ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2010. Том 17, № 4. С. 32–42

УДК 519.174

О ПРЯМЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ В n-МЕРНОМ БУЛЕВОМ КУБЕ *)

А. Л. Пережогин

Аннотация. Получена верхняя оценка для порядка группы прямых автоморфизмов гамильтонова цикла в булевом n-кубе. Доказано, что существование гамильтонова цикла с порядком группы прямых автоморфизмов, достигающим эту верхнюю оценку, эквивалентно существованию гамильтонова цикла с дополнительным условием в графе орбит фиксированного автоморфизма n-куба.

Ключевые слова: n-куб, гамильтонов цикл, автоморфизм.

Булевым n-мерным кубом Q_n называется граф, вершинами которого являются все двоичные наборы длины n; две вершины *соединены ребром*, если соответствующие наборы различаются в одной позиции. Для любого $v \in Q_n$ обозначим через $\omega(v)$ вес набора v. Также положим $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, $\overline{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in Q_n$.

Простой цикл в Q_n, содержащий все вершины, называется *гамильтоновым циклом* в Q_n. Гамильтоновы циклы в Q_n часто называют *кодами Грея* [9].

Гамильтонову циклу $H = v_0 = \overline{0}, v_1, \ldots, v_{t-1}, v_t = v_0$ в Q_n поставим в соответствие слово $X = X(H) = x_0\, x_1\, \ldots\, x_{2^n-1}$ в алфавите $A_n = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$, где x_i — номер позиции, в которой различаются наборы v_i и v_{i+1}, $0 \leqslant i \leqslant t-1$. Такое слово назовём *переходным словом цикла* H. Везде ниже как для вершин циклов, так и для букв их переходных слов индексы берутся по модулю длины цикла.

Через $s(Y)$ обозначим набор состава слова Y по модулю 2. Иными словами, $s(Y) = (s_1,\, s_2,\, \ldots,\, s_n)$, где $s_m = 0$ при $1 \leqslant m \leqslant n$, если буква m встречается в Y чётное число раз, и $s_m = 1$ в противном случае. Заметим, что $s(X(H)) = \overline{0}$.

Известно, что сдвиг куба Q_n на любой двоичный набор v длины n

$$Q_n \oplus v = \{u \oplus v \mid u \in Q_n\},$$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00671).

где $\oplus$ — покоординатное сложение по модулю 2, является автоморфизмом графа Q_n. Подгруппу всех таких сдвигов группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Q_n)$ булева n-мерного куба обозначим через $G(Q_n)$. Подгруппой группы $\mathrm{Aut}(Q_n)$ также является группа перестановок $S_n(Q_n)$ координат вершин куба. Более того, нетрудно видеть, что

$$\mathrm{Aut}(Q_n) = G(Q_n) \leftthreetimes S_n(Q_n),$$

где $\leftthreetimes$ — полупрямое (или нормальное) произведение (см., например, [3]). Таким образом, любой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(Q_n)$ задаётся парой (π, v), где $\pi \in S_n(Q_n)$, $v \in Q_n$ и $\varphi(Q_n) = \pi(Q_n) \oplus v$.

Автоморфизмом гамильтонова цикла H в Q_n назовём автоморфизм Q_n, переводящий H в себя. Практически все известные конструкции кодов Грея позволяют строить гамильтоновы циклы с нетривиальной группой автоморфизмов [1, 6, 8], хотя доля таких циклов мала. Изучение свойств групп автоморфизмов помогает при классификации гамильтоновых циклов [4, 7]. При поиске гамильтоновых циклов с дополнительными свойствами часто помогает сужение задачи на класс циклов с большой группой автоморфизмов [2, 10, 11].

Обозначим

$$\tau(n) = \max |\mathrm{Aut}(H)|,$$

где максимум берётся по всем гамильтоновым циклам H в Q_n.

Лемма 1. *При любом* $n \geqslant 2$ *верно неравенство*

$$\tau(n+1) \geqslant \tau(n).$$

Доказательство. Известна [5] следующая конструкция кодов Грея: если $x_0\, x_1\, \ldots\, x_{2^n-1}$ — переходная последовательность гамильтонова цикла H в Q_n, то слово $x_0\,(n+1)\,x_1\,(n+1)\,\ldots\,x_{2^n-1}\,(n+1)$ является переходной последовательностью некоторого гамильтонова цикла H' в Q_{n+1}. Остаётся заметить, что $|\mathrm{Aut}(H')| = |\mathrm{Aut}(H)|$. Лемма 1 доказана.

Зафиксируем некоторую ориентацию гамильтонова цикла H в Q_n. Если под действием автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}(H)$ цикл не меняет ориентации, то такой автоморфизм назовём *прямым*, в противном случае — *непрямым*. Множество прямых автоморфизмов цикла H обозначим через $\mathrm{Aut}_+(H)$. В [2] показано, что если $|\mathrm{Aut}_+(H)| = t$, то

$$\mathrm{Aut}_+(H) \cong Z_t, \tag{1}$$

а если H имеет непрямой автоморфизм, то

$$\mathrm{Aut}(H) \cong Z_2 \leftthreetimes \mathrm{Aut}_+(H). \tag{2}$$

Заметим, что из (1) следует, что t всегда является степенью двойки. Обозначим

$$\tau_+(n) = \max |\mathrm{Aut}_+(H)|,$$

где максимум берётся по всем гамильтоновым циклам H в Q_n. Непосредственно из (2) следует

Лемма 2. *При любом $n \geqslant 2$ верно неравенство*

$$\tau(n) \leqslant 2\tau_+(n).$$

Таким образом, при изучении гамильтоновых циклов с большими группами автоморфизмов особый интерес представляют подгруппы прямых автоморфизмов. В дальнейшем будем рассматривать только их.

