyeq_i l$.

В доказательстве леммы 4 используется

**Лемма 5.** *При любых числах* $c_\circ, d_\circ, c_1, d_1, c_2, d_2, c_3, d_3$ *выполняется равенство*

$$\det\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \det\begin{vmatrix} c_3 & c_\circ \\ d_3 & d_\circ \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \det\begin{vmatrix} c_1 & c_\circ \\ d_1 & d_\circ \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \det\begin{vmatrix} c_2 & c_\circ \\ d_2 & d_\circ \end{vmatrix}.$$

Чтобы убедиться в справедливости приведённого равенства, достаточно просто раскрыть определители.

Доказательство леммы 4. Пусть $j \succcurlyeq_i k$, $k \succcurlyeq_i l$. Это означает, что выполняются неравенства $\gamma^i_k q_j - \gamma^i_j q_k \leqslant \lambda_i \delta^i_{jk}$ и $\gamma^i_l q_k - \gamma^i_k q_l \leqslant \lambda_i \delta^i_{kl}$. Домножив первое неравенство на $\gamma^i_l / \gamma^i_j$ и прибавив ко второму, получим неравенство

$$\frac{\gamma^i_k \gamma^i_l}{\gamma^i_j} q_j - \gamma^i_k q_l \leqslant \lambda_i \delta^i_{kl} + \lambda_i \delta^i_{jk} \frac{\gamma^i_l}{\gamma^i_j}.$$

Домножив это неравенство на $\gamma^i_j / \gamma^i_k$, получим

$$\gamma^i_l q_j - \gamma^i_j q_l \leqslant \lambda_i \left[ \delta^i_{kl} \frac{\gamma^i_j}{\gamma^i_k} + \delta^i_{jk} \frac{\gamma^i_l}{\gamma^i_k} \right].$$

Для получения $j \succcurlyeq_i l$ остаётся показать, что выражение в квадратных скобках равно $\delta^i_{jl}$. Для этого должно выполняться

$$\delta^i_{kl} \frac{\gamma^i_j}{\gamma^i_k} + \delta^i_{jk} \frac{\gamma^i_l}{\gamma^i_k} = \delta^i_{jl},$$

что эквивалентно $\delta^i_{jk}\gamma^i_l + \delta^i_{kl}\gamma^i_j = \delta^i_{jl}\gamma^i_k$. Легко видеть, что это следует из леммы 5 при $c_\circ = c^i_\circ, d_\circ = d^i_\circ, c_1 = c^i_j, d_1 = d^i_j, c_2 = c^i_k, d_2 = d^i_k, c_3 = c^i_l$, $d_3 = d^i_l$. Лемма 4 доказана.

Отношению $\succcurlyeq_i$ отвечает отношение эквивалентности:

$$j \sim_i l \quad \Longleftrightarrow \quad j \succcurlyeq_i l, \;\; l \succcurlyeq_i j.$$

Используя введённые отношения в множестве товаров, можно сокращённо записать системы (15), (16) в виде

$$j \sim_i k, \quad (i,j), \;\; (i,k) \in \mathcal{B},$$

$$j \succcurlyeq_i l, \quad (i,j) \in \mathcal{B}, \ (i,l) \in \Gamma_+ \setminus \mathcal{B}.$$

Ясно, что при такой записи систем присутствует определённая избыточность. Можно для каждого $i$ ограничиться только одной парой $(i,j) \in \mathcal{B}$. Это никак не скажется на множестве решений этих систем. Изменённые системы назовём *минимальными* . В дальнейшем будем рассматривать только минимальные системы.

Условие невырожденности. Для любой структуры $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, $\mathcal{B} \subset \Gamma_+$, и любой точки $\theta \in \Lambda \cap \Theta(\mathcal{B})$ при подстановке точек $p \in L(\mathcal{B})$ и $q \in M(\mathcal{B})$ из разложения $\theta = p - q$ в соответствующие системы неравенств (14), (16) разве лишь одно неравенство выполняется как равенство.

Геометрическая интерпретация этого условия состоит в том, что луч $\Lambda$ пересекает границу многогранника $\Theta(\mathcal{B})$ лишь по граням размерности $n-1$, т. е. граням, аффинными носителями которых являются гиперплоскости. Ясно, что этого можно добиться малыми вариациями стартовых точек $p^0$ и $q^0$.

