ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2010. Том 17, № 3. С. 19–31

УДК 519.8

О ВЕРОЯТНОСТНОМ АНАЛИЗЕ ПРИБЛИЖЁННОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О p-МЕДИАНЕ *)

Э. Х. Гимади

Аннотация. Для решения задачи размещения в так называемой p-медианной форме представлены приближённый алгоритм с временно́й сложностью $O(n^2)$ и результаты его вероятностного анализа. Входные данные определены на полном графе с расстояниями между вершинами — случайными независимыми переменными с одинаковой функцией равномерного распределения. Значение целевой функции, получаемой в результате работы алгоритма, представляет собой сумму случайных величин, анализ которых основан на оценке вероятностей больших уклонений этих сумм. В работе используется одна из предельных теорем такого анализа в форме неравенства Петрова, при этом учтён фактор зависимости суммируемых случайных величин. Результатом вероятностного анализа являются оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания представленного алгоритма, а также условия его асимптотической точности.

Ключевые слова: задача о p-медиане, приближённый алгоритм, асимптотическая точность, вероятность несрабатывания, теорема Петрова, равномерное распределение.

Введение

Одним из актуальных направлений в дискретной оптимизации является построение полиномиальных приближённых алгоритмов решения трудных задач принятия решений и их вероятностный анализ на случайных входных данных [1–3, 7, 9–11]. Вероятностный анализ алгоритмов решения трудных задач дискретной оптимизации, как правило, проводится в предположении о независимости случайных величин, входящих в исследуемую целевую функцию задачи. Нетривиальные трудности возникают при наличии зависимых составляющих в целевой функции. В качестве такого примера можно привести работу [1] по вероятностному

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08–01–00516, № 10–07–00195), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 44)

анализу приближённого алгоритма отыскания в полном случайном графе однородного связного подграфа.

В настоящей статье представлены полиномиальный приближённый алгоритм и его вероятностный анализ для известной трудноречаемой задачи дискретной оптимизации [4] — задачи размещения в так называемой p-медианной форме [8].

Запишем постановку задачи о p-медиане. Пусть $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Требуется найти булевы переменные выбора x_i и назначения x_{ij} так, чтобы минимизировать целевую функцию

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in V \setminus i} c_{ij} x_{ij} \to \min_{(x_i)(x_{ij})}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = p; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1, n}; \quad x_{ij} \leqslant x_i = x_{ii} \ \text{ для любых } i \neq j.$$

При фиксированном значении параметра p задача полиномиально разрешима. Поэтому интерес представляет случай, когда $p = p\,(n)$ — растущая функция от n.

Далее нам понадобятся некоторые определения и све́дения.

Рассмотрим алгоритм A решения оптимизационной задачи на минимум. Через $F_A(I)$ и $F^*(I)$ обозначим значения целевой функции задачи на допустимом и оптимальном решениях, полученном алгоритмом A на входе I.

Следуя [2], говорим, что алгоритм A *имеет оценки* $(\varepsilon_n, \delta_n)$ в классе K_n задач минимизации размерности n, если для каждого n выполнено неравенство

$$\Pr\{F_A(I) > (1 + \varepsilon_n) F^*(I)\} \leqslant \delta_n,$$

где $\Pr\{\cdot\}$ — вероятность соответствующего события, ε_n — *относительная погрешность*, δ_n — *вероятность несрабатывания* алгоритма A. Алгоритм называется *асимптотически точным* в классе задач

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

если для него существуют такие оценки $(\varepsilon_n, \delta_n)$, что $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\mathcal{K}$ — класс полных n-вершинных графов с расстояниями c_{ij} между вершинами i и j — независимыми случайными величинами из отрезка $(a_n, b_n),\ a_n > 0$, с одинаковой функцией распределения

$$\mathcal{P}_\xi(x) = \Pr\{\xi < x\}$$

нормализованной случайной величины

$$\xi = (c_{ij} - a_n)/(b_n - a_n), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Через $\mathrm{E}\,\theta$ будем обозначать математическое ожидание случайной величины θ. Через $\widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}$ обозначим подкласс входов задачи с равномерной функцией распределения расстояний.

