ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2010. Том 17, № 4. С. 18–31

УДК 519.716

ОПЕРАТОР ЗАМЫКАНИЯ В МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ, БАЗИРУЮЩИЙСЯ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ *)

С. С. Марченков

Аннотация. На множестве функций многозначной логики на основе систем функциональных уравнений вводится оператор FE-замыкания. Доказывается, что при любом $k \geqslant 2$ оператор FE-замыкания порождает на множестве P_k функций k-значной логики конечную классификацию. Устанавливается, что наименьшим классом этой классификации является класс H_k всех однородных функций. Выводится ряд следствий о конечных FE-порождающих множествах в FE-замкнутых классах.

Ключевые слова: функция многозначной логики, функциональное уравнение, оператор FE-замыкания.

В теории функций многозначной логики существует несколько «сильных» операторов замыкания — операторов, порождающих конечные классификации на множестве P_k функций k-значной логики [1, 3, 8, 9, 11–13, 18–21]. При построении данных операторов замыкания используются идеи различного характера: программистские, логико-функциональные, алгебраические, логико-дедуктивные. В [15–17] в качестве средства выразимости в многозначной логике была предложена выразимость на основе систем функциональных уравнений (уравнений с функциональными переменными). Основное внимание в [15–17] уделено исследованию возможности выражения тех или иных множеств функций многозначной логики при заданных множествах функциональных констант. Используя выразимость индивидуальных функций, нетрудно определить оператор замыкания — замыкание на основе систем функциональных уравнений (FE-замыкание).

Оператор FE-замыкания существенно отличается от известных сильных операторов замыкания как по способу задания, так и по порождаемым классификациям множеств P_k. По-видимому, из всех сильных

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00701.)

© **2010 Марченков С. С.**

операторов замыкания оператор FE-замыкания является наиболее сильным. В частности, в классе P_2 булевых функций образуется всего лишь два FE-замкнутых класса: P_2 и класс S самодвойственных функций. В данной статье устанавливаются другие важные свойства оператора FE-замыкания: возможность FE-порождения классов P_k некоторыми множествами констант, конечность числа FE-замкнутых классов в любом классе P_k, принадлежность любому FE-замкнутому классу из P_k множества H_k всех однородных функций. Из этих свойств выводится ряд следствий о FE-порождающих множествах в FE-замкнутых классах и о строении решётки FE-замкнутых классов в P_k.

Дадим необходимые определения. Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики), $P_k^{(n)}$ — множество всех функций из P_k, зависящих от n переменных. Для любых $n \geqslant 1$ и i, $1 \leqslant i \leqslant n$, рассматриваем определённую на E_k *селекторную* функцию $e_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, значения которой совпадают со значениями переменной x_i. На множестве P_k предполагаем заданной операцию *суперпозиции* [22]. Классы функций из P_k, замкнутые относительно операции суперпозиции, далее называем *замкнутыми классами*. Понятия *порождающей системы* и *базиса* замкнутого класса [22], если специально не оговаривается оператор замыкания, относим к операции суперпозиции. Замкнутые классы, содержащие все селекторные функции, называем *клонами* [2].

В определении языка функциональных уравнений придерживаемся терминологии работ [13, 17]. Предполагаем, что каждая функция из P_k имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения n-местных функций из P_k используем символы $f_i^{(n)}$, которые называем *функциональными константами*. Наряду с функциональными константами рассматриваем *функциональные переменные*, для которых используем символы $\varphi_i^{(n)}$ с областью значений $P_k^{(n)}$. Кроме функциональных переменных используем обычные индивидные переменные $x_1, x_2, \ldots$ с областью значений E_k.

Пусть $Q \subseteq P_k$. Определим понятие *терма над* Q. Всякая индивидная переменная есть терм над Q. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы над Q, $f_i^{(n)}$ — функциональная константа, служащая обозначением функции из Q, $\varphi_j^{(n)}$ — функциональная переменная, то выражения

$$f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n), \quad \varphi_j^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$$

суть термы над Q.

Равенством над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q. Равенства над Q считаем также *функциональными уравнениями над* Q. Пусть $\varphi_{i_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все функциональные переменные, входящие в уравнение $t_1 = t_2$. *Решением уравнения* $t_1 = t_2$ называем систему $\left\{f_{j_1}^{(n_1)}, \ldots, f_{j_m}^{(n_m)}\right\}$ функций из P_k, которая после замены каждой переменной $\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество (относительно всех входящих в уравнение индивидных переменных). Если Ξ — конечная система уравнений, то *решением системы уравнений* Ξ называем систему функций из P_k, которая является решением каждого уравнения, входящего в систему Ξ.

