ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2010. Том 17, № 4. С. 3–17

УДК 519.854

ВПОЛНЕ ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАНДОМИЗИРОВАННАЯ АППРОКСИМАЦИОННАЯ СХЕМА НА ОСНОВЕ ЭВОЛЮЦИОННОГО АЛГОРИТМА *)

А. В. Еремеев

Аннотация. Для класса задач дискретной оптимизации, удовлетворяющих условиям существования вполне полиномиальной аппроксимационной схемы Войгенгера, предложена вполне полиномиальная рандомизированная аппроксимационная схема, основанная на эволюционном алгоритме.

Ключевые слова: эволюционный алгоритм, приближённое решение, аппроксимационная схема, динамическое программирование, рандомизация.

Введение

Эволюционные алгоритмы (ЭА), такие как генетические алгоритмы, эволюционные стратегии и алгоритмы генетического программирования получили широкое применение при решении практических задач оптимизации [5, 13, 14, 17, 18]. Характерной особенностью этих алгоритмов является имитация процесса эволюции биологической популяции, где особи соответствуют пробным точкам в пространстве решений задачи, а приспособленность особей к условиям окружающей среды — значениям целевой функции в этих точках. Процесс случайного поиска в ЭА эвристически направляется значениями целевой функции в просмотренных точках пространства решений. Новые решения-потомки строятся посредством случайных операторов, модифицирующих полученные ранее пробные точки.

Теоретически ЭА до сих пор изучены недостаточно, несмотря на активные исследования. Обзор литературы по теории ЭА можно найти в [6, 19, 21]. Особый интерес с точки зрения теоретического анализа представляет сравнение ЭА с классическими методами дискретной оптимизации. В последние годы новые результаты получены при анализе ЭА для

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–01–00410).

таких базовых задач дискретной оптимизации, как задача об остовном дереве минимального веса [16], о наибольшем паросочетании [10] и о минимальном разрезе в графе [15]. Известны полиномиальные в среднем ЭА для поиска приближённых решений NP-трудных задач, например, для задачи о покрытии множества [9]. В [20] предложена общая схема ЭА с полиномиальным в среднем временем поиска решения для задач оптимизации на матроидах.

Для ряда задач дискретной оптимизации известны эволюционные алгоритмы со средним временем получения оптимального решения, близким к трудоёмкости алгоритмов динамического программирования (ДП). В частности, такие алгоритмы предложены для задачи коммивояжёра [23], о кратчайшем пути в графе [22], об одномерном булевом рюкзаке [2] и для целого класса задач [8], включающего задачи многокритериальной оптимизации. Возможность построения приближённых решений с использованием ЭА, аналогичного предложенному в [8], рассматривается в настоящей статье.

Под *ρ-приближённым решением* понимается решение, значение целевой функции которого не более чем в ρ раз больше (меньше) оптимума, если рассматривается задача минимизации (максимизации). Алгоритм, находящий ρ-приближённое решение, когда задача разрешима, будем называть *ρ-приближённым алгоритмом*.

Семейство $(1+\varepsilon)$-приближённых алгоритмов с временно́й сложностью, полиномиально зависящей от длины входа задачи и от $1/\varepsilon$ при любом $0 < \varepsilon < 1$, называется *вполне полиномиальной аппроксимационной схемой*. В [24] Войгенгером предложены условия, при которых для достаточно широкого класса задач на основе уже известного алгоритма ДП может быть построена вполне полиномиальная аппроксимационная схема. В этот класс, например, входит задача о булевом одномерном рюкзаке и такие задачи теории расписаний, как задача минимизации средневзвешенного времени завершения работ на фиксированном числе параллельных машин разной производительности, задача минимизации средневзвешенного отклонения от заданного срока завершения работ на одной машине, задача минимизации взвешенного суммарного запаздывания деталей и др.

В настоящей статье для класса задач, удовлетворяющих условиям Войгенгера, на основе ЭА [8] построено семейство алгоритмов, являющееся *вполне полиномиальной рандомизированной аппроксимационной схемой*. Под вполне полиномиальной рандомизированной аппроксимационной схемой здесь и далее подразумевается семейство вероятностных

алгоритмов при всевозможных $0 < \varepsilon < 1$ с временно́й сложностью, полиномиально зависящей от длины входа задачи и от $1/\varepsilon$, дающих $(1+\varepsilon)$-приближённое решение с вероятностью не менее $3/4$. Заметим, что вероятность отсутствия $(1+\varepsilon)$-приближённого решения с ростом числа независимых испытаний вероятностного алгоритма убывает экспоненциально, поэтому вместо $3/4$ в данном случае может использоваться любая константа из интервала (0,1).

1. Постановка задачи и используемые подходы

Пусть Π — задача комбинаторной оптимизации (см., например, [1]), I — исходные данные её индивидуальной задачи, $\mathcal{D}_I$ — множество допустимых решений, $m_I : \mathcal{D}_I \to \mathbb{Z}_+$ — целевая функция (здесь и далее $\mathbb{Z}_+$ обозначает множество неотрицательных целых чисел). Оптимальное значение целевой функции для индивидуальной задачи I обозначим через

$$\mathrm{OPT}(I) = \max_{y \in \mathcal{D}_I} m_I(y),$$

если рассматривается задача максимизации, либо

$$\mathrm{OPT}(I) = \min_{y \in \mathcal{D}_I} m_I(y)$$

в случае задачи минимизации. Сделаем дополнительное предположение относительно структуры входных данных Π: вход I состоит из n векторов $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{Z}_+^\alpha$ и целочисленные компоненты $x_{1k}, \ldots, x_{\alpha k}$ каждого из векторов X_k представлены в двоичной кодировке. Размерность α может зависеть от конкретного входа задачи. Таким образом, длина входа $|I|$ составляет

$$\Theta\left(n + \alpha + \log\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\alpha} x_{ik}\right)\right).$$

Рассмотрим задачу Π с точки зрения возможности построения алгоритма динамического программирования для неё. При этом будем пользоваться подходом, предложенным Войгенгером [24].

