ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2010. Том 17, № 3. С. 61–83

УДК 519.865.3

РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ПОКОЛЕНИЯМИ ИНВЕСТОРОВ *)

А. В. Сидоров

Аннотация. Продолжены исследования модели экономики с эндогенным инвестированием применительно к ситуации, когда инвестиционный процесс неограничен во времени, а инвесторы (они же потребители) образуют сменяющие друг друга перекрывающиеся поколения. В отличие от рассматривавшихся ранее в серии работ случаев, здесь пространство товаров бесконечномерно, хотя каждому поколению в отдельности доступен лишь ограниченный ассортимент товаров. Доказано существование равновесной траектории цен и равновесного межвременно́го распределения благ, которые формируются в результате предельного перехода в слабой топологии пространства всех последовательностей действительных чисел.

Ключевые слова: конкурентное равновесие, перекрывающиеся поколения, эндогенные инвестиции, дисконтированная стоимость, слабая сходимость.

1. Модель экономики с перекрывающимися поколениями

С формальной точки зрения экономическая деятельность каждого поколения идентична всей экономике, рассмотренной в [3]. В данной статье мы ограничимся напоминанием основных обозначений, определений и предварительных результатов, за более подробным изложением и мотивацией следует обратиться к [3, 4].

1.1. Производственный сектор. Пусть $L = \{1, \ldots, l\}$ — *номинальный* ассортимент всех имеющихся в экономике товаров. Товар $k \in L$, который номинально является одним и тем же в различные периоды времени $t \in \{1, 2, \ldots\}$, может иметь различную цену p_k^t и поэтому со стоимостной точки зрения должен рассматриваться как множество различных товаров, т. е. пространство товаров, как и пространство цен, будет

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке поддержке ведущих научных школ (проект НШ–4113.2008.6).

бесконечномерным, хотя в каждый конкретный момент времени размерность пространства потенциально доступных товаров является конечной и равной l.

Замечание 1. Для правильного понимания дальнейших рассуждений следует уточнить различие в употреблении терминов *момент времени* и *период времени*. Фактически в рассматриваемой модели экономики используется непрерывная временна́я шкала $[0, +\infty)$, разбитая счётным множеством *моментов* времени $t \in \{0, 1, \ldots\}$ на *периоды* времени единичной длины $[t, t+1]$, при этом в качестве номера (или идентификатора) временно́го периода будет использоваться его правый край, т. е. заключительный момент времени $t + 1$. Это соглашение соответствует принципу *постнумерандо* при оценке потоков платежей в финансовой математике (см., например, [5, с. 96]). С этой точки зрения первый временно́й период протекает между начальным (нулевым) и первым моментами времени, т. е. совпадает с $[0, 1]$, второй период — это $[1, 2]$ и т. д.

Каждый технологический процесс длится ровно один период, затраты технологического процесса, протекающего в t-м периоде относятся к моменту времени $t - 1$, а выпуск — к моменту t. Далее будем полагать, что в течение каждого периода времени цены постоянны, а именно, в t-м периоде действующие цены образуют вектор $p^t \in \mathbb{R}^L_{++}$. Поскольку производственный процесс совершается не мгновенно, оценку стоимости затрат в начальный момент $t - 1$ следует проводить относительно цен p^t. В свою очередь, выпуск будет относиться к моменту времени t, однако его реализация и потребление будут осуществляться в течение временно́го промежутка $[t, t + 1]$, тем самым извлекаемую выручку следует оценивать в соответствии с ценами p^{t+1}.

Подобно классической модели Эрроу — Дебре (см., например, [2, §15.3]) производство рассматривается в терминах потоков, т. е. положительные компоненты технологического вектора интерпретируются как выпуск, а отрицательные — как затраты. Однако в нашем случае разновременны́е потоки затрат и выпуска уже не могут компенсировать друг друга «в абсолютном выражении», поэтому более корректным будет представление технологического процесса в виде $2l$-мерного вектора, разделив отрицательные и положительные компоненты. Тем самым технологическое множество Y рассматривается как подмножество в $\left(-\mathbb{R}^L_+\right) \times \mathbb{R}^L_+$, где $\mathbb{R}^L_+ = \{y \in \mathbb{R}^L \mid y \geqslant 0\}$, и каждый элемент технологического множества Y может быть представлен в виде $y = (-y^-,\, y^+)$, где $y^\pm \geqslant 0$. Здесь y^- — вектор затрат, указывающий на ассортимент и количество затрачиваемого сырья, а y^+ — вектор выпуска, указывающий на

ассортимент и количество конечной продукции. Здесь и далее для векторных неравенств будут использоваться следующие обозначения: $y \geqslant z$ означает, что $y_k \geqslant z_k$ для всех k; $y \gg z$ означает, что $y_k > z_k$ для всех k; наконец, $y > z$ означает, что $y \geqslant z$ и $y \neq z$. Кроме того, для множества всех строго положительных по всем компонентам векторов будет использоваться обозначение $\mathbb{R}^L_{++} = \{y \in \mathbb{R}^L \mid y \gg 0\}$. Прежде чем сформулировать предположения, налагаемые на технологические множества, введём некоторые обозначения и определения.

Определение 1. *Границей эффективности* технологического множества Y называется множество $\mathrm{Eff}(Y) = \{\overline{y} \in Y \mid (\forall\, y > \overline{y})\, y \notin Y\}$.

Определение 2. Пусть $y \in Y$ — некоторая допустимая ненулевая технология такая, что луч $\Lambda(y) = \mathbb{R}_+ \cdot y$ содержится в Y. В этом случае будем говорить, что технология $y \in Y$ *допускает постоянную отдачу от увеличения масштаба.*

С содержательной точки зрения это означает, что при любом $\lambda \geqslant 0$ пропорциональное увеличение затрат сырья в λ раз допускает увеличение выпуска конечной продукции как минимум в той же пропорции.

Пусть теперь $p = (p^t, p^{t+1}) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^L_{++}$ — некоторый строго положительный по всем компонентам вектор, в дальнейшем интерпретируемый как совокупный вектор цен, характеризующий начальные цены p^t, действующие на временнóм промежутке $[t-1, t]$, и конечные цены p^{t+1} на промежутке $[t, t+1]$. Тогда для любой допустимой технологии $y \in Y$ скалярное произведение $\Pi(p, y) := p \cdot y = p^{t+1} \cdot y^+ - p^t \cdot y^-$ выражает *номинальную* чистую прибыль (разность выручки и издержек) от использования технологии y. Эта величина отличается от *реальной* или *экономической* чистой прибыли, учитывающей межвременнóе различие стоимостей.

Определение 3. Технология $y \in Y$ называется *p-рентабельной*, если $\Pi(p, y) \geqslant 0$, и *p-оптимальной*, если $\Pi(p, y) \geqslant \Pi(p, z)$ для любого $z \in Y$.

Теперь сформулируем основные предположения, налагаемые на технологические множества. Предполагается, что для каждого последующего условия считаются выполненными все предыдущие. Это особенно важно для правильной интерпретации двух последних условий.

Y1. Множество Y выпукло и замкнуто.

Y2. Множество Y удовлетворяет *условию свободного расходования* в $\left(-\mathbb{R}^L_+\right) \times \mathbb{R}^L_+$: если $y \in Y$ и $y' \in \left(-\mathbb{R}^L_+\right) \times \mathbb{R}^L_+$ таковы, что $y' \leqslant y$, то $y' \in Y$.

Y3. Множество Y удовлетворяет *условию отсутствия рога изоби-*

лия: $0 \in \mathrm{Eff}(Y)$.

Y4. Множество Y удовлетворяет *условию убывания отдачи от увеличения масштаба*: для любой технологии $y \in Y$, допускающей постоянную отдачу от увеличения масштаба, выполнено $y^+ = 0$.

Y5. Множество Y удовлетворяет условию *эффективной строгой выпуклости*: $\lambda y + (1-\lambda)y' \notin \mathrm{Eff}(Y)$ для любых $y, y' \in \mathrm{Eff}(Y)$, $y \neq y'$ и $\lambda \in (0,1)$.