Для того чтобы с помощью решений систем уравнений определять некоторые множества функций (от одного и того же числа переменных), выделим одну из функциональных переменных системы Ξ, которую назовём *главной функциональной переменной* системы Ξ. Пусть $\varphi_i^{(n)}$ — главная функциональная переменная системы уравнений Ξ и $F \subseteq P_k^{(n)}$. Говорим, что множество функций F *определяется системой уравнений* Ξ, если F является множеством всех тех n-местных функций, которые входят в решения системы Ξ в качестве компоненты по переменной $\varphi_i^{(n)}$.

Иногда для обозначения функциональных констант мы будем использовать символы g, h (с индексами или без них), а также символы y_i, z_j для обозначения индивидных переменных.

Пусть $Q \subseteq P_k$. *Замыканием* множества Q относительно систем функциональных уравнений (коротко FE-*замыканием*) называем множество всех функций из P_k, которые определяются (как одноэлементные множества) системами функциональных уравнений над Q. FE-замыкание множества Q обозначаем через FE$[Q]$. Множество Q называем FE-*замкнутым*, если $Q =$FE$[Q]$. Понятия FE-*полноты* и FE-*порождающей системы* вполне аналогичны соответствующим понятиям для операции суперпозиции [22].

Нетрудно убедиться в том, что FE-замыкание удовлетворяет известным трём аксиомам замыкания [2], т. е. действительно представляет собой оператор замыкания на множестве P_k. Кроме того, для любого множества Q (в том числе при $Q = \varnothing$) множеству FE$[Q]$ принадлежат все селекторные функции, а множество FE$[Q]$ замкнуто относительно операции суперпозиции (эти свойства для случая булевых функций фактически доказаны в [15] и без труда переносятся на случай функций

многозначной логики). Таким образом, любое FE-замкнутое множество является клоном.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ и π — перестановка на множестве E_k. Положим

$$f^\pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))),$$

где π^{-1} — перестановка, обратная к π. Функция f^π называется *двойственной* (сопряжённой) к функции f относительно перестановки π. Если $f^\pi = f$, то говорят, что f *самодвойственна* относительно перестановки π. Множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно перестановки π, обозначим через S_π. Если G — непустое множество перестановок на E_k, то пусть S_G — пересечение всех множеств S_π, $\pi \in G$.

Хорошо известно, что для любого множества перестановок G множество S_G образует клон. Более того, клон S_G совпадает с клоном $S_{G'}$, где G' — группа перестановок, порождаемая множеством G [2].

Утверждение 1. *При любом $k \geqslant 2$ множество функций-констант $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ FE-полно в классе P_k.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из P_k. Система функциональных уравнений, определяющая функцию f над множеством $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, состоит из k^n уравнений вида

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n),$$

где $a_1, \ldots, a_n \in E_k$ ($f(a_1, \ldots, a_n)$ рассматривается как константа из E_k).

Приводимое далее утверждение 2 формально перекрывается следствием 5. Однако мы включили его ввиду универсальности идеи доказательства (она работает также для позитивного, эквационального и других замыканий), требующей минимум технических средств.

Утверждение 2. *При любом $k \geqslant 2$ любой FE-замкнутый класс функций из P_k FE-порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от k переменных.*

Доказательство. Пусть Q — FE-замкнутый класс функций из P_k и $f(x_1, \ldots, x_n) \in Q$, $n > k$. Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ из E_k^n. Пусть набор $\widetilde{a}$ содержит l различных чисел и $i_1, i_2, \ldots, i_l$ — наименьшие номера позиций в наборе $\widetilde{a}$, на которых стоят данные l чисел ($i_1 = 1$). Обозначим через $f^{\widetilde{a}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})$ функцию, которая получается из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если произвольную переменную x_m заменить переменной x_{i_s}, где $a_m = a_{i_s}$. Очевидно, что

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f^{\widetilde{a}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}).$$

Более того, если $\widetilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — набор из E_k^n, который также состоит из l различных чисел и в котором выполняются те же отношения равенства, что и в наборе $\widetilde{a}$, то

$$f(b_1, \ldots, b_n) = f^{\widetilde{a}}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_l}).$$

Теперь легко построить систему функциональных уравнений, определяющую функцию f через функции $f^{\widetilde{a}}$. Именно, для любого набора $\widetilde{a} \in E_k^n$ включим в эту систему уравнение

$$f(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) = f^{\widetilde{a}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}),$$

где $\{j_1, \ldots, j_n\} = \{i_1, \ldots, i_l\}$, а переменная x_{j_m} $(1 \leqslant m \leqslant n)$ заменяет переменную x_m при получении функции $f^{\widetilde{a}}$ из функции f. Утверждение 2 доказано.

