ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2010. Том 17, № 3. С. 46–60

УДК 519.7

# КЛОНЫ С МАЖОРИТАРНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ *)

*Н. Г. Парватов*

**Аннотация.** В связи с проблемой конечной порождаемости рассматриваются клоны с мажоритарной функцией и их обобщения — клоны с $d$- и $(c, d)$-подклонами. Такие клоны характеризуются свойствами их функций и сохраняемых этими функциями предикатов. Попутно находятся условия существования доопределений в заданном клоне для частичной функции.

**Ключевые слова:** замкнутый класс, клон, мажоритарная функция, $d$-подклон, $(c, d)$-подклон, сохраняемый предикат, доопределение, частичная функция.

## Введение

Будем рассматривать множество $P_E$ функций $f : E^n \to E$, где $n$ — произвольное натуральное число, а $E$ — фиксированное конечное множество. Замкнутые операциями суперпозиции из [3, 4] множества функций из $P_E$ называются *замкнутыми классами*, а замкнутые классы, включающие множество селекторных (тождественно равных некоторому своему аргументу) функций, называются *клонами*. Для любого множества $X$ функций из $P_E$ среди замкнутых классов, включающих это множество, имеется наименьший. Он обозначается через $[X]$, и множество $X$ для него называют *порождающим*. Замкнутый класс, имеющий конечное порождающее множество, называется *конечно-порождаемым*. Все замкнутые классы двоичных функций (при двухэлементном множестве $E$) описаны Постом [10]. Из результатов Поста следует, что существует счётное число замкнутых классов двоичных функций и каждый из этих классов конечно-порождаемый. Известно, что для $k$-значных функций (при $k$-элементном множестве $E$) в случае $k \geqslant 3$ это не так. Решётка замкнутых классов в этом случае имеет уже континуальную мощность,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № П1010).

что затрудняет её описание, и имеются замкнутые классы без конечного порождающего множества [11]. В связи со сказанным оказывается интересной задача выявления условий, обеспечивающих конечную порождаемость замкнутых классов. В частности, представляют интерес условия, обеспечивающие конечную порождаемость замкнутых классов двоичных функций. В связи с этим отметим работы [2, 5, 6], а также [8]. В [5] конечная порождаемость замкнутых классов двоичных функций объяснялась наличием мажоритарных функций почти во всех таких классах, а в [2] — существованием разложений специального вида для булевых функций. Подобные разложения были обобщены и как $id$-разложения изучены в [6, 7].

В связи с проблемой конечной порождаемости клоны с $(d+1)$-местной мажоритарной функцией изучались в [8]. В качестве их обобщения там введены так называемые $d$- и $(c, d)$-подклоны произвольного клона, показана конечная порождаемость клона, содержащего $(c, d)$-подклон или конечно порождаемый $d$-подклон. В данной статье продолжается изучение $d$- и $(c, d)$-подклонов, рассматриваются их примеры, доказываются теоремы, их характеризующие. Основным инструментом является лемма о доопределении частичной функции, уточняющая известную теорему Бейкера и Пиксли из [12] и представляющая по мнению автора самостоятельный интерес.

Статья построена следующим образом. В разд. 1 напоминаются понятия $d$- и $(c, d)$-подклонов [8]. В разд. 2 доказывается лемма о доопределении и на её основе формулируются условия, характеризующие клоны с $d$-подклонами. В разд. 3 на примерах двоичных $d$- и $(c, d)$-подклонов иллюстрируется использование леммы о доопределении. В разд. 4 клоны с $(c, d)$-подклонами характеризуются в терминах сохраняемых предикатов. Наконец, в разд. 5 рассматриваются возможности $(c, r)$-разложений клонов над своими $(c, d)$-подклонами.

## 1. $d$- и $(c, d)$-подклоны

В этом разделе вводятся основные для дальнейшего понятия $d$- и $(c, d)$-подклонов из [8] и формулируются необходимые результаты.

Обозначим через $\Pi_E$ множество предикатов $P : E^n \to \{\text{И, Л}\}$ при всевозможных натуральных $n$. Множество предикатов из $\Pi_E$ станем называть *и-классом*, если оно содержит все диагонали (тождественно истинные или ложные предикаты, а также предикаты $x_i = x_j \wedge \ldots \wedge x_k = x_l$ при $\{i, j, \ldots, k, l\} = \{1, \ldots, n\}$ для любого натурального $n$) и замкнуто операциями конъюнкции предикатов, отождествления и перестановки

переменных, а также операциями введения и удаления фиктивных переменных [1]. Для любого множества $Y$ предикатов из $\Pi_E$ через $[Y]_\wedge$ станем обозначать *и-класс, порождённый множеством* $Y$, т. е. наименьший по включению среди включающих множество $Y$. Через $Y^{(d)}$ обозначается множество предикатов из $Y$, зависящих не более чем от $d$ переменных. В частности, $u$-классом является множество $\mathrm{inv}_E(X)$ предикатов, сохраняемых всеми функциями множества $X$ функций из $P_E$. Этот $u$-класс замкнут ещё и операцией проектирования. Такие $u$-классы сохраняемых предикатов и порождающие множества в них являются основным объектом дальнейшего изучения.