**Теорема 3.** *Метод встречных траекторий при выполнении условия невырожденности через конечное число шагов получает состояние равновесия модели.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что $t_s > 0$ при $s \geqslant 1$. Тогда по лемме 3 множества $\mathcal{B}_s$ не повторяются. Поэтому процесс конечен в силу конечности семейства $\mathfrak{B}$.

Рассмотрим детально ситуации, возникающие при выполнении одного шага процесса.

Пусть на $s$-м шаге сдерживающим при выборе $t^*_{s+1}$ оказалось условие неотрицательности $z_{i_\circ j_\circ}(p(t))$ (см. описание алгоритма, случай 2.1). Тогда $z_{i_\circ j_\circ}(r^s) < 0$ при $t > t^*_s$. При переходе к следующему шагу последует $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s \setminus \{(i_\circ, j_\circ)\}$. Проанализируем изменения, которые произойдут при переходе от $\mathcal{B}_s$ к $\mathcal{B}_{s+1}$ в описании множеств $\Omega(\mathcal{B})$ и $\widetilde{\Xi}(\mathcal{B})$ и в объединённой системе уравнений (13), (15).

Ясно, что из системы (14) в описании множества $\Omega(\mathcal{B})$ удаляется условие $z_{i_\circ j_\circ}(p) \geqslant 0$, оно заменится условием $z_{i_\circ j_\circ} = 0$ в системе уравнений для определения величин $z_{ij} = z^{\mathcal{B}_{s+1}}_{ij}(p)$. Это приводит к замене одного из уравнений баланса (13) парой новых уравнений того же типа (их сумма даёт исключаемое уравнение). Из системы (15) исключаются уравнения вида

$$\gamma^{i_\circ}_k p_{j_\circ} - \gamma^{i_\circ}_{j_\circ} p_k = \lambda_{i_\circ} \delta^{i_\circ}_{j_\circ k}, \quad (i_\circ, k) \in \mathcal{B}, \ k \neq j_\circ. \tag{18}$$

Они становятся неравенствами и добавляются в систему (16) в описании множества $\widetilde{\widetilde{\Xi}}(\mathcal{B}_{s+1})$. В точке $q^{s+1}$ эти неравенства выполняются как равенства. Покажем, что в точке $r^{s+1}$ они выполняются как строгие неравенства и поэтому не являются сдерживающими для $t^*_{s+1}$. Остальные неравенства новой системы (16) в точке $q^{s+1}$ выполняются как строгие в силу условия невырожденности, как и неравенства новой системы (14) в точке $p^{s+1}$. Поэтому $t^*_{s+1} > 0$.

Покажем, что требуемые неравенства для точки $r^{s+1}$ выполнены. Удаление пары $(i_\circ, j_\circ)$ из структуры $\mathcal{B}_s$ вызывает удаление из графа $G(\mathcal{B}_s)$ дуги $(i_\circ, m + j_\circ)$. Соответствующая компонента связности графа распадётся на две компоненты. Пусть для простоты граф $G(\mathcal{B}_s)$ был связным. Распадение его на две компоненты связности приведёт к разбиению на две части множеств участников и товаров: $I = I' \cup I''$, $J' \cup J''$. Считаем, что $i_\circ \in I'$ и $j_\circ \in J''$.

Несложно убедиться, что при определении величин $z_{ij}$ из условий (10)–(12) при $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$ имеем

$$z_{i_\circ j_\circ}(p) = \sum_{i \in I'} \lambda_i - \sum_{j \in J'} p_j. \tag{19}$$

Так как $z_{i_\circ j_\circ}(r^s) < 0$ и $z_{i_\circ j_\circ}(r^{s+1}) = 0$, из (19) имеем соответственно

$$\sum_{i \in I'} \lambda_i < \sum_{j \in J'} r^s_j, \tag{20}$$

$$\sum_{i \in I'} \lambda_i = \sum_{j \in J'} r^{s+1}_j. \tag{21}$$

Заметим, что для $j \in J'$ как $r^s_j$, так и $r^{s+1}_j$ должны удовлетворять системе уравнений (15). Значит, они получаются по формулам (17) (при $J_\nu = J'$), но при разных значениях параметра $v$. Так как в этих формулах $\alpha_j > 0$, то при переходе от $r^s_j$ к $r^{s+1}_j$ либо все компоненты $r_j$ убывают, либо все возрастают. Но в силу (20) и (21) имеем