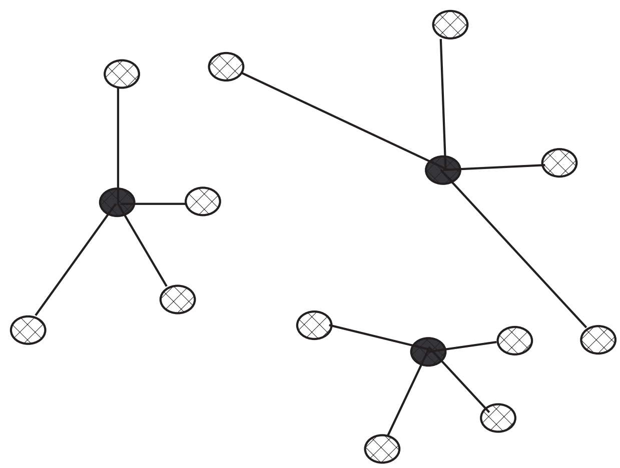

Рис. 1. Вид решения задачи о p-медиане для $n = 15$ и $p = 3$.

Для вероятностного анализа алгоритма $\widetilde{A}$, описанного в следующем разделе, нам понадобится следующая

Теорема (неравенства Петрова) [6]. *Пусть для независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с суммой $S = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ существуют положительные постоянные $g_1, \ldots, g_n$ и T такие, что*

$$\mathrm{E}\, e^{tX_j} \leqslant e^{\frac{1}{2} g_j t^2} \ (j = 1, \ldots, n)$$

для всех $0 \leqslant t \leqslant T$, и пусть $G = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j$. Тогда

$$\Pr\{S > x\} \leqslant \begin{cases} e^{-x^2/2G} & \text{при} \ \ 0 \leqslant x < GT, \\ e^{-Tx/2} & \text{при} \ \ x \geqslant GT. \end{cases}$$

1. Приближённый алгоритм решения задачи о p-медиане на классе $\widetilde{\mathcal{K}}$ и основная теорема

Алгоритм $\widetilde{A}$.

Сначала все вершины графа не помечены. Положим $m = \lceil n/p \rceil - 1$. (Далее, для упрощения изложения, считаем, что $n = (m+1)p$.)

Алгоритм состоит из p-кратного повторения следующего общего шага.

Общий шаг $k = \overline{1,p}$.

НАЧАЛО: Среди непомеченных вершин выбираются произвольная вершина в качестве медианной, а также m ближайших к ней, после чего выбранные вершины помечаются, а соответствующие переменные выбора и назначения полагаются равными 1.

КОНЕЦ.

На рис. 1 медианные вершины выделены черным цветом, остальные — в клеточку. Алгоритм $\widetilde{A}$ выполняется за время $O(n^2)$.

Полученное в результате работы алгоритма значение целевой функции может быть записано в виде $F_{\widetilde{A}} = mp\ a_n + (b_n - a_n)Y$, где Y — нормализованное значение целевой функции, представимое в виде суммы случайных величин

$$Y = \sum_{k=1}^{p} (Y_{(1)}(n_k) + \ldots + Y_{(m)}(n_k)).$$

Здесь $n_k = n - (k-1)(m+1) - 1$ равно числу непомеченных вершин в начале k-го шага алгоритма, из которых выбираются m вершин, ближайших к последней медианной; $Y_{(r)}(n_k)$ — r-я порядковая статистика, $1 \leqslant r \leqslant m$, на шаге $k = \overline{1,p}$.

В следующем разделе представлен вероятностный анализ приближённо эффективного алгоритма $\widetilde{A}$.

Сформулируем основной результат этого анализа.