Предположим, что для задачи Π существует точный алгоритм ДП, работа которого состоит из n стадий. На k-й стадии ДП, $k = 1, \ldots, n$, обрабатывается входной вектор X_k и строится множество состояний $\mathcal{S}_k$ (эти состояния в некотором смысле соответствуют частичным решениям задачи Π). Каждый элемент множества $\mathcal{S}_k$ — вектор вида $S = (s_1, \ldots, s_\beta) \in \mathbb{Z}_+^\beta$. Размерность β фиксирована для задачи Π и не зависит от индивидуальной задачи I.

Пусть $\mathcal{F}$ — конечное множество отображений перехода от состояний текущей стадии $k-1$ к состояниям следующей стадии k, имеющих вид $F : \mathbb{Z}_+^\alpha \times \mathbb{Z}_+^\beta \to \mathbb{Z}_+^\beta$, а конечное множество $\mathcal{H}$ состоит из вспомогательных функционалов вида $H : \mathbb{Z}_+^\alpha \times \mathbb{Z}_+^\beta \to \mathbb{Q}$. Здесь $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Первый аргумент указанных отображений далее будет представлять собой k-й вектор исходных данных X_k, а второй аргумент — вектор состояния из уже построенной стадии $\mathcal{S}_{k-1}$. Для каждого отображения $F \in \mathcal{F}$ имеется соответствующее ему отображение $H_F \in \mathcal{H}$.

На этапе инициализации ДП множество состояний $\mathcal{S}_0$ формируется как некоторое конечное подмножество пространства $\mathbb{Z}_+^\beta$. На стадии k, $k = 1, \dots, n$, пространство состояний $\mathcal{S}_k$ вычисляется на основе множества $\mathcal{S}_{k-1}$:

$$\mathcal{S}_k = \{F(X_k, S) \mid F \in \mathcal{F},\ S \in \mathcal{S}_{k-1},\ H_F(X_k, S) \leqslant 0\}. \tag{1}$$

Отображения из $\mathcal{H}$ служат для отбрасывания некоторых неперспективных состояний (как правило, они выражают некоторые ограничения задачи Π).

Назовём *допустимой траекторией* последовательность состояний $S_0, \dots, S_n$, для которой при каждом $k = 1, \dots, n$ выполняется $S_k \in \mathcal{S}_k$, $S_k = F_k(X_k, S_{k-1})$, $F_k \in \mathcal{F}$ и $H_{F_k}(X_k, S_{k-1}) \leqslant 0$. Далее будем предполагать, что всякая допустимая траектория $S_1, \dots, S_n$ представляет некоторое допустимое решение задачи Π, т. е. $(S_1, \dots, S_n) \in \mathcal{D}_I$, а значение целевой функции при этом может быть вычислено на элементах последнего множества состояний $\mathcal{S}_n$ посредством функции $G : \mathbb{Z}_+^\beta \to \mathbb{Z}_+$, т. е. $m_I(S_1, \dots, S_n) = G(S_n)$.

Сделанное ранее предположение о том, что ДП доставляет точное решение задачи Π, можно выразить формально:

$$\mathrm{OPT}(I) = \min\{G(S) \mid S \in \mathcal{S}_n\}, \tag{2}$$

если Π — задача минимизации, либо

$$\mathrm{OPT}(I) = \max\{G(S) \mid S \in \mathcal{S}_n\}, \tag{3}$$

если это задача максимизации.

1.1. Достаточные условия существования вполне полиномиальной аппроксимационной схемы. При построении вполне полиномиальных аппроксимационных схем для «прореживания» множества состояний на каждой стадии ДП могут исключаться некоторые состояния, близкие к уже построенным. Одной из первых работ, где использовался

данный подход, является [12]. Другие примеры его использования могут быть найдены в [3, 7, 24].

Для формализации понятия близости состояний, следуя [24], предположим что задан *вектор степеней* $D = (d_1, \ldots, d_\beta) \in \mathbb{Z}_+^\beta$, не зависящий от индивидуальной задачи I. При заданном вещественном масштабирующем множителе $\Delta > 1$ будем полагать, что состояние $S = (s_1, \ldots, s_\beta)$ (D, Δ)-*близко* к состоянию $S' = (s'_1, \ldots, s'_\beta)$, если

$$\Delta^{-d_\ell} s_\ell \leqslant s'_\ell \leqslant \Delta^{d_\ell} s_\ell, \quad \ell = 1, \ldots, \beta.$$

Введём обозначение $\mathcal{L}_0$ для множества индексов $1 \leqslant \ell \leqslant \beta$ таких, что $d_\ell = 0$, и пусть $\mathcal{L}_1 = \{1, \ldots, \beta\} \backslash \mathcal{L}_0$.