Напомним, что *мажоритарной функцией* называется $(d+1)$-местная функция $m(x_1, \ldots, x_{d+1})$, $d \geqslant 2$, удовлетворяющая всевозможным соотношениям вида
$$x = m(x, \ldots, x, x_i, x \ldots, x),$$
где переменная $x_i$ находится на $i$-м месте функции $m$ и $1 \leqslant i \leqslant d+1$. Клоны с мажоритарной функцией конечно порождены [5], их описывает теорема Бейкера и Пиксли из [12]. В качестве уточнения этой теоремы в [8] показано, что клон $M$ тогда и только тогда содержит мажоритарную функцию, когда $u$-класс $\mathrm{inv}_E(M)$ инвариантных для этого клона предикатов порождается всеми своими предикатами, зависящими не более чем от $d$ переменных, т. е. если выполняется равенство
$$\mathrm{inv}_E(M) = [(\mathrm{inv}_E(M))^{(d)}]_\wedge.$$
В качестве обобщения этого факта показано, что для любых клонов $M_1$ и $M_2$ функций из $P_E$ и любого натурального $d \geqslant 2$ следующие условия равносильны:

(i) $M_1 \subseteq M_2$ и для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из клона $M_2$ в клоне $M_1$ найдётся функция $m_f(x_1, \ldots, x_{n+d+1})$, удовлетворяющая всевозможным соотношениям вида
$$f(x) = m_f(x, f(x), \ldots, f(x), x_{n+i}, f(x), \ldots, f(x)),$$
где через $x$ обозначен набор переменных $x_1, \ldots, x_n$, переменная $x_{n+i}$ находится на $(n+i)$-м месте функции $m_f$ и $1 \leqslant i \leqslant d+1$;

(ii) $\mathrm{inv}_E(M_1) = [\mathrm{inv}_E(M_2) \cup (\mathrm{inv}_E(M_1))^{(d)}]_\wedge$.

Клон $M_1$ называется *d-подклоном* клона $M_2$, если выполняются сформулированные выше равносильные условия (i) и (ii). В [8] показано, что клон, содержащий конечно порождаемый $d$-подклон, сам является конечно порождаемым.

В некоторых случаях (такие случаи рассмотрены далее) для некоторого натурального $c$ в условии (i) функцию $m_f$ всегда удаётся выбрать зависящей не более чем от $c$ переменных функции $f$. В этой ситуации клон $M_1$ будем называть $(c, d)$-*подклоном* клона $M_2$. Иными словами, клон $M_1$ называется $(c, d)$-подклоном клона $M_2$, если выполняется включение $M_1 \subseteq M_2$ и для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $M_2$ в множестве $\{1, \ldots, n\}$ можно выбрать числа $i_1, \ldots, i_c$ и в клоне $M_1$ можно выбрать функцию $m_f$ от $c + d + 1$ переменных такие, что

$$f(x) = m_f(x', f(x), \ldots, f(x), x_{c+i}, f(x), \ldots, f(x)),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x' = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_c})$, переменная $x_{c+i}$ находится на $(c + i)$-м месте функции $m_f$ и $1 \leqslant i \leqslant d + 1$. Пополнив натуральный ряд наибольшим элементом $\infty$, будем считать всякий $d$-подклон $(c, d)$-подклоном при $c = \infty$. Заметим, что в соответствии со сделанными определениями клон с мажоритарной функцией является $d$-подклоном клона $P_E$, более того, $(0, d)$-подклоном в нём. В [8] показано, что для любого натурального $c$ всякий $(c, d)$-клон конечно порождён.

Как видно, для $d$-подклонов можно дать по крайней мере два равносильных определения: функциональное и предикатное (характеризующие $d$-подклоны свойствами их функций и соответственно свойствами сохраняемых их функциями предикатов), а $(c, d)$-подклону дано только функциональное определение. Основная цель данной статьи состоит в получении новых характеризующих $d$- и $(c, d)$-клоны условий.

## 2. Лемма о доопределении

В этом разделе будет доказана лемма о доопределении, являющаяся основным инструментом дальнейшего изучения клонов с $d$- и $(c, d)$-подклонами.

Наряду с функциями из $P_E$ рассматриваем функции вида

$$f : E^n \to E \cup \{*\}$$

при натуральных $n$, где $*$ — не принадлежащий множеству $E$ элемент. Интерпретируя этот элемент как неопределённое значение, функции указанного вида станем называть и считать *частичными*, а их множество обозначать через $P_E^*$. Множество наборов, на которых частичная функция принимает значения из множества $E$, будем называть её *областью определения*. Для частичных функций $g$ и $h$, зависящих от одинакового

числа, скажем $n$, переменных, функцию $h$ будем называть *доопределением* функции $g$, если функция $h$ может быть получена заменой некоторых неопределённых значений функции $g$ произвольными значениями из множества $E$, т. е. если имеет место импликация

$$(g(x) \in E) \Rightarrow (h(x) = g(x))$$

для любого набора $x$ из $E^n$. Функцию $g$ в этой ситуации будем называть *ограничением* функции $h$.