Подробное обсуждение содержательной интерпретации и роли каждого из этих условий приведено в [3]. Отметим также, что понятие эффективной строгой выпуклости, изначально ориентированное на технологические множества, разумеется, слабее строгой выпуклости в общематематическом смысле. Однако в силу устоявшейся традиции в контексте технологических множеств термин «строгая выпуклость» используется только в этом, «эффективном» смысле.

Сформулируем ряд утверждений, которые уже доказаны в рамках «краткосрочной» модели без перекрывающихся поколений в [3]. Отметим, что они, как и некоторые из последующих результатов, носят «локальный» характер, т. е. ограничены некоторым временны́м промежутком $[t-1, t]$, что с технической точки зрения неотличимо от однопериодного случая на промежутке $[0,1]$.

Лемма 1 [3]. *Пусть выполнены условия* Y1–Y4 *и* $K \subset \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}^L_{++}$ — *произвольный компакт. Тогда объединение множеств p-рентабельных технологий по всем $p \in K$ ограничено. В частности, если $K = \{p\}$, то множество всех p-рентабельных технологий является непустым выпуклым компактным множеством.*

Лемма 2 [3]. *Пусть выполнены условия* Y1–Y4. *Тогда для любого $p \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ множество p-оптимальных технологий $S(p)$ является непустым выпуклым компактным подмножеством границы эффективности* $\mathrm{Eff}(Y)$, *точечно-множественное отображение $S: p \mapsto S(p)$ имеет замкнутый график во всей области определения и образ $S(K)$ для любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$ является ограниченным множеством. Если дополнительно выполнено условие* Y5, *то $S(p) = \{y(p)\}$ — одноэлементное множество и функция $y : \mathbb{R}^{2L}_{++} \to Y$ является непрерывной.*

Предположим, что в момент времени t фирмы образуют непустое конечное множество M_t и производственные возможности каждой фирмы $j \in M_t$ характеризуются технологическим множеством Y^j_t, удовлетворяющим условиям Y1–Y5. Тогда в силу леммы 2 определены непрерывные функции $y_{t,j}(p^t, p^{t+1})$, характеризующие оптимальный производ-

ственный план фирмы $j \in M_t$. Определим функцию совокупного производственного предложения

$$y_t(p^t, p^{t+1}) = \sum_{j \in M_t} y_{t,j}(p^t, p^{t+1}).$$

Тогда функции

$$y_t^-(p^t, p^{t+1}) = \sum_{j \in M_t} y_{t,j}^-(p^t, p^{t+1}), \quad y_t^+(p^t, p^{t+1}) = \sum_{j \in M_t} y_{t,j}^+(p^t, p^{t+1})$$

характеризуют совокупные затраты и совокупный выпуск соответственно.

Заметим, что в силу условия Y3 равенство $y_t(p^t, p^{t+1}) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $y_t^-(p^t, p^{t+1}) = 0$, что, в свою очередь, эквивалентно выполнению равенства $y_{t,j}^-(p^t, p^{t+1}) = 0$ для всех $j \in M_t$. Используя это обстоятельство, введём следующую функцию:

$$r_t(p^t, p^{t+1}) = \begin{cases} \dfrac{(p^t, p^{t+1}) \cdot y_t(p^t, p^{t+1})}{p^t \cdot y_t^-(p^t, p^{t+1})} & \text{при } y_t(p^t, p^{t+1}) \neq 0, \\ 0 & \text{при } y_t(p^t, p^{t+1}) = 0, \end{cases}$$

которую можно интерпретировать как среднюю доходность производственного сектора, т. е. величину совокупной чистой прибыли, отнесённой к совокупным затратам. Непосредственно из определения функции r_t следует её положительная однородность степени нуль.

Лемма 3 [3]. *Функция $r_t(p^t, p^{t+1})$ непрерывна всюду в $\mathbb{R}^{2L}_{++}$.*

1.2. Потребительский сектор. В потребительском секторе экономики действуют экономические агенты, образуя сменяющие друг друга поколения. Каждое поколение функционирует в течение двух периодов времени, т. е. в каждый период сосуществуют ровно два поколения («отцы и дети»). Это обстоятельство и обосновывает термин «перекрывающиеся поколения». В каждый момент времени $t \in \{1, 2, \ldots\}$ рождается новое поколение N_t, являющееся непустым конечным множеством, и каждый участник $i \in N_t$ характеризуется вектором начального запаса $\omega^{i,t} = (\omega^{i,t}, \omega^{i,t+1}) \in \mathbb{R}^{2L}_+$, где $\omega^{i,t}$ и $\omega^{i,t+1}$ — запасы участника i в момент времени t и $t+1$ соответственно. Особый случай поколения N_0 подробнее рассмотрен ниже. Допустимые потребительские наборы поколения N_t, $t = 1, 2, \ldots$, образуют множество $\mathbb{R}^{2L}_+$, на котором заданы индивидуальные отношения предпочтения $\succcurlyeq_i^t$. При этом отношение $x \succcurlyeq_i^t y$ трактуется следующим образом: «для потребителя i набор x не хуже набора y», что допускает отношение безразличия. Тот факт, что для

данного потребителя «x лучше чем y», будет обозначаться как $x \succ_i^t y$. Подобно процессу производства процесс потребления также распределен во времени, однако имеется и определенное отличие: для производителя сырьевой вектор y^- и вектор конечной продукции y^+ связаны в единый технологический процесс, в то время как потребитель формирует два относительно независимых плана потребления $x^{i,t}, x^{i,t+1} \in \mathbb{R}_+^L$ для начального и конечного моментов времени.

Отметим в качестве особого случая поколение N_0, члены которого, в отличие от всех остальных, характеризуются l-мерным начальным запасом $\omega^{i,1}$ и отношением предпочтения $\succcurlyeq_i^0$, определенным на множестве $\mathbb{R}_+^L$. Будем полагать, что эти начальные запасы уже включают в себя выпуск производственных процессов, протекавших в промежутке $[0, 1]$, что позволит нам в будущем сосредоточиться на «полных» технологических процессах, начинающихся с момента времени $t = 1$, и более поздних. Также поколение N_0 не будет участвовать в процессе инвестирования в производство, о котором более подробно рассказано ниже. Впрочем, более точным будет утверждение, состоящее в том, что возможные итоги инвестиционной активности этого поколения уже учтены в величине его начального запаса.

Перейдём к описанию бюджетных ограничений поколения N_t, $t \geqslant 1$, при заданных ценах $p = (p^t, p^{t+1}) \in \mathbb{R}_{++}^{2L}$. В классической модели Эрроу — Дебре доход потребителя i складывался из стоимости начального запаса $p \cdot \omega^i$ и дополнительного дохода от участия в разделе прибылей фирм $j \in M$. Эти доли участия характеризовались экзогенно заданными величинами $0 \leqslant \theta_{ij} \leqslant 1$. В отличие от этого в изучаемой модели каждый потребитель в начальный момент времени t может капитализировать некоторую часть d_t^i своего дохода от реализации начального запаса $p \cdot \omega^{i,t}$ либо инвестировав его в производственный сектор, либо ссудив его другим экономическим агентам. Допустимыми являются также и отрицательные значения d_t^i — этот случай интерпретируется как заём в размере $\left|d_t^i\right|$. По окончании временно́го промежутка $[t, t+1]$ на инвестированные суммы (суммы займа) происходит начисление процентов в соответствии с процентной ставкой r_t, единой для всех типов финансовых операций в данный период времени. Вопрос о том, как именно определяется процентная ставка r_t, рассмотрен ниже. В данный момент ставка r_t и цены p рассматриваются потребителем как экзогенные параметры. Тем самым величины дохода, направляемые на потребление в начальный и конечный моменты времени, составляют $p^t \omega^{i,t} - d_t^i$ и $p^{t+1} \omega^{i,t+1} + (1 + r_t) d_t^i$ соответственно. Отсюда вытекает, что бюджетное множество потребите-

ля $i \in N_t$ при ценах $p = (p^t, p^{t+1}) \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ и процентной ставке r_t имеет вид

$$B^t_i(p, r_t) = \big\{x^i = (x^{i,t}, x^{i,t+1}) \in \mathbb{R}^{2L}_{+} \mid \big(\exists\, d^i_t \in \mathbb{R}\big)$$
$$p^t \cdot x^{i,t} = p^t \cdot \omega^{i,t} - d^i_t, \quad p^{t+1} \cdot x^{i,t+1} \leqslant p^{t+1} \cdot \omega^{i,t+1} + (1 + r_t) \cdot d^i_t\big\}.$$