Теорема 1. *Приближённый алгоритм $\widetilde{A}$ решения задачи о p-медиане на классе $\widetilde{\mathcal{K}}$ случайных входов с равномерным распределением асимптотически точен при выполнении условий*

$$\frac{b_n}{a_n} = o\left(\frac{p}{\ln p}\right); \tag{1}$$

$$p = p(n) \to \infty \text{ при } n \to \infty. \tag{2}$$

2. Вероятностный анализ алгоритма

Заметим, что в результате работы алгоритма $\widetilde{A}$ мы получаем в качестве нормализованного значения целевой функции случайную величину Y, равную сумме mp случайных величин и состоящую из p подсумм

$$Y_k = Y_{(1)}(n_k) + \ldots + Y_{(m)}(n_k), \quad 1 \leqslant k < p;\ Y_p = m\xi.$$

Каждая подсумма Y_k, в свою очередь, является случайной величиной, состоящей из m порядковых (минимальных) статистик, которые не являются независимыми случайными величинами. Поэтому мы не можем использовать теорему Петрова напрямую для всех mp случайных величин, входящих в целевую функцию, поскольку в теореме предполагается независимость каждой из них. Однако мы можем воспользоваться независимостью p случайных величин $Y_1, \ldots, Y_p$. Более определенно, рассмотрим совокупность p смещённых случайных независимых величин

$$X_k = Y_k - (1+\rho)\mathrm{E}\, Y_k, \quad k = \overline{1,p}, \tag{3}$$

где ρ — константа, зависящая от m. Наша дальнейшая цель — показать, что на входах из класса $\widetilde{\mathcal{K}}$ эти случайные величины удовлетворяют условиям теоремы Петрова при значениях констант $\rho = \frac{1}{12m}$, $T = 1/m$ и $g_k = (1+\rho)^2\beta_k^2$, где $\beta_k = \frac{m(m+1)}{2(n_k+1)}$, а именно, для любых $0 \leqslant t \leqslant T$ выполняются неравенства

$$\mathrm{E}\, e^{tX_k} \leqslant e^{\frac{1}{2}g_k t^2}, \quad k = \overline{1,p}.$$

Прежде всего нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Оценим математическое ожидание случайной величины вида $e^{tY_{(m)}(\nu)}$, где $Y_{(m)}(\nu)$ — m-я порядковая статистика в системе из $\nu \geqslant m$ независимых случайных величин, равномерно распределённых в интервале $(0,1)$.

По определению [5]

$$\mathrm{E}\, e^{tY_{(m)}(\nu)} = \nu C_{\nu-1}^{m-1} \int\limits_0^1 e^{tx} x^{m-1}(1-x)^{\nu-m} dx. \tag{4}$$

Лемма 1. *В случае равномерного распределения при всяких $r \leqslant m$ и $\nu \geqslant m$ для математического ожидания случайной величины $e^{tY_{(r)}(\nu)}$ справедлива формула*

$$\mathrm{E}\, e^{tY_{(r)}(\nu)} = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)\cdots(i+r-1)}{(\nu+1)\cdots(\nu+i)}\; t^i.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $r = 1$ и $\mu \leqslant \nu$. Поскольку для равномерного распределения $\mathcal{P}_\xi(x) = x$ функция распределения случайной величины $X_{(1)}(\mu)$ имеет вид $\mathcal{P}_{X_{(1)}(\mu)}(x) = 1 - (1-x)^\mu$, то

$$\mathrm{E}e^{tX_{(1)}(\mu+1)} = \int\limits_0^1 e^{tx} d\mathcal{P}_{X_{(1)}(\mu+1)}(x) = \int\limits_0^1 e^{tx}(\mu+1)(1-x)^\mu dx$$
$$= \frac{\mu+1}{t}\left(\mu\int\limits_0^1 e^{tx}(1-x)^{\mu-1}dx - 1\right) = \frac{\mu+1}{t}(Ee^{tX_{(1)}(\mu)} - 1).$$

Дальнейшее доказательство проведём индукцией по r и μ, причём $1 \leqslant r \leqslant \mu \leqslant \nu$.