Напомним, что частичная $n$-местная функция $f$ из $P_E$ *сохраняет* $m$*-арный предикат* $p$ из $\Pi_E$, если для любых наборов $X_1, \ldots, X_n$, удовлетворяющих предикату $p$, набор $f^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$ либо содержит неопределённую координату, равную $*$, либо удовлетворяет предикату $p$. При этом $i$-я координата набора $f^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$ совпадает со значением функции $f$, вычисленным от $i$-й строки матрицы $\left(X_1^T, \ldots, X_n^T\right)$, где $^T$ — транспонирование.

**Лемма 1.** *Для любого клона* $M$*, множества* $N = \mathrm{inv}_E(M)$ *и подмножества* $A \subseteq \Pi_E$ *следующие условия равносильны*:

(i) $N \subseteq [A]_\wedge$;

(ii) *любая частичная функция из* $P_E^*$*, сохраняющая все предикаты из множества* $A$*, имеет доопределение в клоне* $M$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (i) и частичная $n$-местная функция $f$ из $P_E^*$ сохраняет все предикаты из $A$. Тогда, очевидно, $f$ сохраняет и конъюнкции этих предикатов из $[A]_\wedge$, а также предикаты из $N$ (в силу включения в условии (i)). Очевидно, что при некотором $m \leqslant |E|^n$ в множестве $E^m$ можно выбрать наборы $X_1, \ldots, X_n$ такие, что множество строк матрицы $\left(X_1^T, \ldots, X_n^T\right)$ совпадает с областью определения функции $f$. Рассмотрим $m$-арный предикат $p$, которому удовлетворяют наборы $g^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$ для всевозможных $n$-местных функций $g$ из клона $M$. Непосредственно проверяется, что предикат $p$ инвариантен для клона $M$, т. е. принадлежит множеству $N = \mathrm{inv}_E(M)$. Следовательно, функция $f$ сохраняет этот предикат. Отсюда в силу определения предиката $p$ для некоторой функции $g$ из клона $M$ выполняется равенство $f^{[m]}(X_1, \ldots, X_n) = g^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$. В силу выбора наборов $X_1, \ldots, X_n$ функция $g$ является доопределением функции $f$ и имеет место условие (ii).

Предположим, что выполняется условие (ii). Выберем произвольно $m$-арный предикат $p$ в множестве $N$. Для любого набора $I$ натуральных чисел $i_1, \ldots, i_l$ из множества $\{1, \ldots, m\}$ и $l$-арного предиката $q$ из

множества $A \cup \{=\}$ рассмотрим $m$-арный предикат $q^I$ такой, что

$$q^I(x_1, \ldots, x_m) \Leftrightarrow q(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}),$$

полученный из предиката $q$ в результате отождествления переменных и введения фиктивных переменных, а потому принадлежащий множеству $[A]_\wedge$. Обозначим через $A(m)$ множество всех предикатов $q^I$, где $q$ — произвольный $l$-арный предикат из множества $A \cup \{=\}$, $I$ — произвольный набор из $\{1, \ldots, m\}^l$ и $l$ принимает любые натуральные значения. Заметим, что множество $A(m)$ конечное, так как состоит из $m$-арных предикатов. Тем более конечным является его подмножество $A(p)$, состоящее из предикатов $q'$ из $A(m)$, обладающих свойством

$$p(x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow q'(x_1, \ldots, x_m).$$

Определим $m$-арный предикат $r$ соотношением

$$r(x_1, \ldots, x_m) \Leftrightarrow \wedge_{q' \in A(p)} q'(x_1, \ldots, x_m).$$

Предикат $r$ принадлежит множеству $[A]_\wedge$, а потому для завершения доказательства достаточно показать, что он совпадает с предикатом $p$. Импликация

$$p(x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow r(x_1, \ldots, x_m)$$