В этом бюджетном множестве потребитель осуществляет выбор максимальных элементов относительно предпочтения $\succcurlyeq^t_i$, формируя множество спроса

$$D^t_i(p, r_t) = \big\{x^i \in B^t_i(p, r_t) \mid \big(\forall\, z \in B^t_i(p, r_t)\big)\, x^i \succcurlyeq^t_i z\big\}.$$

Предыдущие рассуждения касались только тех поколений, которые родились в момент времени $t \geqslant 1$. В случае членов поколения N_0, играющего в рамках данной модели менее активную роль, бюджетное множество и множество спроса полностью идентичны соответствующим множествам в классической модели экономики чистого обмена:

$$B^0_i(p^1) = \big\{x \in \mathbb{R}^L_+ \mid p^1 \cdot x \leqslant p^1 \cdot \omega^{i,1}\big\},$$
$$D^0_i(p^1) = \big\{x^i \in B^0_i(p^1) \mid \big(\forall z \in B^0_i(p^1)\big)\, x^i \succcurlyeq^0_i z\big\}.$$

Определение 4. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на топологическом пространстве X называется *непрерывным*, если для любого $x \in X$ множества $\{y \in X \mid y \succcurlyeq x\}$ и $\{y \in X \mid x \succcurlyeq y\}$ замкнуты.

Определение 5. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на выпуклом множестве X называется *выпуклым*, если для любых $x, y \in X$ таких, что $x \succcurlyeq y$, и любого $\lambda \in [0, 1]$ выполнено $\lambda x + (1 - \lambda)y \succcurlyeq y$.

Определение 6. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ называется *локально ненасыщаемым вверх* на топологическом пространстве X, если для любого $x \in X$ и любой относительной окрестности $U \subset X$ точки x найдётся точка $y \in U$ такая, что $y \succ x$.

Лемма 4 [3]. *Пусть отношение предпочтения $\succcurlyeq^t_i$ для $t \geqslant 1$, $i \in N_t$, непрерывно, выпукло, локально ненасыщаемо и $(\omega^{i,t}, \omega^{i,t+1}) \neq 0$. Тогда для любых $p = (p^t, p^{t+1}) \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ и $r \geqslant 0$ множество $D^t_i(p, r_t)$ является непустым выпуклым компактом и для любого $x \in D^t_i(p, r_t)$ выполнено тождество*

$$\left(p^t, \frac{p^{t+1}}{1 + r_t}\right) \cdot (x^t, x^{t+1}) = \left(p^t, \frac{p^{t+1}}{1 + r_t}\right) \cdot (\omega^{i,t}, \omega^{i,t+1}).$$

Аналогично, если при $t = 0$ отношения предпочтения $\succcurlyeq_i^0$ непрерывны, выпуклы, локально ненасыщаемы и $\omega^{i,1} \neq 0$, то множества $D_i^0(p^1)$ являются непустыми выпуклыми компактами и для любого $x \in D_i^0(p^1)$ выполнено тождество Вальраса: $p^1 \cdot x = p^1 \cdot \omega^{i,1}$.

1.3. Взаимодействие секторов экономики. Рассмотрим оба сектора экономики в рамках единой системы, связав их с помощью операций кредитования (инвестирования). Одним из параметров, формирующих потребительский спрос, является доходность кредитных операций (процентная ставка) r_t, формально независимая от цен. Начиная с этого момента будем полагать, что она совпадает со средней доходностью производственного сектора $r_t(p^t, p^{t+1})$ в промежутке $[t, t+1]$. Более подробное обсуждение обоснованности этого отождествления можно найти в [3].

Рассмотрим отображение $\mathrm{PV} : \mathbb{R}^{2L}_{++} \to \mathbb{R}^{2L}_{++}$, заданное формулой

$$\mathrm{PV}(p^t, p^{t+1}) = \left(p^t, \frac{p^{t+1}}{1 + r_t(p^t, p^{t+1})}\right).$$

В силу леммы 3 PV является непрерывной векторнозначной функцией. Кроме того, из положительной однородности степени нуль функции r_t следует положительная однородность первой степени для PV. Далее положим $D_i^t(p^t, p^{t+1}) := D_i^t(p^t, p^{t+1}, r_t(p^t, p^{t+1}))$. Теперь из лемм 3 и 4 вытекает следующая

Лемма 5. *Пусть отношение предпочтения $\succcurlyeq_i^t$ для $t \geqslant 1$, $i \in N_t$ непрерывно, выпукло, локально ненасыщаемо и $(\omega^{i,t}, \omega^{i,t+1}) \neq 0$. Кроме того, пусть выполнены предположения* Y1–Y5. *Тогда для любого $p \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$ множество $D_i^t(p^t, p^{t+1})$ является непустым выпуклым компактом и для любого $x \in D_i^t(p^t, p^{t+1})$ выполнено тождество*

$$\mathrm{PV}\big(p^t, p^{t+1}\big) \cdot (x^t, x^{t+1}) = \mathrm{PV}\big(p^t, p^{t+1}\big) \cdot (\omega^{i,t}, \omega^{i,t+1}). \tag{1}$$

При этом точечно-множественное отображение $D_i^t(p^t, p^{t+1})$ полунепрерывно сверху.

Доказательство этого утверждения следует из леммы 4 и требует уточнения лишь в части полунепрерывности. Для этого достаточно показать, что точечно-множественное отображение D_i^t имеет замкнутый график и для любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}^{2L}_{++}$его образ $D_i^t(K)$ ограничен. Ограниченность образа вполне очевидна, поскольку это множество состоит из неотрицательных векторов, чьи компоненты ограничены сверху величиной $\omega_{\max}/p_{\min}$, где $\omega_{\max}$ — максимальная компонента

вектора $(\omega^{i,t}, \omega^{i,t+1})$, а $p_{\min} = \min\big(p_j^{t+\delta} |\, p \in K,\ j \in L,\ \delta \in \{0,1\}\big) > 0$. Доказательство замкнутости графика проходит по стандартной схеме (см., например, [2, лемма 16.4 (iii)]) за исключением того, что вместо скалярного умножения на p используется другой непрерывный положительно-однородный функционал — умножение на $\mathrm{PV}\big(p^t, p^{t+1}\big)$. Это никак не отражается на ходе доказательства, поэтому результат будет тем же. Лемма 5 доказана.

Замечание 2. Полученное тождество имеет важный содержательный смысл: величина $\mathrm{PV}\big(p^t, p^{t+1}\big)x$ представляет собой так называемую «современную стоимость» (present value) потребительского набора x. Понятие современной стоимости используется в финансовой математике для сравнения между собой разновременны́х платежей (см. например, [5, § 4.2]). В русскоязычной литературе по финансовому анализу используется также синонимичное ему понятие «приведённая стоимость». В дальнейшем $\mathrm{PV}\big(p^t, p^{t+1}\big)$ будем называть *приведёнными ценами*, а стоимость $\mathrm{PV}\big(p^t, p^{t+1}\big)x$, выраженную в приведённых ценах, — *приведённой стоимостью* на промежутке $[t, t+1]$. В соответствии с этим равенство (1) является тождеством Вальраса относительно приведённых цен. При этом легко видеть, что относительно номинальных цен $\big(p^t, p^{t+1}\big)$ тождество Вальраса не имеет места. Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathrm{PV}(p^t, p^{t+1}) \cdot y_t(p^t, p^{t+1}) &= \frac{p^{t+1} \cdot y_t^+(p^t, p^{t+1})}{1 + r_t(p^t, p^{t+1})} - p^t \cdot y_t^-(p^t, p^{t+1}) \\ &= \frac{p^{t+1} \cdot y_t^+(p^t, p^{t+1})(p^t \cdot y_t^-(p^t, p^{t+1}))}{p^{t+1} \cdot y_t^+(p^t, p^{t+1})} - p^t \cdot y_t^-(p^t, p^{t+1}) = 0\end{aligned}$$

для любого $(p^t, p^{t+1}) \in \mathbb{R}^{2L}_{++}$. Иными словами, чистая *экономическая* прибыль совокупного производства на промежутке $[t, t+1]$ равна нулю, в отличие от *номинальной*, которая, как правило, строго положительна. Этот вывод вполне закономерен в рамках теории конкурентного рынка, где равенство нулю чистой прибыли является следствием свободного входа в отрасль.