Следствие 1. *При любом $k \geqslant 2$ число* FE*-замкнутых классов в P_k конечно.*

Утверждение 3 (принцип двойственности для FE-замыкания). *Пусть система Ξ функциональных уравнений над множеством $\{g_1, \ldots, g_s\}$ функций из P_k определяет функцию f и π — перестановка на множестве E_k. Тогда система уравнений Ξ^π, полученная из системы Ξ заменой каждой функциональной константы g_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ соответствующей функциональной константой g_i^π, определяет функцию f^π.*

Доказательство. Пусть $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — все функциональные переменные системы Ξ и φ — её главная функциональная переменная. И пусть $(f, f_1, \ldots, f_r)$ — решение системы уравнений Ξ. Согласно основным определениям при замене в системе Ξ функциональных переменных $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ соответствующими функциональными константами $f, f_1, \ldots, f_r$ каждое уравнение системы Ξ превращается в тождество (относительно всех входящих в уравнение индивидных переменных).

Заменим теперь в полученной системе все функциональные константы $f, f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s$ функциональными константами $f^\pi, f_1^\pi, \ldots, f_r^\pi, g_1^\pi, \ldots, g_s^\pi$ (отдельно стоящие термы вида x_i в уравнениях системы Ξ при этом оставляем без изменений). Нетрудно видеть, что после такой замены полученные уравнения вновь окажутся тождествами. Это следует, например, из известного принципа двойственности для суперпозиции [22]: если

$$h(y_1, \ldots, y_n) = h_0(h_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_m(y_1, \ldots, y_n)),$$

то

$$h^\pi(y_1, \ldots, y_n) = h_0^\pi\big(h_1^\pi(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_m^\pi(y_1, \ldots, y_n)\big).$$

Таким образом, система функций $\left(f^\pi, f_1^\pi, \ldots, f_r^\pi\right)$ будет решением системы уравнений Ξ^π. Единственность решения f^π системы Ξ^π следует из единственности решения f системы Ξ и возможности обратного перехода от системы Ξ^π к системе Ξ с помощью перестановки π^{-1}. Утверждение 3 доказано.

Следствие 2. *Для любой группы G перестановок на множестве E_k класс S_G является* FE*-замкнутым.*

Функция из класса P_k называется *однородной* [24], если она самодвойственна относительно любых перестановок на E_k. Множество всех однородных функций из P_k (т. е. множество $S_{\mathcal{S}_k}$, где $\mathcal{S}_k$ — полная симметрическая группа перестановок на E_k) обозначим через H_k.

Тернарным дискриминатором на E_k называется функция $p(x, y, z)$, которая определяется соотношениями

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z & \text{при } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что тернарный дискриминатор p является однородной функцией.

Если φ — одноместная функциональная переменная, то через $\varphi^n(x)$ будем обозначать терм $\varphi(\ldots\varphi(x)\ldots)$, содержащий n вхождений переменной φ.

Теорема 1. *Для любого $k \geqslant 2$ имеет место включение $p \in \mathrm{FE}[\varnothing]$.*

Доказательство. Рассмотрим систему Ξ_1 функциональных уравнений, состоящую из одного уравнения

$$\varphi_1^{k!}(x) = x.$$

Очевидно, что система Ξ_1 определяет в P_k множество всех перестановок на E_k. Пусть далее система Ξ_2 состоит из уравнений

$$\varphi_2(x, x, y) = y, \quad \varphi_2(x, y, x) = x, \quad \varphi_2(x, y, y) = x.$$

Система Ξ_2 определяет множество «почти дискриминаторных» функций: при $k = 2$ ей удовлетворяет единственная функция p, при $k \geqslant 3$ — неодноэлементное множество функций, среди которых находится и дискриминатор p.