$$\sum_{j \in J'} r^{s+1}_j < \sum_{j \in J'} r^s_j.$$

Поэтому

$$r^{s+1}_j < r^s_j \quad \forall j \in J'. \tag{22}$$

Аналогично (19) можно получить

$$z_{i_\circ j_\circ}(p) = -\sum_{i \in I''} \lambda_i + \sum_{j \in J''} p_j.$$

Если опираться на эту формулу и проделать аналогичные выкладки для второй компоненты связности, то получим

$$r_j^{s+1} > r_j^s \quad \forall j \in J''. \tag{23}$$

Покажем, что

$$\gamma_k^{i_\circ} r_{j_\circ}^{s+1} - \gamma_{j_\circ}^{i_\circ} r_k^{s+1} < \lambda_{i_\circ} \delta_{j_\circ k}^{i_\circ}, \quad (i_\circ, k) \in \mathcal{B}_{s+1}, k \neq j_\circ. \tag{24}$$

При $p = r^s$ из (18) имеем

$$\gamma_k^{i_\circ} r_{j_\circ}^{s} - \gamma_{j_\circ}^{i_\circ} r_k^{s} = \lambda_{i_\circ} \delta_{j_\circ k}^{i_\circ}, \quad (i_\circ, k) \in \mathcal{B}_{s+1}, k \neq j_\circ. \tag{25}$$

Но $j_\circ \in J''$, а при $(i_\circ, k) \in \mathcal{B}_{s+1}$ имеем $k \in J'$ и $r_{j_\circ}^{s+1} > r_{j_\circ}^s$, $r_k^{s+1} < r_k^s$ в силу (22) и (23). Отсюда и из (25) следует (24). Это завершает рассмотрение случая 2.1.

Анализ случая 2.2(i) идёт по аналогичной схеме, поэтому не приводим его полностью. Отметим лишь, что вся логическая последовательность отслеживается в обратном порядке: теперь имеем $i_\circ \in I'$, $l_\circ \in J''$, $z_{i_\circ l_\circ}(r^s) = 0$, $\gamma_k^{i_\circ} r_{l_\circ}^s - \gamma_{l_\circ}^{i_\circ} r_k^s = \lambda_{i_\circ} \delta_{l_\circ k}^{i_\circ}$, $(i_\circ, k) \in \mathcal{B}_{s+1}$, $k \neq l_\circ$, и нужно показать, что отсюда для $r^{s+1}$ следует

$$\sum_{i \in I'} \lambda_i - \sum_{j \in J'} r_j^{s+1} > 0.$$

Это означает, что $z_{i_\circ j_\circ}(r^{s+1}) > 0$. Дополнительное условие $z_{i_\circ j_\circ}(p) \geqslant 0$ в системе (14) не будет сдерживающим при определении $t_{s+1}^*$. Остальные неравенства новой системы (14) в точке $p^{s+1}$ строгие, как и неравенства новой системы (16) в точке $q^{s+1}$. Это следует из условия невырожденности. Тем самым $t_{s+1}^* > 0$.

Рассмотрим случай 2.2(ii). Его качественное отличие от рассмотренных выше в том, что при переходе от $\mathcal{B}_s$ к $\mathcal{B}_{s+1}$ в объединённой системе (13), (15) изменяется только система (15). Пусть в минимальной системе (15) зафиксирована пара $(i', k')$. В системе (15) уравнение, отвечающее паре $(i', j')$, поменяется местами с неравенством из системы (16), отвечающим паре $(i_\circ, j_\circ)$ (при этом, естественно, знак равенства заменится знаком неравенства, и наоборот).

В точке $q^{s+1}$ новое неравенство выполняется как равенство. Покажем, что в точке $r^{s+1}$ оно будет выполняться как строгое неравенство, а потому не будет сдерживающим для $t_{s+1}^*$. Рассмотрим ситуацию подробнее.

Для простоты считаем, что граф $G(\mathcal{B}_s)$ связен. Если удалить из графа дугу $(i', m+j')$, то граф распадётся на две компоненты связности, что вызовет соответствующее разбиение множеств $I$ и $J$: $I = I' \cup I''$, $J = J' \cup J''$. При этом вершины $i_\circ, i'$ будут на одной компоненте связности, а вершины $(m+l_\circ), (m+j')$ — на другой. Пусть для определённости $i_\circ, i' \in I'$ и $l_\circ, j' \in J''$. Предположим, что в образовавшемся цикле помимо дуги $(i', m+j')$ присутствует дуга $(i', m+k')$ и именно пара $(i', k')$ фиксируется при формировании минимальной системы (15). Это означает, что в системе (15) присутствует уравнение

$$\gamma_{k'}^{i'} p_{j'} - \gamma_{j'}^{i'} p_{k'} = \lambda_{i'} \delta_{j'k'}^{i'}. \tag{26}$$