очевидна, докажем обратную импликацию. С этой целью выберем произвольно набор $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, удовлетворяющий предикату $r$, и предположим, что предикату $p$ удовлетворяют наборы $X_j = (X_{j,1}, \ldots, X_{j,m})$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, и только они. Рассмотрим $n$-местную частичную функцию $f$ такую, что $f^{[m]}(X_1, \ldots, X_n) = Y$, принимающую неопределённое значение $*$ на наборах, не являющихся строками матрицы $X = \left(X_1^T, \ldots, X_n^T\right)$. Функция $f$ определена корректно: если в матрице $X$ какие-то две строки с номерами $i$ и $j$ совпадают, то множеству $A(p)$ принадлежит предикат $q'$, определяемый соотношением

$$q'(x_1, \ldots, x_m) \Leftrightarrow x_i = x_j;$$

но тогда $i$-я и $j$-я координаты совпадают у всех удовлетворяющих ему наборов в силу определения предиката $r$, в частности, у набора $Y$. Аналогичным рассуждением показывается, что функция $f$ сохраняет любой предикат $q_1$ из $A$. Действительно, пусть предикат $q_1$ зависит от $l$ переменных и ему удовлетворяют наборы $(X_{j,i_1}, \ldots, X_{j,i_l})$ для всех номеров $j$

из множества $\{1, \ldots, n\}$ и некоторого набора номеров $i_1, \ldots, i_l$ из множества $\{1, \ldots, m\}$. Тогда множеству $A(p)$ принадлежит предикат

$$q_1'(x_1, \ldots, x_m) \equiv q_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}).$$

Но в силу определения предиката $r$ все удовлетворяющие ему наборы удовлетворяют и предикату $q_1'$. Это относится и к набору $Y$, вследствие чего набор $(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_l})$ удовлетворяет предикату $q_1$, а частичная функция $f$ сохраняет этот предикат.

Итак, частичная функция $f$ сохраняет все предикаты из множества $A$. В силу условия (ii) она имеет доопределение в клоне $M$ и, следовательно, сохраняет все предикаты из множества $N = \mathrm{inv}_E(M)$. В частности, она сохраняет предикат $p$. Тогда набор $Y = f^{[m]}(X_1, \ldots, X_n)$ удовлетворяет вслед за наборами $X_i$ предикату $p$ (и даже совпадает с некоторым $X_i$). Требуемая импликация доказана. Лемма 1 доказана.

Если в условиях леммы $A \subseteq N$, то в п. (i) выполняется также обратное включение, а в п. (ii) — обратное утверждение. Таким образом, частным случаем доказанной леммы является

**Следствие 1.** *В условиях леммы* 1 *следующие свойства равносильны*:
(i) $N = [A]_\wedge$;
(ii) *функция $f$ из $P_E^*$ тогда и только тогда имеет доопределение в клоне $M$, когда она сохраняет все предикаты из множества $A$.*

Лемму 1 и её следствие 1 будем называть далее *леммами о доопределении*. Эти утверждения дают условия, при которых частичная функция имеет доопределение в клоне $M$, а также условия, при которых множество предикатов порождает $u$-класс $\mathrm{inv}_E(M)$. Такие условия находят применение при изучении клонов с мажоритарной функцией и их обобщений. В силу леммы о доопределении и условия (ii) в определении $d$-подклона справедлива

**Теорема 1.** *Пусть для клонов $M_1$ и $M_2$ функций из $P_E$ имеет место включение $M_1 \subseteq M_2$. Тогда равносильны условия*:
(i) *клон $M_1$ является $d$-подклоном клона $M_2$*;
(ii) *для любой функции $f$ из $P_E^*$ верно: функция $f$ тогда и только тогда имеет доопределение в клоне $M_1$, когда она имеет доопределение в клоне $M_2$ и всякое её ограничение с не более чем $d$-элементной областью определения имеет доопределение в клоне $M_1$.*

Частный случай теоремы 1, когда клон $M_2$ совпадает с $P_E$ (и тогда в условии (i) клону $M_1$ принадлежит $(d+1)$-местная мажоритарная функция), содержится в теореме Бейкера и Пиксли. В следующем разделе

будут рассмотрены другие примеры использования леммы о доопределении.

### 3. Некоторые примеры

В этом разделе на примере некоторых двоичных $d$- и $(c, d)$-подклонов проиллюстрируем использование леммы о доопределении для нахождения порождающих множеств $u$-классов сохраняемых предикатов.

**Пример 1.** Клон $M_2$ монотонных булевых функций, сохраняющих отношение порядка $\preceq$ на множестве $E = \{0, 1\}$, при котором $0 \preceq 1$, содержит трёхместную мажоритарную функцию — медиану

$$m^{(3)}(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz.$$

В силу сформулированного выше критерия из [8] это означает, что $u$-класс $\mathrm{inv}_{\{0,1\}}(M_2)$ порождается своими двуместными предикатами. На основании леммы о доопределении этот факт можно уточнить. Именно, этот $u$-класс порождается единственным своим предикатом $\preceq$. Это следует из возможности доопределить $n$-местную частичную булеву функцию $f$, сохраняющую предикат $\preceq$, до монотонной функции $F$ из $M_2$, например, так:

$$F(x) = \wedge f(y),$$

где для любого набора $x$ из $\{0, 1\}^n$ конъюнкция вычисляется по всем наборам $y \succeq x$ из области определения функции $f$ (таким, что $f(y) \neq *$).