Если теперь объединить системы Ξ_1, Ξ_2 и добавить к ним уравнение

$$\varphi_2(x, \varphi_1(x), y) = x,$$

то получим систему уравнений Ξ_3, определяющую (относительно главной функциональной переменной φ_1) множество всех перестановок на E_k, которые не имеют неподвижных точек. В самом деле, если, например, системе Ξ_3 удовлетворяет перестановка f_1, для которой $f_1(a) = a$, то при $y \neq a$ получим два противоречивых равенства

$$\varphi_2(a,a,y) = a, \quad \varphi_2(a,a,y) = y$$

(первое — из последнего уравнения системы Ξ_3 после замены переменной φ_1 перестановкой f_1, второе — из первого уравнения системы Ξ_2).

Далее для лучшего понимания основной идеи доказательства рассмотрим сначала случай, когда k — простое число. В этом случае добавим к системе Ξ_3 уравнение

$$\varphi_1^k(x) = x$$

и образуем систему Ξ_4. Нетрудно видеть, что система Ξ_4 определяет (относительно главной функциональной переменной φ_1) множество всех перестановок на E_k, представляющих собой циклы длины k. Действительно, если перестановка f_1 удовлетворяет системе Ξ_4 и имеет в цикловом разложении цикл длины l, где $1 < l < k$, то при возведении в степень k он, очевидно, даст нетождественную перестановку (на соответствующем множестве элементов, участвующих в цикле), поскольку числа l и k взаимно просты. Таким образом, всякое решение f_1 системы уравнений Ξ_4 обладает тем свойством, что для любого $a \in E_k$ выполняется равенство

$$\bigl\{a, f_1(a), f_1^2(a), \ldots, f_1^{k-1}(a)\bigr\} = E_k,$$

где f_1^i — i-я степень перестановки f_1. Это свойство позволяет легко определить дискриминатор p. Именно, к уравнениям системы Ξ_4 добавим $k(k-1)$ уравнений вида

$$\varphi_2\bigl(\varphi_1^i(x), \varphi_1^j(x), y\bigr) = \varphi_1^i(x), \tag{1}$$

где $i,j \in E_k,\ i \neq j$ и $\varphi_1^0(x) = x$. Полученную систему обозначим через Ξ_5. Главной функциональной переменной системы Ξ_5 считаем переменную φ_2. Уравнения (1) системы Ξ_5 завершают (при $k \geqslant 3$) определение дискриминатора p, обеспечивая его правильное задание на всех наборах (a,b,c) из E_k^3 при $a \neq b$.

Обратимся теперь к случаю, когда число k составное. Вновь рассмотрим систему уравнений Ξ_4. В данном случае наряду с циклами длины k системе Ξ_4 удовлетворяют также все перестановки, у которых все циклы

имеют длины, делящие нацело число k. Если f_1 — такая перестановка на E_k, то для некоторого собственного делителя k_1 числа k перестановка $f_1^{k_1}$ имеет неподвижные точки. Следовательно, если для любого собственного делителя k_1 числа k добавить к системе Ξ_4 уравнение

$$\varphi_2\bigl(x, \varphi_1^{k_1}(x), y\bigr) = x$$

(которое обеспечивает отсутствие неподвижных точек у решений $\varphi_1^{k_1}(x)$), то полученной системе уравнений будут удовлетворять только перестановки на E_k, являющиеся циклами длины k. Далее проводим те же рассуждения, что и в случае простого k. Теорема 1 доказана.

Для любого $k \geqslant 3$ определим на E_k однородную функцию

$$r_k(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \begin{cases} x_k & \text{при } \{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k\} = E_k, \\ x_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 2. *Для любого $k \geqslant 2$ имеет место включение $H_k \subseteq \mathrm{FE}[\varnothing]$.*

Доказательство. Известно [4, 5], что при любом $k \geqslant 3$ система функций $\{p, r_k\}$ образует базис по суперпозиции в классе H_k. Поэтому ввиду теоремы 1 в данном случае достаточно установить, что функция r_k принадлежит классу $\mathrm{FE}[\varnothing]$.