Вычислительная сложность ДП, как правило, сокращается за счёт исключения из рассмотрения «неперспективных» состояний, например, в точных алгоритмах ДП для этого чаще всего используется принцип Беллмана. Аналогичные принципы используются в алгоритме «киевский веник» (см., например, [4]). В настоящей работе, подобно [24], исключение «неперспективных» состояний осуществляется посредством отношения линейного предпорядка $\preceq_{\mathrm{qua}}$ на множестве состояний с учётом их близости. При таком «прореживании» на каждой стадии $k = 1, \ldots, n$ могут удаляться только состояния, уступающие какому-либо уже построенному на этой стадии состоянию в смысле отношения $\preceq_{\mathrm{qua}}$ и при этом (D, Δ)-близкие к нему.

Для большей общности результата [24] наряду с линейным предпорядком $\preceq_{\mathrm{qua}}$ на множестве состояний рассматривается частичный порядок $\preceq_{\mathrm{dom}}$ такой, что $\preceq_{\mathrm{qua}}$ является некоторым его продолжением, т. е. из $S \preceq_{\mathrm{dom}} S'$, где $S, S' \in \mathbb{Z}_+^\beta$, следует $S \preceq_{\mathrm{qua}} S'$. Будем говорить, что $S \in Z^\beta$ *доминируется* состоянием $S' \in Z^\beta$, если $S \preceq_{\mathrm{dom}} S'$. Если $S \in \mathcal{S} \subseteq Z^\beta$ такое, что ни для какого $S' \in \mathcal{S}$ не выполняется $S \preceq_{\mathrm{dom}} S'$, то S будем называть *недоминируемым* в $\mathcal{S}$.

Следующие четыре условия [24] обеспечивают существование вполне полиномиальной аппроксимационной схемы. Условия C1 и C2 связывают свойства функций из $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ с отношениями $\preceq_{\mathrm{dom}}$ и $\preceq_{\mathrm{qua}}$.

C1. Для любых $\Delta > 1$, $F \in \mathcal{F}$, $X \in \mathbb{Z}_+^\alpha$, $S, S' \in \mathbb{Z}_+^\beta$

(i) если S (D, Δ)-близко к S' и $S \preceq_{\mathrm{qua}} S'$, то либо $F(X, S) \preceq_{\mathrm{qua}} F(X, S')$ и $F(X, S)$ (D, Δ)-близко к $F(X, S')$, либо $F(X, S) \preceq_{\mathrm{dom}} F(X, S')$;

(ii) если $S \preceq_{\mathrm{dom}} S'$, то $F(X, S) \preceq_{\mathrm{dom}} F(X, S')$.

C2. Для любых $\Delta > 1$, $H \in \mathcal{H}$, $X \in \mathbb{Z}_+^\alpha$, $S, S' \in \mathbb{Z}_+^\beta$

(i) если S (D, Δ)-близко к S' и $S \preceq_{\mathrm{qua}} S'$, то $H(X, S') \leqslant H(X, S)$;

(ii) если $S \preceq_{\text{dom}} S'$, то $H(X, S') \leqslant H(X, S)$.

Заметим, что ввиду произвольности $\Delta > 1$ пункт (i) условия C2 сводится к требованию выполнения неравенства $H(X, S') \leqslant H(X, S)$ для всех $H \in \mathcal{H}$, $X \in \mathbb{Z}_+^\alpha$, $S, S' \in \mathbb{Z}_+^\beta$, $S \preceq_{\text{qua}} S'$, таких, что $s_\ell = s'_\ell$ для всех $\ell \in \mathcal{L}_0$.

Условие C3 связывает свойства функции G с отношениями доминирования и близости состояний на последнем множестве состояний $\mathcal{S}_n$.

C3. (i) Существует $g \in \mathbb{Z}_+$, зависящее только от функции G и вектора D, такое, что для любых $\Delta > 1$ и $S, S' \in \mathbb{Z}_+^\beta$, если S (D, Δ)-близко к S' и $S \preceq_{\text{qua}} S'$, то $G(S') \leqslant \Delta^g G(S)$ в случае минимизационной задачи и $\Delta^{-g} G(S) \leqslant G(S')$ в случае задачи максимизации;

(ii) для любых $S, S' \in \mathbb{Z}_+^\beta$, если $S \preceq_{\text{dom}} S'$, то $G(S') \leqslant G(S)$ в случае минимизационной задачи и $G(S') \geqslant G(S)$ в случае задачи максимизации.

Наконец, условие C4 обеспечивает полиномиальную вычислимость функций и полиномиальную ограниченность некоторых множеств.

C4. (i) Функции $F \in \mathcal{F}$, $H \in \mathcal{H}$ и G, а также отношение $\preceq_{\text{qua}}$ вычислимы за полиномиальное относительно длины входных данных задачи время;

(ii) мощность $|\mathcal{F}|$ ограничена полиномом от длины входных данных;

(iii) $\mathcal{S}_0$ вычислимо за полиномиальное время относительно длины входных данных;

(iv) существует полином $\pi_1(n, \log_2 |I|)$ такой, что компоненты состояний множеств $\mathcal{S}_k$, $k = 1, \ldots, n$, суть целые числа, не превышающие $e^{\pi_1(n, \log_2 |I|)}$, кроме того, для всех $\ell \in \mathcal{L}_0$ мощность множества значений, которые может принимать такая координата,

$$|\{s_\ell \mid (s_1, \ldots, s_\ell, \ldots, s_\beta) \in \mathcal{S}_k\}|,$$

ограничена полиномом $\pi_2(n, \log_2 |I|)$.