При $r = \mu = 1$ имеем

$$\mathrm{E}e^{tX_{(1)}(1)} = \int\limits_0^1 e^{tx}dx = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{0!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{(i+1)!}.$$

Считая утверждение доказанным для выбора минимального из μ элементов, покажем справедливость его при выборе из $\mu+1$ элементов:

$$\mathrm{E}\,e^{tY_1(\mu+1)} = \int\limits_0^1 e^{tx}d\mathcal{P}_{Y_1(\mu+1)}(x) = \int\limits_0^1 e^{tx}(\mu+1)(1-x)^\mu dx$$
$$= \frac{\mu+1}{t}\left(\mu\int\limits_0^1 e^{tx}(1-x)^{\mu-1}dx - 1\right) = \frac{\mu+1}{t}(\mathrm{E}\,e^{tY_{(1)}(\mu)} - 1)$$
$$= \frac{\mu+1}{t}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{(\mu+1)\cdots(\mu+i)} - 1\right) = \frac{\mu+1}{t}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^i}{(\mu+1)\cdots(\mu+i)}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{(\mu+2)\cdots(\mu+1+i)}.$$

Таким образом, для первой порядковой статистики формула верна:

$$\mathrm{E}\,e^{tY_{(1)}(\nu)} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{(\nu+1)\cdots(\nu+i)}\ .$$

Для произвольных $1 < r \leqslant \nu$ имеем

$$\mathrm{E}\, e^{tY_{(r)}(\nu)} = \nu C_{\nu-1}^{r-1} \int\limits_0^1 e^{tx} x^{r-1}(1-x)^{\nu-r} dx$$

$$= \nu C_{\nu-1}^{r-1} \int\limits_0^1 e^{tx} x^{r-2}(1-(1-x))(1-x)^{\nu-r} dx$$

$$= \nu C_{\nu-1}^{r-1} \int\limits_0^1 e^{tx} x^{r-2}(1-x)^{\nu-r} dx - \nu C_{\nu-1}^{r-1} \int\limits_0^1 e^{tx} x^{r-2}(1-x)^{\nu-r+1} dx$$

$$= \frac{\nu}{r-1} \mathrm{E}\, e^{tY_{(r-1)}(\nu-1)} - \frac{\nu-r+1}{r-1} \mathrm{E}\, e^{tY_{(r-1)}(\nu)}$$

$$= \frac{\nu}{(r-1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)\dots(i+r-1)}{\nu(\nu+1)\dots(\nu+i-1)} t^i$$

$$- \frac{\nu-r+1}{(r-1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)\dots(i+r-1)}{(\nu+1)\dots(\nu+i)} t^i$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)\dots(i+r-1)}{(\nu+1)\dots(\nu+i)}\ t^i.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В случае равномерного распределения при любых* $\nu \geqslant m$ *и* $t \leqslant 1/m$ *для математического ожидания случайной величины* $e^{tY_{(m)}(\nu)}$ *справедлива оценка*

$$\mathrm{E}\, e^{tY_{(m)}(\nu)} \leqslant \exp\left(\frac{mt}{\nu+1}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{mt}{\nu+1}\right)^2\right).$$

Доказательство. Пусть $\alpha = m/\nu + 1$. Следуя лемме 1, имеем

$$\mathrm{E}\, e^{tY_{(m)}(\nu)} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+1)\dots(i+m-1)}{(\nu+1)\dots(\nu+i)}\ t^i$$

$$= 1 + \frac{mt}{\nu+1} + \frac{m(m+1)t^2}{2(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{m(m+1)(m+2)t^3}{3!(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \dots$$

$$\leqslant 1 + \alpha t + \frac{(m+1)(\nu+1)}{2m(\nu+2)} (\alpha t)^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(m+2)t}{3(\nu+3)}\right)^i$$

$$= 1 + \alpha t + \frac{(m+1)(\nu+1)}{2m(\nu+2)}\ \frac{(\alpha t)^2}{\left(1 - \frac{(m+2)t}{3(\nu+3)}\right)},$$