Согласно результатам работ [4, 5] суперпозициями функции p можно определить такие функции $g_2, \ldots, g_k$, что при любом i, $2 \leqslant i \leqslant k$, справедливы соотношения

$$g_i(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} x_i & \text{при } x_1, \ldots, x_k \text{ попарно различных,} \\ x_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имея теперь в классе $\mathrm{FE}[\varnothing]$ функции $g_2, \ldots, g_k$, построим систему уравнений, которая определяет функцию r_k. Эта система состоит из $\binom{k-1}{2}$ уравнений

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}) = x_1 \quad (1 \leqslant i < j \leqslant k-1)$$

и уравнения

$$\varphi(x_1, g_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_{k-1}(x_1, \ldots, x_k)) = g_k(x_1, \ldots, x_k).$$

Первые $\binom{k-1}{2}$ уравнений этой системы обеспечивают второй пункт определения функции r_k, последнее уравнение — её первый пункт.

При $k = 2$ дискриминатор $p(x, y, z)$ совпадает с самодвойственной булевой функцией $x\overline{y} \vee xz \vee \overline{y}z$. Далее, система уравнений

$$\varphi_1(x, x, y) = x, \quad \varphi_1(x, y, x) = x, \quad \varphi_1(x, y, y) = y \tag{2}$$

определяет самодвойственную монотонную функцию $xy \vee xz \vee yz$. Нетрудно поэтому видеть, что уравнения (2) вместе с уравнением

$$\varphi_1(x, \varphi_2(y), z) = p(x, y, z)$$

определяют (относительно главной функциональной переменной φ_2) булеву функцию $\overline{y}$. Как хорошо известно [10, 23], система функций $\{x\overline{y} \vee xz \vee \overline{y}z, \overline{y}\}$ полна (относительно операции суперпозиции) в классе всех самодвойственных булевых функций, который совпадает с классом H_2. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Для любого $k \geqslant 2$ имеет место равенство* $\mathrm{FE}[\varnothing] = H_k$.

Доказательство. Достаточно обратиться к следствию 2, где в качестве группы G необходимо взять полную симметрическую группу $\mathcal{S}_k$ перестановок на множестве E_k. Следствие 3 доказано.

Следствие 4. *Для любого $k \geqslant 2$ система, состоящая из любых $k - 1$ различных функций-констант,* FE*-полна в классе P_k.*

Доказательство. Если $k \geqslant 3$, то подстановка в функцию r_k, принадлежащую классу H_k, $k - 1$ различных функций-констант даёт недостающую k-ю функцию-константу. Далее пользуемся утверждением 1. При $k = 2$ вместо функции r_k рассматриваем отрицание $\overline{x}$. Следствие 4 доказано.

Отметим, что при $k \geqslant 3$ следствие 4 не допускает усиления — любая система Q, состоящая из $k - 2$ функций-констант, не является FE-полной в классе P_k. В самом деле, если в систему Q не входят константы a, b, то система Q принадлежит FE-замкнутому классу S_π, где $\pi(a) = b$, $\pi(b) = a$ и $\pi(c) = c$ при $c \notin \{a, b\}$.

Следствие 5. *Для любого $k \geqslant 2$ любой* FE*-замкнутый класс функций из P_k* FE*-порождается множеством всех своих функций, зависящих не более чем от $k - 1$ переменных.*

Доказательство. В [14, теорема 2] доказано, что всякий замкнутый класс функций из P_k, целиком содержащий класс H_k, порождается (относительно операции суперпозиции) множеством всех своих функций, зависящих не более чем от $\max(3, k - 1)$ переменных. При этом в случаях

$k = 2, 3$ число 3 под знаком max появляется лишь потому, что в используемых конструкциях необходим тернарный дискриминатор p. Поскольку дискриминатор p входит в любой FE-замкнутый класс, число 3 в выражении $\max(3, k-1)$ можно опустить. Следствие 5 доказано.

Неизвестно, можно ли в следствии 5 понизить (при $k \geqslant 3$) оценку до $k-2$. Однако верхнюю оценку $k-3$ получить невозможно. Это следует из рассмотрения класса $S_{\mathcal{A}_k}$, где $\mathcal{A}_k$ — знакопеременная группа перестановок на E_k. В [6] доказано, что при любом $k \geqslant 4$ базис по суперпозиции в классе $S_{\mathcal{A}_k}$ образует система функций $\{p, \gamma_k\}$, где функция γ_k зависит от $k-2$ переменных. Вместе с тем любая функция из класса $S_{\mathcal{A}_k}$, зависящая от $k-3$ переменных, однородна [6].