Пусть задача Π разрешима алгоритмом ДП по рекуррентной формуле (1), выполнено условие (2) или (3) и существуют частичный порядок $\preceq_{\text{dom}}$, линейный предпорядок $\preceq_{\text{qua}}$ и вектор степеней D, удовлетворяющие условиям C1–C4. Тогда будем говорить, что Π — DPB-*задача* (от английского термина *DP-benevolent problem* [24]).

1.2. Вполне полиномиальная аппроксимационная схема. Пусть L — достаточно большая величина, выбранная для данной индивидуальной задачи I и погрешности ε (выбор величины L будет обсуждаться далее). Рассмотрим алгоритм ДП$_\Delta$, представляющий собой

модификацию ДП с «прореживанием» множества состояний на каждой стадии. При описании алгоритма будем пользоваться разбиением множества $B(L,\Delta) = \mathbb{Z}_+^\beta \cap [0,\Delta^L]^\beta$ на параллелепипеды $\mathcal{B}_{(i_1,\ldots,i_\beta)}$ с индексом $(i_1,\ldots,i_\beta) \in \mathbb{Z}_+^\beta$, которые содержат все целочисленные точки $S = (s_1,\ldots,s_\beta)$ такие, что

$$s_\ell \in \begin{cases} \{0\} & \text{при } i_\ell = 0, \\ [\Delta^{i_\ell - 1}, \Delta^{i_\ell} - 1] & \text{при } 0 < i_\ell < L, \\ [\Delta^{i_\ell - 1}, \Delta^{i_\ell}] & \text{при } i_\ell = L \end{cases} \tag{4}$$

для ℓ таких, что $\ell \in \mathcal{L}_1$, и

$$s_\ell = i_\ell \tag{5}$$

при $\ell \in \mathcal{L}_0$.

Алгоритм ДП$_\Delta$

1. Инициализировать $\mathcal{T}_0 := \mathcal{S}_0$.
2. Для k от 1 до n выполнять:
3. Положить $\mathcal{T}_k := \varnothing$.
4. Для каждого $S \in \mathcal{T}_{k-1}$ и каждого $F \in \mathcal{F}$ выполнять:
5. Если $H_F(X_k,S) \leqslant 0$ и в параллелепипеде $\mathcal{B}_{(i_1,\ldots,i_\beta)}$, содержащем $F(X_k,S)$, не существует $S' \in \mathcal{T}_k$ такого, что $F(X_k,S) \preceq_{\mathrm{qua}} S'$, то добавить $F(X_k,S)$ в $\mathcal{T}_k$ и удалить из $\mathcal{T}_k$ все состояния $S'' \in \mathcal{B}_{(i_1,\ldots,i_\beta)} \cap \mathcal{T}_k$ такие, что $S'' \preceq_{\mathrm{qua}} F(X_k,S)$.
6. Конец цикла по S и F.
7. Конец цикла по k.
8. Выбрать $\min\{G(S) \mid S \in \mathcal{T}_n\}$ в случае задачи минимизации либо $\max\{G(S) \mid S \in \mathcal{T}_n\}$ в случае задачи максимизации.

Для простоты изложения в приведённом алгоритме не описывается процедура обратного хода для восстановления допустимой траектории по выбранному на шаге 8 элементу $S \in \mathcal{T}_n$. Отсутствует и дополнительная информация, сохраняемая при каждом переходе для этой процедуры. При необходимости алгоритм может быть дополнен этими элементами стандартным образом.

Как показано в [24], для получения вполне полиномиальной аппроксимационной схемы в ДП$_\Delta$ достаточно положить

$$\Delta = 1 + \frac{\varepsilon}{2gn}, \tag{6}$$

$$L = \left\lceil \frac{\pi_1(n, \log_2 |I|)}{\ln \Delta} \right\rceil. \tag{7}$$

При этом L полиномиально ограничена от длины входа и от $1/\varepsilon$ (см. лемму 3 в приложении). Основной результат [24] формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* Π — DPB-*задача. Тогда семейство алгоритмов* ДП$_\Delta$ *с выбором параметров* Δ *и* L *согласно* (6) *и* (7) *представляет собой вполне полиномиальную аппроксимационную схему.*

2. Эволюционный алгоритм

Предлагаемый здесь эволюционный алгоритм EA$_\Delta$ аналогичен алгоритму [8] с основным отличием в правиле добавления особей в популяцию. В качестве особей рассматриваются пары вида $a = (k, S)$, где k — номер стадии, $S \in B(L, \Delta)$ — элемент пространства состояний. Обозначим множество всевозможных особей популяции через A, при этом $A \subseteq \{0, \dots, n\} \times B(L, \Delta)$. Потребуем, чтобы все особи популяции были различны. Множество всевозможных популяций тогда равно 2^A.

Опишем EA$_\Delta$ в предположении, что Π является DPB-задачей. Алгоритм начинает работу с исходной популяции $\mathcal{P}_0 = \{0\} \times \mathcal{S}_0$, для построения которой используется полиномиальная процедура, существующая согласно условию C4(iii). В ходе работы EA$_\Delta$ порождается последовательность популяций $\mathcal{P}_t \subseteq \{t\} \times B(L, \Delta),\ t = 1, 2, \dots, \tau$. Значение τ для критерия остановки будет выбрано позднее.