а поскольку для любых $1 \leqslant m \leqslant \nu$ и $t \leqslant 1/m$ выполнено

$$\frac{(m+1)(\nu+1)}{2m(\nu+2)} \leqslant 1 - \frac{(m+2)t}{3(\nu+3)},$$

то окончательно получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\, e^{tY_{(m)}(\nu)} \leqslant 1 + \alpha t + (\alpha t)^2 \\ &\leqslant \left(1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2}\right)\left(1 + \frac{(\alpha t)^2}{2}\right) \leqslant \exp\left(\frac{mt}{\nu+1}\right) \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{mt}{\nu+1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любых* $1 \leqslant \mu \leqslant m$ *справедлива формула*

$$\int\limits_0^u e^{tx_\mu} dx_\mu \int\limits_0^{x_\mu} e^{tx_{\mu-1}} dx_{\mu-1} \ldots \int\limits_0^{x_2} e^{tx_1} dx_1 = \frac{1}{\mu!}\left(\frac{e^{tu}-1}{t}\right)^\mu.$$

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по индексу μ. Обозначим левую часть равенства через $J_\mu(u)$. Для $\mu = 1$ имеем

$$J_1(u) = \int\limits_0^u e^{tx_1} dx_1 = \frac{e^{tu}-1}{t}.$$

Предполагая утверждение доказанным для $J_1(u), \ldots, J_{\mu-1}(u)$, получим

$$\begin{aligned} J_\mu(u) = \int\limits_0^u e^{tx_\mu} J_{\mu-1}(x_\mu) dx_\mu = \frac{1}{(\mu-1)!\ t^\mu} \int\limits_0^u (e^{tx}-1)^{\mu-1} de^{tx} \\ = \frac{1}{\mu!}\left(\frac{e^{tu}-1}{t}\right)^\mu. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для* $t \leqslant 1/m$ *и* $\rho = 1/(12m)$ *выполнено*

$$\frac{e^t - 1}{t} \leqslant \exp\left(\frac{1+\rho}{2}\, t\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{e^t-1}{t}=e^{\frac{t}{2}}\frac{e^{\frac{t}{2}}-e^{-\frac{t}{2}}}{t}=e^{\frac{t}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2i}$$
$$\leqslant e^{\frac{t}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{t^2}{24}\right)^{i}\leqslant e^{\frac{t}{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{t}{24m}\right)^{i}=e^{\frac{t}{2}}\ e^{\frac{t}{24m}}=\exp\left(\frac{1+\rho}{2}\,t\right).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $Y(\nu)$ — сумма m минимальных статистик среди $\nu\geqslant m$ случайных величин в классе $\widetilde{\mathcal{K}}$. Тогда справедлива оценка сверху для математического ожидания случайной величины $e^{tY(\nu)}$:*

$$\mathrm{E}\,e^{tY(\nu)}\leqslant \mathrm{E}\,\exp\left(\frac{(1+\rho)(m+1)}{2}\ t\,Y_{(m)}(\nu)\right).$$

Доказательство. Совместная функция распределения статистик $Y_{(1)}(\nu),Y_{(2)}(\nu),\ldots,Y_{(m)}(\nu)$ для $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_m$, $1\leqslant m\leqslant\nu$, имеет вид [5]:

$$f_{1,2,\ldots,m}(x_1,\ldots,x_m)=\frac{\nu!}{(\nu-m)!}p(x_1)\ldots p(x_m)(1-p(x_m))^{\nu-m}.$$

По определению математического ожидания

$$\mathrm{E}\,e^{tY(\nu)}=\int_0^1\int_0^{x_m}\ldots\int_0^{x_2}e^{t(x_1+\ldots+x_m)}f_{1,2,\ldots,m}(x_1,\ldots,x_m)dx_1dx_2\ldots dx_m.$$

В случае равномерного распределения с учётом леммы 3 имеем

$$\mathrm{E}\,e^{tY(\nu)}=\int_0^1 e^{tx_m}(1-x_m)^{\nu-m}dx_m\int_0^{x_m}e^{tx_{m-1}}dx_{m-1}\ldots\int_0^{x_2}e^{tx_1}dx_1$$
$$=\frac{\nu!}{(\nu-m)!}\int_0^1 e^{tu}(1-u)^{\nu-m}J_{m-1}(u)du$$
$$=\nu C_{\nu-1}^{m-1}\int_0^1 e^{tu}(1-u)^{\nu-m}\left(\frac{e^{tu}-1}{t}\right)^{m-1}du$$
$$=\nu C_{\nu-1}^{m-1}\int_0^1 e^{tu}u^{m-1}(1-u)^{\nu-m}\left(\frac{e^{tu}-1}{tu}\right)^{m-1}du.$$