**Пример 2.** Клон $I^d$ булевых функций, удовлетворяющих условию $1^d$ (требующему существования общей единичной компоненты у любых $d$ наборов, на которых функция принимает единичное значение) содержит $(d + 1)$-местную мажоритарную функцию

$$m^{(d+1)}(x_1, \dots, x_{d+1}) = \bigvee_{i=1}^{d+1} x_1 \cdots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdots x_{d+1}.$$

$u$-Класс $\mathrm{inv}_{\{0,1\}}(I^d)$ инвариантных для этого клона предикатов порождается, следовательно, своими $d$-местными предикатами. В действительности этот $u$-класс порождается единственным предикатом

$$\varepsilon^{(d)}(x_1, \dots, x_d) \equiv x_1 = 0 \vee \dots \vee x_d = 0,$$

поскольку частичную функцию, сохраняющую этот предикат, можно доопределить до функции из клона $I^d$ нулевыми значениями.

**Пример 3.** Способом из первого примера частичную булеву функцию $f$, сохраняющую предикаты $\preceq$ и $\varepsilon^{(d)}$, можно доопределить до монотонной функции, удовлетворяющей условию $1^d$. Это означает, что $u$-класс $\mathrm{inv}_{\{0,1\}}(M_2 \cap I^d)$ порождается предикатами $\preceq$ и $\varepsilon^{(d)}$ и монотонная часть $M_2 \cap I^d$ клона $I^d$ является его 2-подклоном. Отметим в связи с этим, что для любой $n$-местной функции $f$ из клона $M_2 \cap I^d$ $(n+3)$-местную функцию $m_f$ можно выбрать в клоне $I^d$ так:

$$m_f(x_1, \dots, x_{n+3}) = M_f(x_1, \dots, x_n) \wedge m^{(3)}(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}),$$

где $M_f$ — наименьшая монотонная мажоранта функции $f$, принимающая единичное значение на наборе $x$ в том и только том случае, когда функция $f$ принимает единичное значение на некотором наборе $y$ таком, что $y \preceq x$.

**Пример 4.** Рассмотрим клон $I^\infty$ всех булевых функций, удовлетворяющих условию $1^\infty$ (т. е. условиям $1^d$ при всех целых положительных $d$). Несложно понять, что $u$-класс $\mathrm{inv}_{\{0,1\}}(I^\infty)$ инвариантных для этого клона предикатов порождается бесконечным множеством предикатов $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \dots$, а если к этому множеству добавить порядок $\preceq$, то получим порождающее множество $u$-класса $\mathrm{inv}_{\{0,1\}}(M_2 \cap I^\infty)$. Отсюда видно, что монотонная часть клона $I^\infty$ является его 2-подклоном. В действительности она является $(1,2)$-подклоном, так как для любой $n$-местной функции $f$ из клона $I^\infty$ функцию $m_f$ можно выбрать в клоне $M_2 \cap I^\infty$ так:

$$m_f(x_1, \dots, x_{n+3}) = x_i \wedge m^{(3)}(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}),$$

где $x_i$ — специальная переменная функции $f$ такая, что $x_i \succeq f(x_1, \dots, x_n)$, существующая в силу определения клона $I^\infty$.

В [9] рассмотрены другие примеры $k$-значных клонов с $d$- и $(c,d)$-подклонами.

## 4. Характеризация клонов с $(c, d)$-подклонами

В этом разделе клоны с $(c,d)$-подклонами будут охарактеризованы в терминах сохраняемых предикатов.

Понадобятся некоторые определения. Именно, обобщим понятие сохраняемого функцией предиката. Пару $(p,q)$ предикатов $p$ и $q$ из $\Pi_E$ одинаковой арности $m$ назовём $m$-арным *2-предикатом* на множестве $E$. Будем говорить, что $n$-местная частичная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из $P_E^*$ (и, в частности, полностью определённая функция $f$ из $P_E$) *сохраняет по набору* своих *переменных* $x_{i_1}, \dots, x_{i_c}$, где $\{i_1, \dots, i_c\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, $m$-арный

2-*предикат* $(p,q)$, если для любых наборов $X_1,\dots,X_n$ из $E^m$ таких, что наборы $X_{i_1},\dots,X_{i_c}$ удовлетворяют предикату $p$, набор $f^{[m]}(X^1,\dots,X^n)$ удовлетворяет предикату $q$ или содержит неопределённую компоненту, равную $*$. Будем говорить, что функция $f$ *сохраняет* 2-*предикат* $(p,q)$, если выполняется равенство $\{i_1,\dots,i_c\}=\{1,\dots,n\}$. При совпадающих предикатах $p$ и $q$ будем говорить о *сохранении функцией* $f$ *предиката* $p$ *по набору переменных* $x_{i_1},\dots,x_{i_c}$.