Для создания новых особей используются вероятностные операторы селекции $\mathrm{sel} : 2^A \to A$ и мутации $\mathrm{mut} : A \to A$. Из заданной популяции $\mathcal{P}$ оператор селекции $\mathrm{sel}(\mathcal{P})$ выбирает одну особь случайным образом с равномерным распределением вероятностей. При действии оператора мутации $\mathrm{mut}(a)$ к особи $a = (k, S)$ применяется функция перехода F, случайно выбранная из $\mathcal{F}$ с равномерным распределением вероятностей, и полагается $\mathrm{mut}((k, S)) = (k + 1, F(X_{k+1}, S))$. Новая особь $(k + 1, F(X_{k+1}, S))$ добавляется в популяцию, если $H_F(X_{k+1},\ S) \leqslant 0$ и эта особь не уступает уже имеющимся в популяции $\mathcal{P}_t$ в смысле следующего отношения $\succeq_{\mathrm{EA}}$. Предпорядок $\succeq_{\mathrm{EA}}$ определен на основе линейного предпорядка $\succeq_{\mathrm{qua}}$ таким образом: $(k', S') \succeq_{\mathrm{EA}} (k, S)$ тогда и только тогда, когда $k' = k$, $S' \succeq_{\mathrm{qua}} S$ и существует параллелепипед $\mathcal{B}_{(i_1,\dots,i_\beta)}$ такой, что $S, S' \in \mathcal{B}_{(i_1,\dots,i_\beta)}$. Схема алгоритма имеет следующий вид.

Алгоритм EA$_\Delta$

1. Инициализировать $\mathcal{P}_0$.
2. Для t от 1 до τ выполнять:
3. Положить $\mathcal{P}_t := \mathcal{P}_{t-1}$.
4. Построить $a := \mathrm{mut}(\mathrm{sel}(\mathcal{P}_t))$. Пусть $a = (k, S)$.

5. Если $H_F(S) \leqslant 0$ и не существует $a' \in \mathcal{P}_t$ такого, что $a \preceq^{\mathrm{EA}} a'$, то положить $\mathcal{P}_t := (\mathcal{P}_t \setminus \{a' \in \mathcal{P}_t \mid a' \preceq^{\mathrm{EA}} a\}) \cup \{a\}$.

6. Конец цикла по t.

7. Выбрать $\min\{G(S) \mid (n, S) \in \mathcal{P}_\tau\}$ в случае задачи минимизации либо $\max\{G(S) \mid (n, S) \in \mathcal{P}_\tau\}$ в случае задачи максимизации.

Из схемы алгоритма вытекает, что для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ особи вида (k, S) в любой популяции $\mathcal{P}_t$, $t = 0, \ldots, \tau$, представляют только состояния $S \in \mathcal{S}_k$, так как состояния из $Z^\beta \backslash \mathcal{S}_k$ не могут быть построены с помощью операторов sel и mut за k итераций.

Восстановление допустимой траектории по выбранному S на шаге 7 EA_Δ не описывается, но при необходимости это может быть выполнено стандартным способом так же, как и в алгоритме ДП_Δ.

3. Вполне полиномиальная рандомизированная аппроксимационная схема

Без потери общности в настоящем разделе будем полагать, что Π — задача минимизации. Для произвольного $S \in \mathcal{S}_k$ обозначим через $\theta(k, S)$ случайную величину, равную номеру итерации EA_Δ, на которой впервые получена особь (k, T) такая, что T (D, Δ^k)-близко к S и $S \preceq_{\mathrm{qua}} T$. Заметим, что по схеме EA_Δ, начиная с итерации $\theta(k, S)$, в популяции всегда можно найти некоторую особь T, удовлетворяющую данному условию.

Следующая лемма показывает, что для любого недоминируемого состояния $S \in \mathcal{S}_k$ в среднем за полиномиально ограниченное от длины входа и от $1/\varepsilon$ число итераций будет получена особь (k, T) такая, что T (D, Δ^k)-близко к S и $S \preceq_{\mathrm{qua}} T$. Здесь и далее математическое ожидание обозначается символом $E[\cdot]$.

Лемма 1. *Пусть* Π — DPB-*задача. Тогда*

$$E[\theta(k, S)] \leqslant nk(L\pi_2(n, \log_2 |I|))^\beta |\mathcal{F}|$$

для любого $k = 0, \ldots, n$ *и всякого недоминируемого в* $\mathcal{S}_k$ *состояния* S.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по k. При $k = 0$ утверждение леммы выполняется тривиально. Рассмотрим произвольное недоминируемое состояние S в $\mathcal{S}_k$. Пусть $k > 0$ и утверждение леммы верно для $\mathcal{P}_{k-1}$.

Относительно алгоритма ДП в [24] доказано (см. лемму 2 в приложении), что для S найдутся недоминируемое в $\mathcal{S}_{k-1}$ состояние $S^\#$ и отображение $F^\# \in \mathcal{F}$ такие, что $F^\#(X_k, S^\#) = S$ и $H_{F^\#}(X_k, S^\#) \leqslant 0$. Отметим, что предположение индукции даёт оценку сверху для математического

ожидания числа итераций $\theta(k-1, S^{\#})$ до получения особи $(k-1, T^{\#})$ такой, что $T^{\#}$ (D, Δ^{k-1})-близко к $S^{\#}$ и $S^{\#} \preceq_{\rm qua} T^{\#}$. Назовём мутацию с применением $F^{\#}$ к особи $(k-1, T^{\#})$ *успешной.*

Согласно условию C2(i) имеем

$$H_{F^{\#}}(X_k, T^{\#}) \leqslant H_{F^{\#}}(X_k, S^{\#}) \leqslant 0,$$

а по предположению C1(i) либо (а) $F^{\#}(X_k, T^{\#})$ будет (D, Δ^{k-1})-близко к S и $S \preceq_{\rm qua} F^{\#}(X_k, T^{\#})$, либо (б) $S \preceq_{\rm dom} F^{\#}(X_k, T^{\#})$.