Поскольку $tu \leqslant 1/m$, по лемме 4 верно

$$\frac{e^{tu}-1}{tu} \leqslant \exp\left(\frac{1+\rho}{2}tu\right).$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$\mathrm{E}\,e^{tY(\nu)} \leqslant \nu C_{\nu-1}^{m-1}\int\limits_0^1 e^{\frac{(1+\rho)(m+1)}{2}\,tu} u^{m-1}(1-u)^{\nu-m}du$$

$$= \mathrm{E}\,\exp\!\left(\frac{(1+\rho)(m+1)}{2}\;tY_{(m)}(\nu)\right).$$

Лемма 5 доказана.

Напомним обозначения, принятые выше для любых $k=\overline{1,p}$:

$$n_k = n-(k-1)(m+1)-1; \quad \beta_k = \frac{m(m+1)}{2(n_k+1)}; \quad g_k = (1+\rho)^2\beta_k^2.$$

Очевидно, для всякого $k=\overline{1,p}$ верно $\mathrm{E}\,Y_k = \beta_k$.

Из лемм 2 и 5 непосредственно следует

Лемма 6. *При $t \leqslant 1/m$ для любых $k=\overline{1,p}$ центрированные случайные величины $\widetilde{Y}_k = Y_k - \mathrm{E}Y_k$ удовлетворяют неравенству*

$$\mathrm{E}\,e^{t\widetilde{Y}_k} \leqslant e^{\rho\beta_k t}\; e^{\frac{1}{2}g_k t^2}.$$

Лемма 7. *Справедливы неравенства*

$$\mathrm{E}\,Y = \sum_{k=1}^{p}\mathrm{E}\,Y_k \leqslant \frac{m\ln p}{1+\rho}\,;$$

$$G = \sum_{k=1}^{p} g_k \leqslant (1+\rho)^2\;\frac{m^2}{2}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\mathrm{E}\,Y = \sum_{k=1}^{p}\mathrm{E}\,Y_k = \sum_{k=1}^{p}\beta_k = \sum_{k=1}^{p}\frac{m(m+1)}{2(n_k+1)} = \frac{m(m+1)}{2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{n_k+1}$$

$$= \frac{m(m+1)}{2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k(m+1)} = \frac{m}{2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} \leqslant \frac{m(1+\ln p)}{2},$$

и с учётом верного при $p > 3$ неравенства $1 + \rho \leqslant (1 - \rho) \ln p$ имеем

$$\mathrm{E}\, Y \leqslant \frac{m \ln p}{1 + \rho}\,;$$

$$\begin{aligned} G = \sum_{k=1}^{p} g_k = \sum_{k=1}^{p} (1+\rho)^2 \beta_k^2 &= (1+\rho)^2 \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{m(m+1)}{2(n_k+1)} \right)^2 \\ = \left(\frac{(1+\rho)m(m+1)}{2} \right)^2 \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2 (m+1)^2} &= \left(\frac{(1+\rho)m}{2} \right)^2 \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant (1+\rho)^2\ \frac{m^2}{2}. \end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *При $T = 1/m$ алгоритм $\widetilde{A}$ решает задачу о p-медиане на классе $\widetilde{\mathcal{K}}$ случайных входов с равномерным распределением со следующими оценками относительной погрешности и вероятности несрабатывания*:

$$\varepsilon_n = 2\ \frac{b_n/a_n}{p/\ln p}; \tag{5}$$

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{p}}\ . \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим совокупность p смещённых случайных величин $X_k = \widetilde{Y}_k - \rho\beta_k$, определённых формулой (3). Их сумма равна $S = \widetilde{Y} - \rho\,\mathrm{E}\, Y$.