1.4. Основной результат и схема доказательства. Сформулируем вначале некоторые дополнительные предположения и определения, которые понадобятся для формулировки и доказательства основного результата данной работы. Прежде всего напомним, что множество L характеризует лишь *номинальный* ассортимент товаров, для более точной характеристики следует указать время потребления/производства. В связи с этим *t-товаром* будем называть пару (k, t) где $k \in L$, $1 \leqslant t \leqslant T$.

Определение 7. Будем говорить, что потребитель $i \in \bigcup_{\tau=0}^{T-1} N_\tau$ *обладает* t-товаром (k,t), если $\omega_k^{i,t} > 0$, и он *желает* t-товар (k,t), если для любого потребительского набора x и любого $\varepsilon > 0$ выполнено $x + \varepsilon e(k) \succ_i^t x$, где

$$e(k) = \begin{cases} e^k & \text{при}\, t = 1,\ i \in N_0, \\ (0, e^k) & \text{при } t > 1,\ i \in N_{t-1}, \\ (e^k, 0) & \text{при } i \in N_t, \end{cases}$$

$e^k \in \mathbb{R}^L$ — k-й единичный вектор.

Заметим, что непосредственно из определения обладания или желания товара (k,t) следует, что промежуток жизнедеятельности агента i включает период t.

Определение 8. Будем говорить, что потребительский сектор удовлетворяет *условию смежной ресурсной связности*, если для любых различных товаров $(k,t) \neq (k',t')$ таких, что $|t-t'| \leqslant 1$, найдётся участник i, который желает t-товар (k,t) и обладает t'-товаром (k',t').

Разумеется, данное условие не принадлежит к числу наиболее общих предположений, обеспечивающих существование равновесий, хотя оно значительно слабее часто используемых условий полной начальной наделённости агента $\omega^{i,t} \gg 0$ или строгой монотонности предпочтений по всем переменным. Одним из более слабых условий, позволяющим получить те же результаты ценой усложнения изложения, является условие *межвременнóй неприводимости* Маккензи (см. например, [7, с. 58–59]).

Определение 9. Будем говорить, что производственный сектор удовлетворяет *условию производственной ненасыщаемости*, если для любых $t \leqslant T-1$ и $y \in Y_t = \sum_{j \in M_t} Y_t^j$ найдётся $z \in Y_t$ такой, что $z^+ > y^+$.

Как отмечалось выше, пространство товаров (точнее, t-товаров), как и пространство цен, формально бесконечно. Для того чтобы корректно определить понятие равновесия в этой ситуации, вначале определим множество всех допустимых распределений в экономике с перекрывающимися поколениями:

$$\mathcal{Z} = \Big\{ z = (z^1, z^2, \ldots),\ \ z^t = \big(x^{i,t} \geqslant 0, y_{j,t} \in Y_t^j\big) \mid \\ \sum_{i \in N_{t-1} \cup N_t} x^{i,t} = \Omega^t + \sum_{j \in M_{t-1}} y_{t-1,j}^+ - \sum_{j \in M_t} y_{t,j}^- \Big\}.$$

Определение 10. Допустимое распределение $\overline{z} \in \mathcal{Z}$ называется *равновесным*, если существует последовальность векторов цен $(p^1, p^2, \ldots)$ такая, что $(\forall i \in N_0)\ \overline{x}^{i,1} \in D_i^0(p^1)$, $(\forall t \geqslant 1)(\forall i \in N_t)\left(\overline{x}^{i,t}, \overline{x}^{i,t+1}\right) \in D_i^t(p^t, p^{t+1})$, $(\forall j \in M_t)\ \overline{y}_{j,t} = y_{j,t}(p^t, p^{t+1})$.

Основным результатом этого раздела и всей статьи является

Теорема 1. *Пусть в производственном секторе все технологические множества удовлетворяют условиям* Y1–Y5, *выполнено условие производственной ненасыщаемости, потребительские отношения предпочтения* $\succcurlyeq_i^t$ *непрерывны, выпуклы, локально ненасыщаемы в каждый момент времени* t , $\omega^{i,t} \neq 0$ *и выполнено условие смежной ресурсной связности. Тогда в экономике с перекрывающимися поколениями существует равновесное распределение.*

Доказательство теоремы будет проводиться по следующей схеме. Прежде всего рассматривается последовательность экономик с конечным числом товаров (модели с ограниченным горизонтом), в известной мере «аппроксимирующих» модель с перекрывающимися поколениями. Детальная формулировка этой «аппроксимации» дана в следующем разделе. Используя традиционную конечномерную технику, покажем существование равновесных состояний в каждой экономике с ограниченным горизонтом, входящей в эту последовательность. Заметим, что последовательность соответствующих равновесных распределений содержится в множестве $\mathcal{Z}$. Далее, используя теорему Тихонова, покажем компактность в слабой топологии $\mathbb{R}^\infty$ множества допустимых распределений $\mathcal{Z}$ и множества определённым образом нормированных цен $\mathcal{P}$. В конечном счёте, искомое равновесие будет получено как предельная точка последовательности равновесий с ограниченным горизонтом в слабой топологии $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$.

2. Модель экономики с ограниченным горизонтом

Пусть $T \geqslant 2$ — некоторое натуральное число. Определим модель экономики с перекрывающимися поколениями и ограниченным горизонтом T следующим образом. В производственном секторе деятельность завершается в момент времени T, т. е. последний производственный процесс протекает в промежутке $[T-1, T]$ на предприятиях из множества M_{T-1}. В период времени T происходит получение выпуска производственных процессов, реализация произведённой продукции по ценам p^T и начисление процентов на инвестированные суммы в соответствии со средней доходностью $r_{T-1}(p^{T-1}, p^T)$. С формальной точки

зрения это означает, что $M_t = \varnothing$ для всех $t \geqslant T$. Аналогично в потребительском секторе участники последнего поколения N_{T-1}, родившегося в период времени $T-1$, завершают свою деятельность в момент времени T, получив и полностью израсходовав свой основной $p^T\omega^{i,T}$ и дополнительный инвестиционный доход $(1 + r_{T-1}(p^{T-1}, p^T))d_i^{T-1}$. Новые поколения больше не рождаются, т. е. $N_T = \varnothing$ для всех $t \geqslant T$. Мы не придаём этому «концу света» какой-либо содержательной интерпретации, поскольку модели с ограниченным горизонтом будут играть, главным образом, вспомогательную роль.

Для моделей экономики с ограниченным горизонтом имеется возможность ввести конечномерное пространство товаров $\mathbb{R}^{T\cdot L}$, единое для всех поколений. Пусть $1 \leqslant t \leqslant T-1$ — произвольный момент времени, $j \in M_t$ — некоторое предприятие, начавшее производственный процесс $y \in Y_t^j$, и $i \in N_t$ — представитель поколения, родившегося в момент времени t с начальными запасами $\omega^i = (\omega^{i,t}, \omega^{i,t+1})$ и планируемым межвременны́м распределением потребления $x = (x^t, x^{t+1})$. Тогда эти количественные характеристики получают представление в пространстве $\mathbb{R}^{T\cdot L}$ следующим образом: $\omega^i \mapsto (0, \ldots, 0, \omega^{i,t}, \omega^{i,t+1}, 0, \ldots, 0)$, $y \mapsto (0, \ldots, 0, -y^-, y^+, 0, \ldots, 0)$, $x \mapsto (0, \ldots, 0, x^t, x^{t+1}, 0, \ldots, 0)$, где $0 \in \mathbb{R}^L$ и в каждом TL-мерном векторе начальный нулевой отрезок образует нулевой элемент в пространстве $\mathbb{R}^{(t-1)L}$. Двойственное пространство цен будет иметь ту же самую размерность TL. Для произвольной траектории цен $p = (p^1, p^2, \ldots, p^T)$ определим вектор

$$y(p) = (-y_1^-(p^1, p^2), \ldots, y_{t-1}^+(p^{t-1}, p^t) - y_t^-(p^t, p^{t+1}), \ldots, \\ y_{T-1}^+(p^{T-1}, p^T)),$$

где $y_t^{\pm}(p^t, p^{t+1})$ — функции, определённые в п. 1.1. Отметим, что функция производственного предложения $y(p)$ для экономики с ограниченным горизонтом в точности совпадает с соответствующей функцией в многопериодной модели экономики с краткосрочным планированием, изучавшейся в [4] (в части потребительского сектора между ними имеются значительные различия). Поэтому некоторые обозначения, понятия и связанные с ними результаты из [4] без особых проблем могут быть перенесены в настоящую статью.