В случае (а) после успешной мутации популяция будет содержать элемент $(k, F^{\#}(X_k, T^{\#}))$, либо некоторый другой элемент (k, T') такой, что T' попадает в тот же параллелепипед $\mathcal{B}_{(i_1,\ldots,i_\beta)}$, что и $F^{\#}(X_k, T^{\#})$, кроме того, $T' \succeq_{\rm qua} F^{\#}(X_k, T^{\#})$, т.е. после указанной мутации популяция будет содержать особь (k, T) такую, что T (D, Δ)-близко к $F^{\#}(X_k, T^{\#})$ и $F^{\#}(X_k, T^{\#}) \preceq_{\rm qua} T$. Далее, так как $F^{\#}(X_k, T^{\#})$ (D, Δ^{k-1})-близко к S, из определения близости состояний вытекает, что T (D, Δ^k)-близко к S. Кроме того, $S \preceq_{\rm qua} F^{\#}(X_k, T^{\#}) \preceq_{\rm qua} T$, следовательно, $S \preceq_{\rm qua} T$. Тем самым в случае (а) успешная мутация обеспечивает присутствие искомого представителя для S в популяции на стадии k.

В случае (б) после успешной мутации будет получен элемент (k, S), так как S — недоминируемое состояние, а $F^{\#}(X_k, T^{\#})) \succeq_{\rm dom} S$. В результате популяция будет содержать элемент (k, S) либо некоторый другой элемент (k, T') такой, что T' попадает в тот же параллелепипед $\mathcal{B}_r$, что и S, кроме того, $T' \succeq_{\rm qua} S$. Таким образом, после указанной мутации популяция будет содержать особь (k, T) такую, что T (D, Δ)-близко к S и $S \preceq_{\rm qua} T$. Очевидно, при этом T также (D, Δ^k)-близко к S. Таким образом, успешная мутация обеспечивает присутствие искомого представителя для S в популяции на стадии k.

Для завершения доказательства остаётся оценить математическое ожидание числа испытаний θ^* до осуществления успешной мутации при условии наличия особи $a^{\#} = (k-1, T^{\#})$ в текущей популяции $\mathcal{P}_t$. Заметим, что по схеме алгоритма вероятность успешной мутации равна

$$p^* = \big(n \cdot |\{(k-1, S') \in \mathcal{P}_t\}| \cdot |\mathcal{F}|\big)^{-1},$$

причём

$$|\mathcal{P}_t| = \sum_{k'=1}^{n} |\{(k', S') \in \mathcal{P}_t\}| \leqslant \sum_{k'=1}^{n} |\{(i_1, \ldots, i_\beta) \mid \mathcal{B}_{(i_1,\ldots,i_\beta)} \cap \mathcal{S}_{k'} \neq \varnothing\}|. \quad (8)$$

Рассмотрим слагаемое в правой части (8) при любом фиксированном k'. Для каждого $\ell \in \mathcal{L}_1$ индекс параллелепипеда i_ℓ может принимать не более L значений. Кроме того, ввиду условия C4(iv) для каждого

$\ell' \in \mathcal{L}_0$ координата $s_{\ell'}$ в состояниях из множества $\mathcal{S}_{k'}$ может принимать не более $\pi_2(n, \log_2|I|)$ значений.

Таким образом, правая часть неравенства (8) не превышает

$$nL^{|\mathcal{L}_1|}\pi_2(n, \log_2|I|)^{|\mathcal{L}_0|} \leqslant n(L\pi_2(n, \log_2|I|))^{\beta},$$

а значит, $E[\theta^*] = 1/p^* \leqslant n(L\pi_2(n, \log_2|I|))^{\beta}|\mathcal{F}|$. Утверждение леммы для стадии k вытекает из того, что $E[\theta(k,S)] = E[\theta(k-1, T^{\#})] + E[\theta^*]$. Лемма 1 доказана.

Полученная в лемме 1 оценка $E[\theta(k,S)]$ служит основой для выбора критерия остановки алгоритма EA_Δ. Положим

$$\tau = 4n^2(L\pi_2(n, \log_2|I|))^{\beta}|\mathcal{F}|. \tag{9}$$

Теорема 2. *Если задача* Π *является* DPB-*задачей, то семейство алгоритмов* EA_Δ *с выбором параметров* Δ *и* L *согласно* (6) *и* (7) *и критерием остановки* (9) *образует вполне полиномиальную рандомизированную апроксимационную схему.*

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству основного результата в [24].