Можно проверить, что сохранение функцией из $P_E$ по некоторой её переменной $m$-арного предиката $p$ из $\Pi_E$ равносильно сохранению этой функцией предикатов

$$p^{[l]}(x_1,\dots,x_{ml}) \equiv p(x_1,\dots,x_m)\vee p(x_{m+1},\dots,x_{2m})\vee\dots\vee p(x_{m(l-1)+1},\dots,x_{ml})$$

при всевозможных целых положительных $l$. Довольно легко понять также, что функции, сохраняющие некоторый предикат по одной из своих переменных, составляют клон. Подобным образом можно определить клон $I^\infty$, а также некоторые другие клоны, находящие приложения в дискретной математике [9]. Отметим также, что сохранение функцией пары предикатов $p$ и $q$ по соответствующим наборам $u$ и $v$ её переменных влечёт сохранение этой функцией предиката $p\wedge q$ по набору переменных $u\cup v$. Таким образом, понятие предиката, сохраняемого функцией по набору её переменных, имеет содержательный смысл.

Далее, набор $y=(y_1,\dots,y_m)$ из $E^m$ будем называть *особым* набором $m$-арного предиката $p$, если этот набор не удовлетворяет предикату $p$, но для любого $i, 1\leqslant i\leqslant m$, найдётся удовлетворяющий предикату $p$ набор $y'=(y_1,\dots,y_{i-1},y'_i,y_{i+1},\dots,y_m)$, отличающийся от набора $y$ только $i$-й координатой $y'_i\neq y_i$. Предикат $p$, обладающий особым набором $y$, назовём *редуцированным*, так же как 2-предикат $(p,E^m\setminus\{y\})$, где $m$ — арность предиката $p$ и через $E^m\setminus\{y\}$ обозначен $m$-арный предикат, область истинности которого совпадает с одноимённым множеством. Если при этом предикат $p$ совпадает с предикатом $q$ либо получен из него проектированием, возможно неоднократным, то предикат $p$ и 2-предикат $(p,E^m\setminus\{y\})$ будем называть *редукцией* и 2-*редукцией* предиката $q$ соответственно. Всякий предикат, не являющийся тождественно ложным или тождественно истинным, обладает хотя бы одной редукцией (тогда и 2-редукцией).

Непосредственно из определений следует, что сохранение $m$-арного предиката $p$ функцией из $P_E^*$ равносильно сохранению ею 2-предикатов $(p,E^m\setminus\{y\})$ для всевозможных не удовлетворяющих предикату $p$ на-

боров $y$ из $E^m$. Далее, если набор $y = (y_1, \ldots, y_m)$ из $E^m$ не является особым для предиката $p$, то для некоторого $i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, предикату $p$ не удовлетворяют все наборы, отличающиеся от $y$ значением только $i$-й координаты. В этом случае сохранение функцией из $P_E^*$ 2-предиката $(p, E^m \backslash \{y\})$ равносильно сохранению ею 2-предиката $(p', E^{m-1} \backslash \{y'\})$, где предикат $p'$ получен из предиката $p$ проектированием по $i$-й переменной:

$$p'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) \equiv p(x_1, \ldots, x_m),$$

а не удовлетворяющий предикату $p'$ набор $y' = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m)$ получен из набора $y$ удалением $i$-й координаты. Сказанное остаётся в силе, если рассматривать сохранение функцией предикатов и 2-предикатов по фиксированному набору её переменных. Сделанные наблюдения позволяют сформулировать следующую лемму.

**Лемма 2.** *Для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $P_E^*$, набора $x'$ её переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_c}$, где $\{i_1, \ldots, i_c\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, и предиката $p$ из $\Pi_E$ следующие условия равносильны*:

(i) *функция $f$ сохраняет по набору переменных $x'$ предикат $p$*;

(ii) *функция $f$ сохраняет по набору переменных $x'$ всякую редукцию предиката $p$*;

(iii) *функция $f$ сохраняет по набору переменных $x'$ всякую 2-редукцию предиката $p$.*

Понадобится ещё одна

**Лемма 3.** *Пусть $l, n, d$ и $i_1, \ldots, i_l$ — натуральные числа такие, что $\{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и $d \geqslant 2$, а для функций $m_f(x_1, \ldots, x_{l+d+1})$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ из соответствующих клонов $M_1$ и $M_2$ таких, что $M_1 \subseteq M_2$, выполняются всевозможные соотношения вида*

$$f(x) = m_f(x', f(x), \ldots, f(x), x_i, f(x), \ldots, f(x)),$$

*где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$, переменная $x_i$ находится на $i$-м месте функции $m_f$ и $l + 1 \leqslant i \leqslant d + l + 1$. Тогда при $s > d$ функция $f$ сохраняет по набору переменных $x'$ все $s$-арные 2-редукции предикатов из $\mathrm{inv}_E(M_2)$.*