Для более компактной записи дальнейших выкладок введём следующие обозначения:

$$R_t(p) = 1 + r_t(p^t, p^{t+1}), \quad R_{[t]}(p) = \prod_{\tau=1}^{t} R_\tau(p), \quad \Omega^t = \sum_{i \in N_{t-1} \cup N_t} \omega^{i,t}.$$

Здесь в случае $t = T$ символически полагаем $N_T = \varnothing$. Кроме того, определим отображение приведённых цен на временно́м промежутке $[1, T]$ следующим образом:

$$\mathrm{PV}_T(p^1, \ldots, p^T) = \left(p^1, \frac{p^2}{R_1(p)}, \frac{p^3}{R_1(p)R_2(p)}, \ldots, \frac{p^T}{R_{[T-1]}(p)}\right).$$

Тогда справедлива

Лемма 6. *Функция $y(p)$ непрерывна и $\mathrm{PV}_T(p) \cdot y(p) \equiv 0$ для любого $p \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$.*

Доказательство этого утверждение элементарно и заключается в многократном применении тождества, полученного в замечании 2. Лемма 6 доказана.

Далее, для траектории цен p определим множество траекторий совокупного спроса:

$$D(p) = \Big\{(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^T) \mid \big(\exists\, x^{i,1} \in D_i^0(p^1)\big)\, \big(\exists\, (x^{i,t}, x^{i,t+1}) \in D_i^t(p^t, p^{t+1})\big) \\ \overline{x}^t = \sum_{i \in N_{t-1} \cup N_t} x^{i,t}\Big\}$$

Аналогично определяется траектория совокупного начального запаса $\Omega = (\Omega^1, \Omega^2, \ldots, \Omega^T)$.

Лемма 7. *Пусть для всех $t \geqslant 1$, $i \in N_t$ отношения предпочтения $\succcurlyeq_i^t$ непрерывны, выпуклы и локально ненасыщаемы и $(\omega^{i,t}, \omega^{i,t+1}) \neq 0$. Кроме того, пусть выполнены предположения* Y1–Y5. *Тогда множество $D(p)$ является непустым выпуклым компактом для любого $p \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ и для любого $x \in D(p)$ выполнено тождество*

$$\mathrm{PV}_T(p) \cdot x \equiv \mathrm{PV}_T(p) \cdot \Omega.$$

При этом точечно-множественное отображение $D(p)$ имеет замкнутый график, для любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}^{TL}_{++}$ образ $D(K)$ ограничен, в частности, $D(p)$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Множество $D(p)$ аддитивно определяется через множества $D_i^t(p)$, поэтому свойства выпуклости и компактности естественным образом наследуются, равно как и полунепрерывность сверху отображения D. Тождество Вальраса для траектории спроса x также легко вытекает из равенства (1), которое применяется после приведения подобных слагаемых в $\mathrm{PV}_T(p) \cdot x = \mathrm{PV}_T(p) \cdot \Omega$ путём группировки по поколениям N_t. Лемма 7 доказана.

Определение 11. Вектор $p^* \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ называется *равновесной системой цен* в модели экономики с горизонтом T, если существует $\overline{x} \in D(p^*)$ такой, что $\overline{x} = \Omega + y(p^*)$.

Следующая теорема является промежуточным результатом по отношению к исследованию равновесий с неограниченным горизонтом, однако она может быть интересна и сама по себе.

Теорема 2. *Пусть в производственном секторе все технологические множества удовлетворяют условиям* Y1–Y5, *выполнено условие производственной ненасыщаемости, потребительские отношения предпочтения* $\succcurlyeq^t_i$ *непрерывны, выпуклы, локально ненасыщаемы в каждый момент времени* t, $\omega^{i,t} \neq 0$ *и выполнено условие смежной ресурсной связности. Тогда для любого* T *существует равновесная система цен* $p \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ *в экономике с ограниченным горизонтом* T.

2.1. Вспомогательные результаты. Прежде чем перейти непосредственно к доказательству приведённой выше теоремы, сформулируем некоторые результаты технического характера.

Лемма 8 [4]. *Для любого вектора* $q \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ *прообраз* $\mathrm{PV}^{-1}_T(q)$ *является непустым выпуклым компактным подмножеством в* $\mathbb{R}^{TL}_{++}$. *При этом для любого* $\lambda > 0$ *выполнено* $\mathrm{PV}^{-1}_T(\lambda q) = \mathrm{PV}^{-1}_T(q)$ *и множество* $y(\mathrm{PV}^{-1}_T(q))$ *одноэлементно.*

Лемма 9 [4]. *Точечно-множественное отображение* PV^{-1}_T *имеет замкнутый график, и для любого компактного множества* $K \subset \mathbb{R}^{LT}_{++}$ *его образ* $\mathrm{PV}^{-1}_T(K)$ *ограничен.*

Следствие 1. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *точечно-множественное отображение* $\mathrm{PV}^{-1}_T : \mathbb{R}^{TL}_{++} \leftrightarrows \mathbb{R}^{TL}_{++}$ *полунепрерывно сверху*;

(ii) *суперпозиция отображений* $\widetilde{y} = y \circ \mathrm{PV}^{-1}_T : \mathbb{R}^{TL}_{++} \leftrightarrows \mathbb{R}^{TL}$ *является непрерывной функцией, положительно однородной степени нуль и удовлетворяющей тождеству* $q \cdot \widetilde{y}(q) = 0$ *для всех* $q \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$;

(iii) *точечно-множественное отображение*

$$\widetilde{D} = D \circ \mathrm{PV}^{-1}_T : \mathbb{R}^{TL}_{++} \leftrightarrows \mathbb{R}^{TL}_{+}$$

полунепрерывно сверху, положительно однородно степени нуль и удовлетворяет тождеству Вальраса: $q \cdot \widetilde{D}(q) = q \cdot \Omega$ *для всех* $q \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$;

(iv) *для любого* $q \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ *множество* $\widetilde{D}(q)$ *непусто, выпукло и компактно.*

Доказательство. Утверждение (i) — следствие леммы 9. Из него и из непрерывности функции y следует полунепрерывность точечно-множественного отображения $\widetilde{y}$. Однако из леммы 8 следует одноэлементность множества $\widetilde{y}(q)$ при любом значении аргумента, поэтому $\widetilde{y}$ — непрерывная функция. Однородность суперпозиции следует из выполнения этого свойства для y и PV_T^{-1}. Далее, пусть $q \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ — произвольный элемент. В силу леммы 8 найдётся $p \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ такой, что $q = \mathrm{PV}_T(p)$. Тогда

$$q \cdot \widetilde{y}(q) = \mathrm{PV}_T(p)(y \circ \mathrm{PV}_T^{-1}(\mathrm{PV}_T(p))) = \mathrm{PV}_T(p) \cdot y(p) = 0$$

в силу леммы 6. Из аналогичных соображений и леммы 7 вытекают утверждения (iii) и (iv). Следствие 1 доказано.

Определим на $\mathbb{R}^{TL}_{++}$ точечно-множественное отображение $q \mapsto Z(q)$, полагая $Z(q) = \widetilde{D}(q) - \Omega - \widetilde{y}(q)$. Заметим, что вектор $p^* \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ является равновесным тогда и только тогда, когда $p^* \in \mathrm{PV}_T^{-1}\big(q^*\big)$, где $q^* \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ удовлетворяет условию $0 \in Z(q^*)$. Действительно, в этом случае $y(p^*) = \widetilde{y}(q^*)$, $D(p^*) = \widetilde{D}(q^*)$ в силу определения правых частей. Поэтому найдётся $\overline{x} \in D(p^*) = \widetilde{D}(q^*)$ такое, что $\overline{x} = \Omega + y(p^*)$.