Пусть g — n-местная функция из P_k. *Характеристическим рядом* функции g назовём упорядоченную последовательность всех функций вида $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$. Принцип упорядочения может быть, например, лексикографическим:

$$g(x_1, \ldots, x_1),\ g(x_1, \ldots, x_1, x_2), \ldots, g(x_k, \ldots, x_k, x_{k-1}),\ g(x_k, \ldots, x_k).$$

Пусть $\{g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_{k^n}(x_1, \ldots, x_k)\}$ — характеристический ряд функции g, где для единообразия все функции считаем зависящими от переменных $x_1, \ldots, x_k$. Нетрудно заметить, что характеристический ряд функции полностью определяет данную функцию. Действительно, набор $(g_1(0, 1, \ldots, k-1), \ldots, g_{k^n}(0, 1, \ldots, k-1))$ есть вектор значений функции g, принимаемых ею на всех k^n наборах из E_k^n.

Пусть E — непустое подмножество множества E_k. Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k *сохраняет множество* E, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из E выполняется включение $f(a_1, \ldots, a_n) \in E$. Множество всех функций из P_k, которые сохраняют любое подмножество множества E_k, обозначим через T_k. Нетрудно убедиться в том, что дискриминатор p входит в класс T_k и класс T_k замкнут относительно операции суперпозиции.

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 2$, G — группа перестановок на множестве E_k. Тогда $S_G = \mathrm{FE}[S_G \cap T_k]$.*

Доказательство. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса S_G. Определим $(k^n + k + 2)$-местную функцию h следующими условиями:

$$h(x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2, g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_{k^n}(x_1, \ldots, x_k)) = y_1 \qquad (3)$$

(здесь $g_1, \ldots, g_{k^n}$ — характеристический ряд функции g) и

$$h(x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_{k^n}) = y_2 \qquad (4)$$

для остальных значений $z_1, \ldots, z_{k^n}$.

Покажем корректность определения функции h в классе $S_G \cap T_k$. Во-первых, очевидно, что $h \in T_k$, поскольку значения функции h совпадают со значениями переменных y_1, y_2. Пусть далее $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ — произвольный набор из E_k^k. Согласно формуле (3) для любых значений b_1, b_2 из E_k имеем

$$h(\widetilde{a}, b_1, b_2, g_1(\widetilde{a}), \ldots, g_{k^n}(\widetilde{a})) = b_1.$$

Если π — произвольная перестановка из группы G, то по определению класса S_G при любом i, $1 \leqslant i \leqslant k^n$, справедливо равенство

$$g_i(\pi(\widetilde{a})) = \pi(g_i(\widetilde{a})), \tag{5}$$

где $\pi(\widetilde{a}) = (\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k))$. Следовательно, из (3), (5) для любых b_1, b_2 из E_k имеем

$$\begin{aligned} &h(\pi(\widetilde{a}), \pi(b_1), \pi(b_2), g_1(\pi(\widetilde{a})), \ldots, g_{k^n}(\pi(\widetilde{a}))) \\ &\qquad = h(\pi(\widetilde{a}), \pi(b_1), \pi(b_2), \pi(g_1(\widetilde{a})), \ldots, \pi(g_{k^n}(\widetilde{a}))) = \pi(b_1). \end{aligned}$$

Таким образом, перестановка π переводит набор

$$(\widetilde{a}, b_1, b_2, g_1(\widetilde{a}), \ldots, g_{k^n}(\widetilde{a})) \tag{6}$$

в набор

$$(\pi(\widetilde{a}), \pi(b_1), \pi(b_2), \pi(g_1(\widetilde{a})), \ldots, \pi(g_{k^n}(\widetilde{a}))) \tag{7}$$

и одновременно значение b_1 функции h на наборе (6) — в значение $\pi(b_1)$ функции h на наборе (7). В силу условия (4) аналогичное утверждение (с заменой b_1 на b_2) будет справедливо для наборов

$$(a_1, \ldots, a_k, b_1, b_2, c_1, \ldots, c_{k^n}),$$

не имеющих вид (6).