Доказательство. Пусть $s > d$ и $(q, E^s \setminus \{Y\})$ — $s$-арная 2-редукция некоторого предиката $p$ из $\mathrm{inv}_E(M_2)$, и для некоторых наборов $X_1, \ldots, X_n$ из $E^s$ имеет место равенство $Y = f^{[s]}(X_1, \ldots, X_n)$. Тогда

$$Y = m_f^{[s]}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_l}, Y^1, \ldots, Y^{d+1}),$$

где для любого $i$, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, через $Y^i$ обозначен некоторый набор, удовлетворяющий предикату $q$ и отличающийся от набора $Y$ только $i$-й координатой. Такие наборы $Y^i$ можно выбрать, поскольку набор $Y$ — особый для предиката $q$. Сохраняя все предикаты из множества $\mathrm{inv}_E(M_1)$, функция $m_f$ сохраняет и предикаты из множества $\mathrm{inv}_E(M_2) \subseteq \mathrm{inv}_E(M_1)$, а также их 2-редукции (в силу леммы 2). В частности, она сохраняет 2-предикат $(q, E^m \setminus \{Y\})$. Следовательно, некоторый из наборов $X_{i_j}$ или $Y^i$ не удовлетворяет предикату $q$. Для наборов $Y^i$ это невозможно. Значит, не удовлетворяющий предикату $p$ набор находится среди наборов $X_{i_j}$. Доказано, что функция $f$ сохраняет 2-редукцию $(q, E^m \setminus \{Y\})$ по набору $x'$. Лемма 3 доказана.

Следующая теорема характеризует $(c,d)$-подклоны свойствами сохраняемых их функциями предикатов.

**Теорема 2.** *Для любых натуральных $c$ и $d$ таких, что $d \geqslant 2$, и любых клонов $M_1$ и $M_2$ равносильны условия*:

(i) *клон $M_1$ является $(c,d)$-подклоном клона $M_2$*;

(ii) *клон $M_1$ является $d$-подклоном клона $M_2$ и для любого $m > d$ всякая функция из $M_2$ по некоторому набору своих переменных, содержащему не более $c$ переменных, сохраняет все $m$-арные 2-редукции предикатов из $\mathrm{inv}_E(M_2)$.*

Доказательство. Условие (ii) следует из (i) в силу определений $d$- и $(c,d)$-подклонов и леммы 3. Покажем, что из (ii) следует (i). Для этого рассмотрим произвольную $n$-местную функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ из $M_2$, сохраняющую при любом $m > d$ все $m$-арные 2-редукции предикатов из множества $\mathrm{inv}_E(M_2)$ по набору $x'$ своих переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_c}$. Всевозможные соотношения вида

$$f(x) = m_f(x', f(x), \ldots, f(x), x_{c+i}, f(x), \ldots, f(x)),$$

где через $x$ обозначен набор переменных $x_1,\ldots,x_n$, переменная $x_{c+i}$ находится на $(c+i)$-м месте под знаком функции $m_f$ и $1 \leqslant i \leqslant d+1$, определяют частичную функцию $m_f$, принимающую неопределённое значение $*$ на любом наборе из $E^{c+d+1}$, отличном от наборов

$$(x', f(x), \ldots, f(x), x_{c+i}, f(x), \ldots, f(x))$$

при $x \in E^n$. Определённая так частичная функция $m_f(x_1,\ldots,x_{c+d+1})$ при любом $m > d$ сохраняет все 2-редукции предикатов из множества $\mathrm{inv}_E(M_2)$ по набору первых $c$ своих переменных, так как аналогичное свойство выполняется для функции $f$ и набора $x'$ её переменных. При

$m \leqslant d$ частичная функция $m_f$ сохраняет все $m$-арные предикаты и 2-предикаты по набору последних $d+1$ своих переменных, так как в силу определения функции $m_f$ для любых наборов $X_1, \ldots, X_{c+d+1}$ из $E^m$ набор $m_f^{[m]}(X_1, \ldots, X_{c+d+1})$ либо содержит неопределённую компоненту, либо совпадает с некоторым из наборов $X_{c+1}, \ldots, X_{c+d+1}$. Таким образом, в силу леммы 2 частичная функция $m_f$ сохраняет все предикаты из множества $\mathrm{inv}_E(M_2) \cup (\mathrm{inv}_E(M_1))^{(d)}$. Так как $M_1$ — $d$-подклон клона $M_2$, по лемме о доопределении в клоне $M_1$ существует доопределение функции $m_f$. Это означает, что $M_1$ — $(c,d)$-подклон клона $M_2$. Теорема 2 доказана.

## 5. Функциональные разложения $d$-клонов

В этом разделе отметим существование специальных функциональных разложений в клонах с $(c,d)$-подклонами. Рассматриваемые разложения близки к изучавшимся в [5, 6].