Лемма 10. *Отображение $Z(q)$ удовлетворяет следующим условиям*:

(i) *при любом $q \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ множество $Z(q)$ является непустым выпуклым компактом*;

(ii) *при любом $\lambda > 0$ выполнено равенство $Z(\lambda q) = Z(q)$*;

(iii) *для любых $q \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ и $z \in Z(q)$ выполнено тождество $q \cdot z = 0$*;

(iv) *точечно-множественное отображение $Z(q)$ имеет замкнутый график и для любого компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}^{TL}_{++}$ его образ $Z(K)$ ограничен.*

Доказательство. Справедливость леммы вытекает из лемм 7–9 и следствия 1. Лемма 10 доказана.

Рассмотрим следующее множество векторов:

$$\widetilde{Z}_T = \Big\{ z \in \mathbb{R}^{TL} \mid \big(\exists\, x^{i,t} \geqslant 0\big) \big(\exists\, y_{j,t} \in Y^j_t\big) \\ z^t = \sum_{i \in N_{t-1} \cup N_t} x^{i,t} - \sum_{j \in M_{t-1}} y^+_{t-1,j} + \sum_{j \in M_t} y^-_{t,j} - \Omega^t \Big\}.$$

Как и ранее, применяя это определение для «крайних» значений t полагаем $N_{-1} = \varnothing$, $M_0 = \varnothing$, $N_T = \varnothing$, $M_T = \varnothing$. В силу определения выполнено включение $Z(q) \subset \widetilde{Z}_T$.

Лемма 11. *Пусть* $v \in \mathbb{R}^{TL}$ *и* $\widetilde{Z}_T(v) = \{z \in \widetilde{Z}_T \mid z \leqslant v\}$. *Тогда множество всех слагаемых, входящих во все элементы* $z \in \widetilde{Z}_T(v)$, *т. е. всех* $x^{i,t}$, y_j^{t-}, y_j^{t+} *для всех* $i \in N_t$, $j \in M_t$, $t \in \{0, \ldots, T\}$, *равномерно ограничено сверху, т. е. существует верхняя граница, зависящая от выбора* v, *но не зависящая от* z.

Доказательство этого утверждения при $T = 2$ содержится в лемме 13 [4]. Используя индукцию, докажем общий случай. Заметим, что для любого подмножества $U \subset Y_t^j \subset \mathbb{R}^{2L}$ из ограниченности проекции множества U на первые l компонент следует ограниченность всего множества U. Действительно, если существует последовательность $y_n \in U$ такая, что $\|y_n\| \to +\infty$, то без потери общности можно считать последовательность элементов единичной сферы $z_n = y_n/\|y_n\|$ сходящейся к некоторому $z \neq 0$. При этом $z^- = \lim\limits_{n\to\infty} y_n^-/\|y_n\| = 0$ в силу ограниченности последовательности числителей, тем самым $z > 0$. С другой стороны, для всех n таких, что $\|y_n\| \geqslant 1$, выполнено

$$z_n = (1 - 1/\|y_n\|)0 + (1/\|y_n\|)y_n \in Y_j^t,$$

поэтому $z \in Y_t^j$, что противоречит условию отсутствия «рога изобилия».

Базис индукции. Пусть $t = 1$. Тогда

$$z^1 = \sum_{i \in N_0 \cup N_1} x^{i,1} + \sum_{j \in M_1} y_{1,j}^- - \Omega^1 \leqslant v^1.$$

Отсюда следует, что все $x^{i,1}$, $y_{1,j}^-$ ограничены сверху вектором $\Omega^1 + v^1$, который не зависит от выбора z^1.

Шаг индукции. Предположим, что для всех $t < \tau$ доказана ограниченность всех $x^{i,t}$, $y_{t,j}^{\pm}$ и для $t = \tau$ доказана ограниченность $x^{i,\tau}$, $y_{\tau,j}^-$. В силу сделанного выше замечания отсюда следует ограниченность множества всех слагаемых вида $y_{\tau,j}^+$ Рассмотрим теперь всевозможные векторы вида

$$z^{\tau+1} = \sum_{i \in N_\tau \cup N_{\tau+1}} x^{i,\tau+1} + \sum_{j \in M_{\tau+1}} \left(y_{\tau+1,j}^-\right) - \sum_{j \in M_\tau} \left(y_{\tau,j}^+\right) - \Omega^{\tau+1} \leqslant v^{\tau+1}.$$

В силу индукционного предположения и сделанного выше замечания отсюда вытекает ограниченность множества всех слагаемых вида $x^{i,\tau+1}$, $y_{\tau+1,j}^-$, что завершает выполнение шага индукции. Лемма 11 доказана.

2.2. Окончание доказательства существования равновесия в модели с ограниченным горизонтом. Оставшаяся часть доказательства носит вполне традиционный характер и опирается на известную теорему о неподвижной точке Какутани (см., например, [1, C.III.(14)]).

Теорема Какутани. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^m$ — непустое выпуклое компактное множество. Если соответствие $\varphi : S \to 2^S \setminus \{\varnothing\}$ выпуклозначно и замкнуто, то оно имеет неподвижную точку $x^* \in \varphi(x^*)$.*

Доказательство теоремы 2. Из сказанного выше следует, что для доказательства теоремы достаточно доказать существование $q^* \in \mathbb{R}^{TL}_{++}$ такого, что $0 \in Z(q^*)$. Рассмотрим единичный симплекс

$$\Delta = \left\{ q \in \mathbb{R}^{TL}_{+} \mid \sum_{k=1}^{l} \sum_{t=1}^{T} q_k^t = 1 \right\}$$

и его относительную внутренность $\Delta^0 = \{q \in \Delta \,|\, q \gg 0\}$. В силу свойства однородности степени нуль достаточно рассмотреть ограничение $Z(q)$ на множество Δ^0. Для каждого $n \geqslant 1$ определим множество

$$\Delta_n = \left\{ q \in \Delta \mid (\forall k)\, q_k^t \geqslant \frac{1}{n + Tl} \right\} \subset \Delta^0,$$

являющееся, очевидно, компактом. В силу леммы 10 образ $Z(\Delta_n)$ является ограниченным множеством, поэтому существует выпуклый компакт $B_n \supset Z(\Delta_n)$. Для произвольного элемента $z \in B_n$ определим множество

$$Q_n(z) = \{\overline{q} \in \Delta_n \mid (\forall q \in \Delta_n)\, q \cdot z \leqslant \overline{q} \cdot z\}.$$

Легко видеть, что Q_n является выпуклозначным замкнутым соответствием. Поэтому соответствие $\varphi_n : \Delta_n \times B_n \to \Delta_n \times B_n$, где $\varphi_n(q, z) = Q_n(z) \times Z(q)$, также будет выпуклозначным и замкнутым и, следовательно, будет иметь неподвижную точку (q_n, z_n). Согласно определению φ_n выполнено $z_n \in Z(q_n)$, и в силу тождества Вальраса $q \cdot z_n \leqslant q_n \cdot z_n = 0$ для всех $q \in \Delta_n$. В силу компактности множества Δ без потери общности можно считать, что $q_n \to q^* \in \Delta$.