Пусть при формировании системы (15) фиксирована пара $(i_\circ, k)$. Ясно, что $k,\ k' \in I'$. Вектор $r^s$, решающий систему (15), удовлетворяет уравнению (26). Имеем

$$\gamma_{k'}^{i'} r_{j'}^s - \gamma_{j'}^{i'} r_{k'}^s = \lambda_{i'} \delta_{j'k'}^{i'}. \tag{27}$$

Тот факт, что при определении $t_s^*$ сдерживающим оказалось неравенство системы (16), отвечающее паре $(i_\circ, l_\circ)$, означает, что $l_\circ \succ_{i_\circ} k$ при $q = r^s$:

$$\gamma_k^{i_\circ} r_{l_\circ}^s - \gamma_{l_\circ}^{i_\circ} r_k^s < \lambda_{i_\circ} \delta_{l_\circ k}^{i_\circ}. \tag{28}$$

При переходе от $\mathcal{B}_s$ к $\mathcal{B}_{s+1}$ уравнение (26) в системе (15) заменится уравнением $\gamma_k^{i_\circ} p_{l_\circ} - \gamma_{l_\circ}^{i_\circ} p_k = \lambda_{i_\circ} \delta_{l_\circ k}^{i_\circ}$ и, следовательно,

$$\gamma_k^{i_\circ} r_{l_\circ}^{s+1} - \gamma_{l_\circ}^{i_\circ} r_k^{s+1} = \lambda_{i_\circ} \delta_{l_\circ k}^{i_\circ}.$$

Таким образом, при замене $r^s$ на $r^{s+1}$ левая часть в (28) возрастёт. Однако для $r_l^s$ и $r_l^{s+1}$ при $l \in J''$ имеют место формулы (17) (при $J_\nu = J''$), но при разных значениях параметра $v$. В этих формулах все коэффициенты $\alpha_j$ при $v$ положительны, поэтому либо $r_l^{s+1} < r_l^s$ при всех $l \in J''$, либо при всех $l \in J''$ имеет место противоположное неравенство. Аналогично показывается этот факт для $r_k^s$ и $r_k^{s+1}$ при $k \in J'$. Но общая сумма $\sum\limits_{j \in J' \cup J''} r_j^{s+1}$ не изменяется и остаётся равной $\sum\limits_{j \in J' \cup J''} r_j^s$ $(= \sum\limits_{i \in I' \cup I''} \lambda_i)$, так как сохраняется соответствующее уравнение системы (13). Имеем $l_\circ \in J''$ и $k \in J'$. Поэтому если $r_{l_\circ}^s > r_{l_\circ}^{s+1}$, то $r_k^s < r_k^{s+1}$, а при $r_{l_\circ}^s < r_{l_\circ}^{s+1}$ будет $r_k^s > r_k^{s+1}$. Но левая часть в (28) может возрасти только в первом варианте. Поэтому

$$r_k^{s+1} < r_k^s \ \ \forall k \in J', \quad r_l^{s+1} > r_l^s \ \ \forall l \in J''.$$

Так как $j' \in J''$, $k' \in J'$, то отсюда следует, что $r_{k'}^{s+1} < r_{k'}^{s}$ и $r_{j'}^{s+1} > r_{j'}^{s}$. Поэтому из (27) получаем $\gamma_{k'}^{i'} r_{j'}^{s+1} - \gamma_{j'}^{i'} r_{k'}^{s+1} > \lambda_{i'} \delta_{j'k'}^{i'}$ или $\gamma_{j'}^{i'} r_{k'}^{s+1} - \gamma_{k'}^{i'} r_{j'}^{s+1} < \lambda_{i'} \delta_{k'j'}^{i'}$.

Таким образом, новое неравенство в системе (16) выполняется в точке $r^{s+1}$ как строгое и не будет сдерживающим при определении $t_{s+1}^{*}$. Теорема 3 доказана.