Оценим вероятность несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$, учитывая, что $F_{\widetilde{A}} = mp\; a_n + (b_n - a_n)Y$, $F^* \geqslant mp\; a_n$ и согласно лемме 7 $\mathrm{E}\, Y \leqslant \frac{m \ln p}{1+\rho}$:

$$\begin{aligned} \Pr\{F_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)F^*\} &\leqslant \Pr\left\{ Y > \frac{mp\; \varepsilon_n}{b_n/a_n} \right\} \\ = \Pr\left\{ \widetilde{Y} > \frac{mp\; \varepsilon_n}{b_n/a_n} - \mathrm{E}\, Y \right\} &= \Pr\left\{ S > \frac{mp\; \varepsilon_n}{b_n/a_n} - (1+\rho)\mathrm{E}\, Y \right\} \\ &\leqslant \Pr\left\{ S > \frac{mp\; \varepsilon_n}{b_n/a_n} - m \ln p) \right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Задавшись величиной относительной погрешности алгоритма $\widetilde{A}$, равной

$$\varepsilon_n = 2\, \frac{b_n/a_n}{p/\ln p}\ ,$$

продолжим неравенство (9) для оценки вероятности несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$:

$$\Pr\{F_{\widetilde{A}} > (1+\varepsilon_n)F^*\} \leqslant \Pr\left\{S > \frac{mp\ \varepsilon_n}{b_n/a_n} - m\ln p\right\} = \Pr\{S > m\ln p\}. \quad (8)$$

Воспользуемся теоремой Петрова для совокупности случайных величин $\{X_1, \ldots, X_p\}$.

С учётом леммы 7 при $T = 1/m$ и достаточно больших p (бóльших двух) имеем

$$GT \leqslant \frac{m(1+\rho)^2}{2} \leqslant m\ln p$$

и, положив $x = m\ln p$, оцениваем правую часть неравенства (10) согласно теореме Петрова

$$\Pr\{F_A > (1+\varepsilon_n)F^*\} \leqslant \Pr\{S > m\ln p\} \leqslant \exp\Bigl(-\frac{\ln p}{2}\Bigr) = \frac{1}{\sqrt{p}} = \delta_n.$$

Итак, оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания представленного в работе алгоритма $\widetilde{A}$ имеют вид (7) и (8) соответственно. Лемма 8 доказана.

Из вида оценок ε_n и δ_n, полученных в лемме 8, заключаем, что условия (2)–(3), накладываемые на параметр p, влекут асимптотическую точность приближённого алгоритма $\widetilde{A}$ решения задачи о p-медиане на классе случайных входов $\widetilde{\mathcal{K}}$.

Тем самым основное утверждение статьи — теорема 1 — доказано.

Замечание. Результаты, полученные для задачи о p-медиане, справедливы на классе $\mathcal{K}$ случайных входных данных для любых распределений мажорирующего типа: $\mathcal{P}_\xi(x) \geqslant x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Приближённый алгоритм отыскания d-однородного регулярного остовного связного подграфа максимального веса в полном графе со случайными весами рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 3–20.
2. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. Вып. 31. — 1975. — С. 35–42.
3. **Гимади Э. Х., Перепелица В. А.** Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 12. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. — 1974. — С. 35–45.

4. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. М.: Мир, — 1982.— 416 с.
5. **Дейвид Г.** Порядковые статистики. — М.: Наука, — 1979. — 336 с.
6. **Петров В. В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — М.: Наука, — 1987. — 317 с.
7. **Angluin D., Valiant L. G.** Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings // J. Comput. System Sci. — 1979. — Vol. 18. — P. 155–193.
8. **Discrete Location Theory** / Eds. Mirchandani P. B. and Francis R. L. Wiley-Interscience Publication: Wiley and Sons Inc., — 1990. — 57 p.
9. **Frieze A.** On random symmetric travelling salesman problems // Math. Oper. Research. — 2004. — Vol. 29, N 4. — P. 878–890.
10. **Karp R. M.** The probabilistic analysis of some combinatorial search algorithms // Algorithms and complexity: new directions and recent results (Ed. Traub J. P.), New York: Acad. Press. —1976. — P. 1–19.
11. **Slominski L.** Probabilistic analysis of combinatorial algorithms: a bibliography with selected annotations // Computing. — 1982. — Vol. 28. — P. 257–267.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Статья поступила
26 октября 2009 г.

Переработанный вариант —
27 декабря 2009 г.