Введём в рассмотрение понятие $(c,r)$-разложения. Для натуральных $l$ и $r$ таких, что $r \geqslant 2$, $(l,r)$-*разложением* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, зависящей от $n \geqslant r$ переменных, по набору переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$, где $\{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, над функцией $g$, зависящей от $l+\binom{r}{2}$ переменных, станем называть соотношение

$$f(x) = g\big(x', f\big(x_2^1\big), \ldots, f\big(x_r^1\big), \ldots, f\big(x_{i+1}^i\big), \ldots, f\big(x_r^i\big), \ldots, f\big(x_r^{r-1}\big)\big), \quad (1)$$

где $x = x_1, \ldots, x_n$, $x' = x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$, $x_j^i = x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n$ при $1 \leqslant i < j \leqslant r$.

Для любого элемента $c$ из расширенного натурального ряда (пополненного наибольшим элементом $\infty$) и натурального $r \geqslant 2$ будем говорить, что клон $M_2$ $(c,r)$-*разлагается над клоном* $M_1$, если выполняется включение $M_1 \subseteq M_2$ и для любой функции $f$ из $M_2$, зависящей от $n \geqslant r$ переменных, найдутся натуральное $l \leqslant c$ и функция $g$ в клоне $M_1$, зависящая от $l + \binom{r}{2}$ переменных, такие, что функция $f$ $(l,r)$-разлагается по некоторому набору её переменных над функцией $g$.

В этой ситуации из конечной порождаемости клона $M_1$ следует конечная порождаемость клона $M_2$, так как порождающее множество клона $M_1$ можно дополнить до порождающего множества клона $M_2$ функциями последнего, зависящими менее чем от $r$ переменных. А при натуральном $c$ (отличном от $\infty$) оба клона $M_1$ и $M_2$ оказываются конечно порождаемыми, поскольку в каждом из них функции, зависящие от $c + \binom{r}{2}$ переменных, составляют порождающие множества.

Заслуживает внимания и следующий факт: в клоне $M_2$, $(c,r)$-разлагающемся над клоном $M_1$, последний однозначно определяется всеми своими функциями, зависящими менее чем от $r$ переменных. Действительно, в разложении (1) из принадлежности функции $g$ и всех функций $f\bigl(x_j^i\bigr)$ клону $M_1$ следует, что и функция $f(x)$ также принадлежит клону $M_1$. Это означает, что отождествление каких-то двух переменных у функции, принадлежащей множеству $M_2 \setminus M_1$ и зависящей от $r$ или более переменных, приводит к функции, снова принадлежащей множеству $M_2 \setminus M_1$. Таким образом, получаем следующий критерий: функция из $M_2$, зависящая от $r$ или более переменных, тогда и только тогда принадлежит клону $M_1$, когда из неё отождествлением переменных невозможно получить функцию, принадлежащую множеству $M_2 \setminus M_1$ и зависящую менее чем от $r$ переменных.

Функциональные разложения, близкие к $(c,d)$-разложениям, изучались в [6, 7]. Там же указывалось, что подобные разложения представляют интерес в связи с вопросами формульной сложности и глубины функций некоторых клонов в неполных базисах. Представляет интерес

**Теорема 3.** *Для любых натуральных $d$ и $r$ таких, что $d \geqslant 2$ и $r = |E|^d + 1$, и любого $c$ из расширенного натурального ряда всякий клон функций из $P_E$ $(c,r)$-разлагается над любым своим $(c,d)$-подклоном.*

Доказательство теоремы 3 получается незначительным и очевидным изменением доказательства теоремы 1 из [7]. Независимо доказательство теоремы 3 получается с использованием теоремы 2, леммы о доопределении и леммы 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.** Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. — 1969. — № 3. — С. 1–10; — № 5. — С. 1–9.
2. **Гаврилов Г. П.** Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 1. — С. 3–26.
3. **Мальцев А. И.** Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 2. — С. 5–24.
4. **Мальцев А. И.** Итеративные алгебры Поста. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976. — 101 с.
5. **Марченков С. С.** К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 1. — С. 88–99.

6. **Марченков С. С.** О равномерном $id$-разложении булевых функций // Дискрет. математика. — 1990. — Т. 2, вып. 3. — С. 29–41.
7. **Марченков С. С.** Об $id$-разложениях класса $P_k$ над предполными классами // Дискрет. математика. — 1993. — Т. 5, вып. 2. — С. 98–110.
8. **Парватов Н. Г.** Замечания о конечной порождаемости замкнутых классов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2004. — Т. 11, № 3. — С. 32–47.
9. **Парватов Н. Г.** Об инвариантах некоторых классов квазимонотонных функций на полурешётке // Прикл. дискрет. математика. — 2009. — №4. — С. 21–27.
10. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966. — 120 с.
11. **Янов Ю. И., Мучник А. А.** О существовании $k$-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
12. **Baker K. A., Pixley A. F.** Polynomial interpolation and chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Zeiteschr. — 1975. — Bd 143. Heft 2. — S. 165–174.

*Парватов Николай Георгиевич,*
e-mail: parvatov@mail.tsu.ru

Статья поступила
8 сентября 2009 г.

Переработанный вариант —
4 марта 2010 г.