Рассмотрим последовательность $z_n \in \mathbb{R}^{TL}$. Покажем прежде всего, что она ограничена. Предположим противное, тогда без ограничения общности можно считать, что $0 < \|z_n\| \to +\infty$. Рассмотрим ограниченную последовательность $v_n = z_n / \|z_n\|$. Тогда в силу леммы 11 все последовательности, образованные слагаемыми вида $x_n^{i,t} / \|z_n\|$, $(y_{t,j})_n^{\pm} / \|z_n\|$, ограничены, поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $x_n^{i,t} / \|z_n\| \to \overline{x}^{i,t} \geqslant 0$, $(y_{t,j}^{\pm})_n / \|z_n\| \to \overline{y}_{t,j}^{\pm}$. Заметим, что в силу неограниченного возрастания $\|z_n\|$ при любом $\lambda \geqslant 0$ для всех достаточно больших номеров

$$\lambda\big(- y_{t,j,n}^{-}, y_{t,j,n}^{+} \big) / \|z_n\| \in Y_t^j.$$

Следовательно, $\lambda\overline{y}_{t,j} \in Y_t^j$, что в силу условия Y4 означает, что $\overline{y}_{t,j}^+ = 0$ для всех t и $j \in M_t$. Поэтому

$$v_n^t = \Bigg(\sum_{i\in N_{t-1}\cup N_t} \frac{x_n^{i,t}}{\|z_n\|} - \Omega^t - \sum_{j\in M_{t-1}} \frac{y_{t-1,j,n}^+}{\|z_n\|} + \sum_{j\in M_t} \frac{y_{t,j,n}^-}{\|z_n\|} \Bigg) \to \overline{v}^t$$
$$= \Bigg(\sum_{i\in N_{t-1}\cup N_t} \overline{x}^{i,t} + \sum_{j\in M_t} \overline{y}_{t,j}^- \Bigg) \geqslant 0,$$

т. е. $\overline{v} \geqslant 0$. С другой стороны, $q \cdot v_n = q \cdot z_n/\|z_n\| \leqslant 0$ при любом n для всех $q \in \Delta_n$. Отсюда с помощью предельного перехода получаем, что $q \cdot \overline{v} \leqslant 0$ для всех $q \in \Delta$, что с учётом предыдущего возможно лишь при $\overline{v} = 0$. Однако это невозможно ввиду очевидного равенства $\|\overline{v}\| = 1$. Итак, предположив неограниченность последовательности z_n, мы пришли к противоречию, следовательно, z_n ограничена. Ещё раз применяя лемму 11, получим, что последовательности $x_n^{i,t}$ и $y_{t,j,n}^\pm$ ограничены, поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что для всех t имеет место сходимость

$$z_n^t \to \overline{z}^t = \sum_{i\in N_{t-1}\cup N_t} \overline{x}^{i,t} - \Omega^t - \sum_{j\in M_{t-1}} \overline{y}_{t-1,j}^+ + \sum_{j\in M_t} \overline{y}_{t,j}^-,$$

где $x_n^i \to \overline{x}^i$, $y_{t,j,n}^\pm \to \overline{y}_{t,j}^\pm$. Поскольку для всех n выполнено $q \cdot z_n \leqslant 0$ для любого $q \in \Delta_n$, то как и выше получаем $\overline{z} \leqslant 0$.

Покажем, что предельный вектор q^* строго положителен по всем компонентам. Поскольку $q^* \in \Delta$, то найдётся $\left(q_k^t\right)^* > 0$ для некоторых $t \in \{1,\ldots,T\}$ и $k \in L$, иными словами, цена на t-товар (k,t) строго положительна. Полагая в условии смежной ресурсной связности $t' = t$ и $k' \neq k$, получаем, что существует потребитель i, который желает t-товар (k',t) и обладает товаром (k,t). Покажем, что $q_{k'}^t > 0$. Для определённости будем считать, что $i \in N_{t-1}$, т. е. принадлежит к «старшему» поколению. В случае «молодого» потребителя доказательство аналогично. Вспомним, что потребительские планы $\left(x_n^{i,t-1}, x_n^{i,t}\right)$ агента i бюджетно-допустимы при ценах q_n, более того, удовлетворяют тождеству Вальраса:

$$\left(q_n^{t-1}, q_n^t\right) \cdot \left(x_n^{i,t-1}, x_n^{i,t}\right) \equiv \left(q_n^{t-1}, q_n^t\right) \cdot (\omega^{i,t-1}, \omega^{i,t}).$$

Предположим, что $q_{k'}^t = 0$. Тогда для потребительского плана $\widetilde{x}^i = (\overline{x}^{i,t-1}, \overline{x}^{i,t} + e^{k'})$ и любого числа $0 < \varepsilon < 1$ выполнено строгое неравенство

$$(q^{t-1}, q^t)^* \cdot \varepsilon(\overline{x}^{i,t-1}, \overline{x}^{i,t}) < (q^{t-1}, q^t)^* \cdot (\omega^{i,t-1}, \omega^{i,t}).$$

Поэтому для всех достаточно больших номеров n план $\varepsilon\widetilde{x}^i$ будет бюджетно-допустимым и при ценах q_n. В силу оптимальности планов $\bigl(x_n^{i,t-1}, x_n^{i,t}\bigr)$ при ценах q_n и полунепрерывности отношений предпочтения сверху и снизу после предельных переходов по $n \to +\infty$ и $\varepsilon \to 1$ получаем соотношение

$$(\overline{x}^{i,t}, \overline{x}^{i,t+1}) \succcurlyeq_i^t (\overline{x}^{i,t}, \overline{x}^{i,t+1} + e^{k'}),$$

противоречащее условию желательности товара (k', t) для потребителя i. Из полученного противоречия следует, что $(q^t)^* \gg 0$ ввиду произвольности k'. Теперь, применяя условие смежной ресурсной связности при $|t' - t| = 1$, аналогично получаем, что $(q^{t-1})^* \gg 0$ и $(q^{t+1})^* \gg 0$. Продолжая эти рассуждения по индукции, в конечном счёте имеем $q^* \gg 0$.

Таким образом, последовательность q_n целиком содержится в некотором компакте $K \subset \mathbb{R}^{TL}_{++}$. Отсюда в силу замкнутости графика точечно-множественного отображения $Z\bigl(q\bigr)$ получаем, что $\overline{z} \in Z\bigl(q^*\bigr)$; в частности, выполнено тождество Вальраса $q^* \cdot \overline{z} = 0$. При этом, как было доказано выше, $\overline{z} \leqslant 0$. Следовательно, $\overline{z} = \overline{x} - \Omega - \widetilde{y}(q^*) = 0 \in Z(q^*)$ для некоторого $\overline{x} \in \widetilde{D}(q^*)$. Теперь в силу тождеств $D(p) = \widetilde{D}(\mathrm{PV}_T(p))$ и $y(p) = \widetilde{y}(\mathrm{PV}_T(p))$ в качестве равновесных цен можно выбрать любой элемент $p^* \in \mathrm{PV}_T^{-1}(q^*)$. Теорема 2 доказана.

3. Равновесия в модели экономики с неограниченным горизонтом

Рассмотрим теперь общий случай модели экономики с перекрывающимися поколениями, т. е. экономику с бесконечным периодом функционирования. Напомним определение множества всех допустимых распределений в экономике с неограниченным горизонтом:

$$\mathcal{Z} = \Bigl\{ z = \bigl(z^1, z^2, \dots\bigr) \mid z^t = \bigl(x^{i,t} \geqslant 0, y_{j,t} \in Y_t^j\bigr),$$
$$\sum_{i \in N_{t-1} \cup N_t} x^{i,t} = \Omega^t + \sum_{j \in M_{t-1}} y^+_{t-1,j} - \sum_{j \in M_t} y^-_{t,j} \Bigr\}.$$

Отметим важное свойство этого множества.

Лемма 12. *Множество $\mathcal{Z}$ компактно в слабой топологии пространства $\mathbb{R}^\infty$.*

Доказательство. Покажем, что для любого $t \geqslant 1$ существует порядковый промежуток Q_t в пространстве $\mathbb{R}^{L(|N_{t-1}|+|N_t|)+2L\cdot|M_t|}$, содержащий все возможные векторы z^t, образующие элементы множества $\mathcal{Z}$.

Справедливость этого утверждения вытекает из леммы 11, применяемой в ходе *бесконечного* индукционного процесса по $t \geqslant 1$ при $v^t \equiv 0$. Таким образом, $\mathcal{Z} \subset \prod_{t=1}^{\infty} Q_t$ — замкнутое подмножество прямого произведения компактов, которое по теореме Тихонова будет компактным в слабой топологии. Тем самым лемма 12 доказана.

Определение 12. Пусть $T \geqslant 1$ — произвольный период времени. Допустимое распределение $\overline{z} \in \mathcal{Z}$ называется *T-равновесным*, если существует последовательность векторов цен $(p^1, p^2, \ldots)$ такая, что $(\forall i \in N_0)\ \overline{x}^{i,1} \in D_i^0(p^1)$, $(\forall T \geqslant t \geqslant 1)\ (\forall i \in N_t)\left(\overline{x}^{i,t}, \overline{x}^{i,t+1}\right) \in D_i^t(p^t, p^{t+1})$, $(\forall j \in M_t)\, \overline{y}_{j,t} = y_j(p^t, p^{t+1})$.