Согласно сделанным предположениям $\mathrm{OPT}(I) = \min\limits_{S\in\mathcal{S}_n} G(S)$. Поэтому ввиду условия C3(ii) существует недоминируемое состояние $S^* \in \mathcal{S}_n$ такое, что

$$\mathrm{OPT}(I) = G(S^*).$$

По лемме 1 в среднем не более чем за $n^2(L\pi_2(n, \log_2|I|))^{\beta}|\mathcal{F}|$ итераций в EA_Δ вычисляется популяция, в которой найдётся особь (n, T^*) такая, что T^* (D, Δ^n)-близко к S^* и $S^* \preceq_{\mathrm{qua}} T^*$. Тогда по условию C3(i)

$$G(T^*) \leqslant \Delta^{gn} G(S^*) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2gn}\right)^{gn} \mathrm{OPT}(I) \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{OPT}(I).$$

(Последнее неравенство вытекает из того, что $gn \geqslant 1$, поэтому $(1+\varepsilon/(2gn))^{gn}$ как функция от ε на отрезке $\varepsilon \in [0,2]$ выпукла, и требуемое неравенство выполнено на концах отрезка.) Тем самым алгоритм обеспечивает искомую точность аппроксимации по целевой функции, и с помощью процедуры обратного хода по T^* может быть эффективно получено $(1+\varepsilon)$-приближённое решение.

При выполнении EA_Δ с критерием остановки (9) согласно неравенству Маркова вероятность не найти $(1+\varepsilon)$-приближённое решение составляет не более $1/4$, как и требуется в определении вполне полиномиальной рандомизированной аппроксимационной схемы.

Наконец, по условию C4 трудоёмкость каждой итерации EA_Δ полиномиально ограничена от длины входа и $1/\varepsilon$, поэтому данное семейство алгоритмов является вполне полиномиальной рандомизированной аппроксимационной схемой. Теорема 2 доказана.

Для задач максимизации схема алгоритма EA_Δ и доказательство того, что он даёт вполне полиномиальную рандомизированную аппроксимационную схему, аналогичны.

4. Заключение

В статье представлен новый подход к использованию специфики задачи в эволюционных алгоритмах. Основной результат показывает, что к эволюционным алгоритмам для DPB-задач, наряду со сходимостью к оптимуму почти наверное (см., например, [21]), естественно предъявить новые требования в терминах вероятности эффективного получения приближённого решения.

Предложенный эволюционный алгоритм не обладает более низкими оценками трудоёмкости в среднем по сравнению с оценками трудоёмкости для известных детерминированных алгоритмов. Тем не менее на практике в операторах селекции и мутации может быть эвристически учтена специфика задачи, позволяющая ускорить получение решений требуемого качества. Для оценки перспективности данного подхода необходимы дальнейшие экспериментальные исследования.

Приложение

Для замкнутости изложения прилагаются доказательства вспомогательных результатов из [24], используемых в работе.

Лемма 2 [24]. *Пусть* $\Delta = 1+\varepsilon/(2gn)$. *Тогда величина* $L = \left\lceil \frac{\pi_1(n,\log_2|I|)}{\ln\Delta} \right\rceil$ *полиномиально ограничена сверху относительно длины входа и от* $1/\varepsilon$, *и всякое состояние из множества* $\mathcal{S}_k$, $k = 1,\dots,n$, *принадлежит одному из параллелепипедов* $\mathcal{B}_{(i_1,\dots,i_\beta)}$, *заданных условиями* (4) *и* (5).

Доказательство. Согласно условию C4(iv) существует полином $\pi_1(n,\log_2|I|)$ такой, что компоненты состояний множеств $\mathcal{S}_k$, $k = 1,\dots,n$, суть целые числа, не превышающие $e^{\pi_1(n,\log_2|I|)} \leqslant \Delta^L$. Таким образом, любое состояние $S \in \mathcal{S}_k$ принадлежит одному из параллелепипедов $\mathcal{B}_{(i_1,\dots,i_\beta)}$. Заметим, что $\ln\Delta \geqslant (\Delta-1)/\Delta$ (для этого достаточно сравнить производные функций $\ln\Delta$ и $(\Delta-1)/\Delta$). Следовательно,

$$1/\ln\Delta \leqslant 1 + 1/(\Delta-1) = 1 + 2gn/\varepsilon,$$

т. е. $L = \left\lceil \frac{\pi_1(n, \log_2 |I|)}{\ln \Delta} \right\rceil$ полиномиально ограничено от длины входа и от $1/\varepsilon$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3 [24]. *Пусть S — недоминируемое состояние в $\mathcal{S}_k$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда найдутся недоминируемое в $\mathcal{S}_{k-1}$ состояние $S^{\#}$ и отображение $F^{\#} \in \mathcal{F}$ такие, что $F^{\#}(X_k, S^{\#}) = S$ и $H_{F^{\#}}(X_k, S^{\#}) \leqslant 0$.*

Доказательство. Предположим, состояние S попадает в множество $\mathcal{S}_k$, когда $F^{\#} \in \mathcal{F}$ применяется к X_k и некоторому состоянию из $\mathcal{S}_{k-1}$. Пусть $H^{\#} \in \mathcal{H}$ — отображение, соответствующее $F^{\#}$. Рассмотрим непустое подмножество $\mathcal{S}^{\diamond} \subseteq \mathcal{S}_{k-1}$:

$$\mathcal{S}^{\diamond} = \{S^{\diamond} \mid S^{\diamond} \in \mathcal{S}_{k-1},\ H^{\#}(X_k, S^{\diamond}) \leqslant 0,\ F^{\#}(X_k, S^{\diamond}) = S\}. \qquad (10)$$