Наконец, если $g'(x_1, \ldots, x_n) \neq g(x_1, \ldots, x_n)$, то набор

$$\big(g'_1(0, 1, \ldots, k-1), \ldots, g'_{k^n}(0, 1, \ldots, k-1)\big)$$

отличен от набора

$$(g_1(0, 1, \ldots, k-1), \ldots, g_{k^n}(0, 1, \ldots, k-1))$$

и потому при любых $b_1, b_2 \in E_k$ имеем

$$h\big(0, 1, \ldots, k-1, b_1, b_2, g'_1(0, 1, \ldots, k-1), \ldots, g'_{k^n}(0, 1, \ldots, k-1)\big) = b_2.$$

Итак, тождество (3) (по переменным $x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2$) выполняется только для данной функции g из класса S_G. Это позволяет построить функциональное уравнение над функцией h, определяющее функцию g. Таким будет уравнение

$$h(x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2, \varphi(x_1, \ldots, x_1), \varphi(x_1, \ldots, x_1, x_2), \ldots, \varphi(x_k, \ldots, x_k)) = y_1,$$

где распределение переменных $x_1, \ldots, x_k$ под знаком функциональной переменной φ соответствует их распределению при получении характеристического ряда функции g. Теорема 3 доказана.

Следствие 6. *Для любого* $k \geqslant 2$ *множество* T_k FE-*полно в классе* P_k.

Доказательство. Необходимо в теореме 3 в качестве группы G взять группу, состоящую из одной тождественной перестановки. Следствие 6 доказано.

В [7, теорема 2] охарактеризованы все замкнутые классы в P_k, содержащие тернарный дискриминатор p. Как установлено, каждый из этих классов представим в виде пересечения замкнутых классов, которые определяются как классы сохранения отношений типа

$$(x_1 \in E)\&(\pi(x_1) = x_2), \tag{8}$$

где E — неодноэлементное подмножество множества E_k, и типа $x \in E$ (здесь E уже может быть одноэлементным множеством). Второй тип отношений даёт классы функций, сохраняющих заданное множество E. Из теоремы 3 вытекает, что помимо FE-замкнутых классов вида S_G из «крупных» FE-замкнутых классов в P_k существуют, возможно, лишь FE-замкнутые классы, определяемые отношениями (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Голунков Ю. В.** Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 17. — 1980. — С. 23–34.
2. **Кон П.** Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968. — 351 с.
3. **Кузнецов А. В.** О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости. Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.
4. **Марченков С. С.** О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. Вып. 36. — М.: Наука, 1979. — С. 5–22.
5. **Марченков С. С.** Однородные алгебры // Проблемы кибернетики. Вып. 39. — М.: Наука, 1982. — С. 85–106.

6. **Марченков С. С.** Классификация алгебр со знакопеременной группой автоморфизмов // Мат. вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 100–122.
7. **Марченков С. С.** Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем // Мат. заметки. — 1997. — Т. 61, вып. 3. — С. 359–366.
8. **Марченков С. С.** S-классификация функций многозначной логики // Дискрет. математика. — 1997. — Т. 9, вып. 3. — С. 125–152.
9. **Марченков С. С.** О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискрет. математика. — 1999. — Т. 11, вып. 4. — С. 110–126.
10. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000. — 126 с.
11. **Марченков С. С.** S-классификация функций трёхзначной логики. — М.: Физматлит, 2001. — 79 с.
12. **Марченков С. С.** Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 2003. — № 6. — С. 37–39.
13. **Марченков С. С.** Эквациональное замыкание // Дискрет. математика. — 2005. — Т. 17, вып. 2. — С. 117–126.
14. **Марченков С. С.** О порядках дискриминаторных классов многозначной логики // Мат. заметки. — 2009. — Т. 86, вып. 4. — С. 550–556.
15. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** О решениях систем функциональных булевых уравнений // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 48–57.
16. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики // Докл. РАН. — 2009. — Т. 426, № 4. — С. 448–449.
17. **Марченков С. С., Фёдорова В. С.** Решения систем функциональных уравнений многозначной логики // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. — 2009. — № 4. — С. 29–33.
18. **Нгуен Ван Хоа.** О структуре самодвойственных замкнутых классов трёхзначной логики // Дискрет. математика. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 82–95.
19. **Нгуен Ван Хоа.** О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискрет. математика. — 1993. — Т. 5, вып. 4. — С. 87–108.
20. **Тайманов В. А.** О функциональных системах k-значной логики с операциями программного типа // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 6. — С. 1307–1310.
21. **Тарасова О. С.** Классы k-значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 2001. — № 6. — С. 54–57.

22. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.
23. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966. — 119 с.
24. **Marczewski E.** Homogeneous operations and homogeneous algebras // Fund. Math. — 1964. — Vol. 56, № 1. — P. 81–103.

Марченков Сергей Серафимович,
e-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
4 февраля 2010 г.