Заметим, что согласно определению всякое T-равновесное распределение является также t-равновесным для любого $t \leqslant T$.

Лемма 13. *Для любого периода $T \geqslant 1$ существует T-равновесное распределение.*

Доказательство. По теореме 2 существует равновесие с ограниченным горизонтом $T+1$. Сдвиг горизонта необходим для того, чтобы в периоде T выполнялось правильное условие баланса спроса и предложения. Теперь, взяв за основу равновесие с ограниченным горизонтом, можно построить T-равновесие, дополнив последовательность цен любыми положительными векторами, а оставшиеся компоненты распределения — произвольными сбалансированными сочетаниями спроса и производственного предложения. Например, можно взять $y_{t,j} = 0$, $x^{i,t} = \omega^{i,t}$ для $t \geqslant T+1$, $j \in M_t$, $i \in N_t$. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Пусть (p_n, z_n) — слабо сходящаяся последовательность T-равновесий, т. е. $p_n \to p$, $z_n \to z$ сходятся поточечно. Тогда (p, z) тоже является T-равновесием.*

Доказательство. Очевидно, что $z \in \mathcal{Z}$. Остаётся показать, что все z^t для $t \leqslant T$ порождены векторами спроса и предложения для последовательности строго положительных цен p^t при $t \leqslant T+1$. Рассмотрим конечномерную последовательность $\widetilde{p}_n = \left(p_n^1, p_n^2, \ldots, p_n^{T+1}\right)$, которая сходится к $\widetilde{p} = (p^1, \ldots, p^{T+1})$, и положим $q_n = \mathrm{PV}_{T+1}(\widetilde{p}_n)$. В силу непрерывности функции PV_{T+1} последовательность q_n сходится к $q = \mathrm{PV}_{T+1}(\widetilde{p})$. Теперь мы фактически находимся в ситуации экономики с ограниченным горизонтом, поэтому, повторяя в точности аргументацию из окончания доказательства теоремы 2, опиравшуюся на условие смежной ресурсной связности, приходим к выводу: $q \gg 0$, что эквивалентно $\widetilde{p} = (p^1, \ldots, p^{T+1}) \gg 0$ в силу определения вектор–функции PV_{T+1}.

Теперь, используя полунепрепрерывность сверху отображений $D_i^t(p)$ и непрерывность функций $y_{j,t}(p)$, заключаем, что все слагаемые вида $x^{i,t}$, $y_{j,t}$, входящие в z^t для $t \leqslant T$, образованы оптимальными решениями задач потребителей и производителей при строго положительных ценах p^t, что и требовалось доказать. Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *Существует допустимое распределение z^*, являющееся T-равновесным для любого $T \geqslant 1$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность периодов $\tau \to \infty$ и соответствующие последовательности τ-равновесных распределений z_τ и τ-равновесных цен p_τ. В силу слабой компактности множества $\mathcal{Z}$ существует подпоследовательность $\{z_{\tau_n}\} \subset \{z_\tau\}$, слабо сходящаяся к предельной точке $z^* \in \mathcal{Z}$. Пусть теперь $T \geqslant 1$ — произвольный временно́й промежуток. В силу свойства положительной однородности степени нуль для отображений спроса и предложения без ограничения общности можно считать, что τ_n-равновесные цены p_{τ_n} удовлетворяют следующему условию нормировки:

$$\|(p^1, p^2, \ldots, p^{T+1})\| = 1.$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности, без потери общности можем считать, что для всех $1 \leqslant t \leqslant T+1$ имеет место сходимость $p^t_{\tau_n} \to \overline{p}^t$. Доопределим положительные векторы $\overline{p}^t$ для $t \geqslant T+2$ произвольным образом и заметим, что допустимое распределение z^* является T-равновесным относительно последовательности цен $\overline{p}^t$. Мы попали в условия леммы 14 при $z_n \equiv z^*$, $p_n = p_{\tau_n}$. Лемма 15 доказана.

Следующее утверждение идентично лемме 2 [6], однако поскольку там исследуется несколько иная модель (без производства и межвременно́го процентного наращивания стоимостей), приведём её доказательство полностью.

Лемма 16. *Для всех $t \geqslant 1$ найдутся конечные числа K_t такие, что если допустимое распределение z^* является T-равновесным при ценах p, то $\|p^{t+1}\| \leqslant K_t \|p^1\|$ для любого $t \leqslant T$.*

Доказательство. Пусть $T \geqslant 1$ произвольно и $\big(z^*, \overline{p}\big)$ — некоторое T-равновесие. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. существует последовательность T-равновесий $\big(z^*, p_m\big)$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \big\|p_m^{\tau+1}\big\| / \big\|p_m^1\big\| = \infty$$

для некоторого $\tau \leqslant T$. Как и выше, можно нормализовать члены последовательности p_m так, что $\big\|\big(p_m^1, \ldots, p_m^{T+1}\big)\big\| = 1$, тогда без потери

общности будем считать, что $p_m^t \to \widetilde{p}^t$ при $m \to \infty$ для всех $t \leqslant T+1$, что, в частности, влечёт ограниченность последовательности $p_m^{\tau+1}$. Тогда из предположения $\lim\limits_{m\to\infty} \|p_m^{\tau+1}\|/\|p_m^1\| = \infty$ вытекает, что $\widetilde{p}^1 = 0$. С другой стороны, в силу леммы 14 приходим к выводу, что распределение z^* является T-равновесным и для последовательности цен $\widetilde{p}^1, \ldots, \widetilde{p}^{T+1}, \overline{p}^{T+2}, \ldots$, что исключает возможность $\widetilde{p}^1 = 0$; противоречие. Лемма 16 доказана.

3.1. Доказательство существования равновесия при неограниченном горизонте. Рассмотрим множество

$$\mathcal{P} = \big\{(p^1, p^2, \ldots) \mid p^t \geqslant 0,\ \|p^1\| = 1,\ (\forall t \geqslant 1)\|p^{t+1}\| \leqslant K_t\big\}.$$

В силу леммы 16 и теоремы Тихонова $\mathcal{P}$ является компактным множеством в топологии поточечной сходимости. Далее, в силу леммы 15 существует последовательность τ-равновесий вида $\big(z^*, p_\tau\big)$ для всех $\tau \geqslant 1$, причём благодаря лемме 16 можно считать выполненными включения $p_\tau \in \mathcal{P}$. Учитывая эти факты и переходя, если нужно к подпоследовательности, можно считать, что существует предел $p^* = \lim\limits_{\tau\to\infty} p_\tau \in \mathcal{P}$ в топологии слабой сходимости. Пусть теперь $T \geqslant 1$ произвольно. Тогда в силу выбора пара (z^*, p_τ) будет задавать T-равновесие для всех $\tau \geqslant T$. Снова воспользуемся леммой 14, из которой следует, что (z^*, p^*) является T-равновесием. В силу произвольности числа T теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гильденбрандт В.** Ядро и равновесие в большой экономике. — М.: Наука, 1986. — 200 с.
2. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. — М.: Мир, 1972. — 517 с.
3. **Сидоров А. В.** Существование равновесия в однопериодной модели экономики с инвестированием // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2 — 2005. — Т.12, № 1. — С. 74–96.
4. **Сидоров А. В.** Равновесия в многопериодной модели экономики с краткосрочным планированием // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2008. — Т.15, № 5. — С. 76–99.
5. **Четыркин Е. М.** Финансовая математика. — М.: Дело, 2003. — 400 с.
6. **Balasko Y.** Existence of competitive equilibrium in a general overlapping-generation model // J. Econ. Theory. — 1980. — Vol. 23, N 5. — P. 307–322.

7. **McKenzie L.** On the existence of general equilibrium for a competitive market // Econometrica. — 1959. — Vol. 27. — P. 54–71.

Сидоров Александр Васильевич,
e-mail: sidorov@math.nsc.ru

Статья поступила
29 октября 2009 г.

Переработанный вариант —
24 февраля 2010 г.