Пусть $S^{\#}$ — недоминируемое состояние в $\mathcal{S}^{\diamond}$ (такое состояние всегда существует, так как $\preceq_{\mathrm{dom}}$ — частичный порядок и $\mathcal{S}^{\diamond}$ конечно). Допустим, $S^{\#}$ доминируется в $\mathcal{S}_{k-1}$ некоторым состоянием $S' \in \mathcal{S}_{k-1} \backslash \mathcal{S}^{\diamond}$. Тогда в силу условия C2(ii) и (10)

$$H^{\#}(X_k, S') \leqslant H^{\#}(X_k, S^{\#}) \leqslant 0.$$

Следовательно, $F^{\#}(X_k, S')$ принадлежит $\mathcal{S}_k$ и доминирует S согласно условию C1(ii). Кроме того, $F^{\#}(X_k, S') \neq S$, так как $S' \notin \mathcal{S}^{\diamond}$. Но это противоречит предположению о том, что S — недоминируемое состояние в $\mathcal{S}_k$. Следовательно, такого S' не существует, и $S^{\#}$ — недоминируемое состояние в $\mathcal{S}_{k-1}$. Лемма 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. —416 с.
2. **Еремеев А. В.** О связи динамического программирования и многокритериальных эволюционных алгоритмов. Препринт. — Омск: Изд-во Омского гос. ун-та, 2008. —20 с.
3. **Ковалев М. Я., Шафранский Я. М.** Построение ε-приближенных алгоритмов оптимизации функции на последовательно конструируемых множествах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1986. — Т. 26, № 7. — С. 1006–1018.
4. **Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.** Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
5. **Норенков И. П.** Эвристики и их комбинации в генетических методах дискретной оптимизации // Информационные технологии. — 1999. — № 1. — С. 2–7.
6. **Beyer H.-G., Schwefel H.-P., Wegener I.** How to analyse evolutionary algorithms // Theor. Comp. Sci. — 2002. Vol. 287, N 1. — P. 101–130.

7. **Chauhan S. S., Eremeev A. V., Romanova A. A., Servakh V. V., Woeginger G. J.** Approximation of the supply scheduling problem // Oper. Res. Lett. — 2005. — Vol. 33, N 3. — P. 249–254.
8. **Doerr B., Eremeev A., Horoba C., Neumann F., Theile M.** Evolutionary algorithms and dynamic programming // Proc. Genetic Evolutionary Computation Conf. (GECCO). — New York: ACM Press, 2009. — P. 771–777.
9. **Friedrich T., Hebbinghaus N., Neumann F., He J., Witt C.** Approximating covering problems by randomized search heuristics using multi-objective models // Proc. Genetic Evolutionary Computation Conf. (GECCO). — New York: ACM Press, 2007. — P. 797–804.
10. **Giel O., Wegener I.** Evolutionary algorithms and the maximum matching problem // Proc. Symp. Theor. Aspects Comput. Sci. (STACS). — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2003. — P. 415–426.
11. **Held M., Karp R. M.** A dynamic programming approach to sequencing problems // J. SIAM. — 1962. — Vol. 10. — P. 196–210.
12. **Ibarra O. H., Kim C. E.** Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subset problems // J. ACM. — 1975. — Vol. 22, N 4. — P. 463–468.
13. **Koza J. R.** Genetic programming II: automatic discovery of reusable programs (complex adaptive systems). — Cambridge, MA: MIT Press, 1994. — 746 p.
14. **Michalewicz Z.** Genetic algorithms + data structures = evolution programs. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1996. — 387 p.
15. **Neumann F., Reichel J., Skutella M.** Computing minimum cuts by randomized search heuristics // Proc. Genetic Evolutionary Computation Conf. (GECCO). — New York: ACM Press, 2008. — P. 779–786.
16. **Neumann F., Wegener I.** Randomized local search, evolutionary algorithms, and the minimum spanning tree problem // Theor. Comput. Sci. — 2007. — Vol. 378, N 1. — P. 32–40.
17. **Rechenberg I.** Evolutionsstrategie: optimerung technischer Systeme nach prinzipen der biologischen Evolution. — Schtuttgart: Formann–Holzboog Verl., 1973. — 170 c.
18. **Reeves C. R.** Genetic algorithms for the operations researcher // INFORMS J. Computing. — 1997. — Vol. 9, N 3. — P. 231–250.
19. **Reeves C. R., Rowe J. E.** Genetic algorithms: principles and perspectives. — Norwell, MA: Kluwer, 2002. — 332 p.
20. **Reichel J., Skutella M.** Evolutionary algorithms and matroid optimization problems // Proc. Genetic Evolutionary Computation Conf. (GECCO). — New York: ACM Press, 2007. — P. 947–954.
21. **Rudolph G.** Finite Markov chain results in evolutionary computation: a tour d'horizon // Fundam. Inform. — 1998. — Vol. 35, N 1–4. — P. 67–89.
22. **Scharnow J., Tinnefeld K., Wegener I.** The analysis of evolutionary algorithms on sorting and shortest paths problems // J. Math. Model. Algorithms. — 2004. — Vol. 3. — P. 349–366.

23. **Theile M.** Exact solutions to the travelling salesperson problem by a population-based evolutionary algorithm // Proc. European Conf. Evolutionary Computation Combinatorial Optimisation (EvoCOP). — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verl., 2009. — P. 145–155. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5482.)
24. **Woeginger G. J.** When does a dynamic programming formulation guarantee the existence of a fully polynomial time approximation scheme (FPTAS)? // INFORMS J. Computing. — 2000. — Vol. 12, N 1. — P. 57–74.

Еремеев Антон Валентинович,
e-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

Статья поступила
5 ноября 2009 г.

Переработанный вариант —
11 февраля 2010 г.