## 5. Заключительные комментарии

1. Единственность равновесных цен модели. Можно дать следующую геометрическую интерпретацию рассмотрениям, проведённым при доказательстве теоремы 3: два многогранника $\Theta(\mathcal{B}')$, $\Theta(\mathcal{B}'')$, имеющие общую грань размерности $n-1$, расположены по разные стороны от этой грани, т. е. гиперплоскость, являющаяся аффинным носителем грани, разделяет эти множества. Рассматривались лишь грани из $\Theta(\mathcal{B})$, которые пересекает луч $\Lambda$, исходящий из нуля и проходящий через точку $\theta^{\circ} = p^{\circ} - q^{\circ}$. Однако ясно, что точку 0 можно заменить любой другой точкой $\widehat{\theta}$. Это приведёт к простому изменению рассматриваемой задачи полиэдральной комплементарности и не потребует значительных изменений в описании алгоритма. Отмеченный факт позволяет высказать гипотезу: множества $\Theta(\mathcal{B})$ не пересекаются по относительно внутренним точка и рассматриваемая задача полиэдральной комплементарности имеет единственное решение. Как следствие имеем единственность равновесного вектора цен модели. Строгому обоснованию этого утверждения автор предполагает посвятить отдельную работу.

2. Слабая монотонность отображения $F$. В [6] введено понятие *слабой монотонности* многозначного отображения: отображение $F$ называется *слабо убывающим*, если для любых различных точек $x$ и $y$ можно указать вектор $h \neq 0$ такой, что $(h, x-y) > 0$ и $(h, F(x)-F(y) \leqslant 0$, т. е. $(h, v-w) \leqslant 0$ при всех $v \in F(x)$, $w \in F(y)$.

В случае справедливости сформулированной выше гипотезы из [6] последует, что в силу единственности решения рассматриваемой задачи полиэдральной комплементарности при любой точке $\widehat{\theta}$ связанное с этой задачей отображение $F$, которое вводилось в разд. 2, является слабо убывающим.

Все вышеизложенное говорит о том, что задачи полиэдральной комплементарности, порождаемые дробно-линейными моделями обмена, являются аналогами задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матриц ограничений (класс P [15, 16]), а пред-

ложенный метод отыскания равновесных цен можно рассматривать как аналог метода Лемке [14] применительно к этому классу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Шмырёв В. И.** Дробно-линейная модель обмена. Часть 1: существование равновесия, сведение к задаче полиэдральной комплементарности //Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 1. — С. 75–95.
2. **Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.** Задачи транспортного типа. — М.: Наука, 1969. — 382 с.
3. **Шмырев В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 5. — С. 1062–1066.
4. **Шмырев В. И.** Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация. Сб. науч. тр. Вып. 31(48). — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. — С. 137–155.
5. **Шмырев В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 2. — С. 163–175.
6. **Шмырев В. И.** Задача полиэдральной комплементарности // Оптимизация. Сб. науч. тр. Вып. 44 (61). — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. — С. 82–95.
7. **Шмырев В. И.** Введение в математическое программирование. — М.: Ин-т комп. исслед., 2002. — 192 с.
8. **Шмырев В. И.** Нахождение равновесия в одном классе моделей производства — обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 65–91.
9. **Шмырев В. И.** Обобщенная линейная модель обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 74–102.
10. **Шмырев В. И.** Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Сиб. журн. индустр. математики. — 2008. — Т. XI, № 2(34). — С. 139–154.
11. **Debreu G.** Existence of competitive equilibrium // Handbook of Mathematical Economics. Vol. II. — Amsterdam: Noth–Holland Publ. Company, 1982. — P. 697–749.
12. **Eaves B. C.** A finite algorithm for the linear exchange model // J. Math. Econom. — 1976. — Vol. 3, N 2. — P. 197–204.
13. **Gale D.** The linear exchange model //J. Math. Econom. — 1976. — Vol. 3, N 2. — P. 205–209.
14. **Lemke C. E.** Bimatrix equilibrium points and mathematical programming // Manage. Sci. — 1965. — Vol. 2, N 7. P. 681–689.
15. **Lemke C. E.** A survey of complementarity theory // Variational inequalities and complementarity problems. — New York: John Wiley and Sons, Ltd, 1980. — P. 213–239.

16. **Murty K. G.** Linear complementarity, linear and nonlinear programming. — Berlin: Hedermann, 1988. — 629 p.
17. **Shmyrev V. I.** An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models // Russian contributions to game theory and eqilibrium theory. — Berlin: Springer-Verl., 2006. — P. 217–235.
18. **Shmyrev V. I.** A generalized linear exchange model // J. Appl. Ind. Math. — 2008. — Vol. 2, N 1. — P. 125–142.

*Шмырёв Вадим Иванович*,
e-mail: shmyrev@math.nsc.ru

Статья поступила
7 апреля 2009 г.

Переработанный вариант —
21 декабря 2009 г.