Пусть H — гамильтонов цикл в Q_n с нетривиальной группой прямых автоморфизмов. В силу (1) в этой группе есть порождающий элемент $\varphi_{\pi,v}$, где $\varphi_{\pi,v}(Q_n) = \pi(Q_n) \oplus v$. Таким образом, $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle \varphi_{\pi,v} \rangle$. Заметим, что поскольку π — перестановка координат вершин куба Q_n, она очевидно является и перестановкой букв алфавита $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. В [2] доказана

Лемма 3. *Пусть $x_0\, x_1\, \ldots\, x_{2^n-1}$ — переходная последовательность гамильтонова цикла H в Q_n с нетривиальной группой прямых автоморфизмов. Тогда $|\mathrm{Aut}_+(H)| = 2^m$ и $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle \varphi_{\pi,v} \rangle$ тогда и только тогда, когда с точностью до ориентации цикла*

(i) $v = s(x_0\, x_1\, \ldots\, x_{2^{n-m}-1})$;

(ii) $x_{(i+2^{n-m}) \bmod 2^n} = \pi(x_i)$.

Рассмотрим разложение перестановки π на циклы:

$$\pi = \pi_1\, \pi_2\, \ldots\, \pi_q, \tag{3}$$

где

$$\pi_i = \left(a_1^{(i)}\, a_2^{(i)}\, \ldots\, a_{n_i}^{(i)}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant q. \tag{4}$$

Если элемент перестановки переходит сам в себя, то считаем, что он образует цикл длины 1. Тем самым в таком разложении на циклы присутствуют все элементы перестановки. Также положим, что в записи каждого цикла первый элемент наименьший. Из (1) непосредственно следует

Лемма 4. *Если H является гамильтоновым циклом в Q_n с нетривиальной группой прямых автоморфизмов $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle \varphi_{\pi,v} \rangle$, а перестановка π представлена в виде (3), то длина n_i каждого цикла π_i вида (4) равна степени двойки.*

Для любых $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in Q_n$ и цикла π_i вида (4) определим

$$u_{\pi_i} = (u_{a_1^{(i)}}, u_{a_2^{(i)}}, \ldots, u_{a_{n_i}^{(i)}}) \in Q_{n_i}. \tag{5}$$

Для любых $v \in Q_n$ и перестановки π вида (3) определим множество

$$\Gamma_{\pi,v} = \{u \in Q_n \mid \omega(u_{\pi_i}) \equiv \omega(v_{\pi_i}) \pmod 2, \quad 1 \leqslant i \leqslant q\}.$$

Заметим, что

$$|\Gamma_{\pi,v}| = 2^{n-q}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть H — гамильтонов цикл в Q_n с нетривиальной группой прямых автоморфизмов $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle \varphi_{\pi,v} \rangle$. Пусть перестановка π представлена в виде (3), (4). Тогда для любого $u \in \Gamma_{\pi,v}$ существует такой гамильтонов цикл H' в Q_n, что*

$$\mathrm{Aut}_+(H') = \langle \varphi_{\pi,u} \rangle \quad \text{и} \quad |\mathrm{Aut}_+(H')| = |\mathrm{Aut}_+(H)|.$$

Доказательство. Пусть $|\mathrm{Aut}_+(H)| = 2^m,\ m \geqslant 1,\ x_0\, x_1\, \ldots\, x_{2^n-1}$ — переходная последовательность гамильтонова цикла H. Рассмотрим последовательность двоичных наборов

$$s_0, s_1, \ldots, s_{2^n-1}, \tag{7}$$

вида

$$s_i = s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{i+2^{n-m}-1}), \quad 0 \leqslant i \leqslant 2^n - 1. \tag{8}$$

Здесь и далее индексы берутся по модулю 2^n. Из (8) и леммы 3 при любых $i,\ j,\ 0 \leqslant i, j \leqslant 2^n - 1,\ i < j$, имеем

$$\begin{aligned} s_j = s_i \oplus s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}) \oplus s(x_{i+2^{n-m}}\, x_{i+2^{n-m}+1}\, \ldots\, x_{j+2^{n-m}-1}) \\ = s_i \oplus s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}) \oplus s(\pi(x_i)\, \pi(x_{i+1})\, \ldots\, \pi(x_{j-1})) \\ = s_i \oplus s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}) \oplus \pi(s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1})). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого цикла π_t из (3) имеем

$$(s_j)_{\pi_t} = (s_i)_{\pi_t} \oplus (s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_t} \oplus \pi((s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_t}). \tag{9}$$

Следовательно, двоичные наборы $(s_j)_{\pi_t}$ и $(s_i)_{\pi_t}$ имеют одинаковую чётность веса. Но $s_0 = v$ в силу леммы 3, значит,

$$s_t \in \Gamma_{\pi,v}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2^n - 1. \tag{10}$$

Из (9) получаем

$$(s_i)_{\pi_t} = (s_j)_{\pi_t} \Leftrightarrow (s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_t} = \pi((s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_t}). \quad (11)$$

Поскольку двоичный набор $\pi((s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_t})$ является циклическим сдвигом двоичного набора $(s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_t}$, имеем

$$(s_i)_{\pi_t} = (s_j)_{\pi_t} \Leftrightarrow (s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_t} \in \{\overline{0},\, \overline{1}\}. \quad (12)$$

Следовательно,

$$s_i = s_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_1} \in \{\overline{0},\, \overline{1}\}, \\ \ldots \\ (s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}))_{\pi_s} \in \{\overline{0},\, \overline{1}\}. \end{array} \right.$$

Существует ровно 2^q двоичных векторов длины n, удовлетворяющих последней системе. Поскольку при $j \neq p$

$$s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{j-1}) \neq s(x_i\, x_{i+1}\, \ldots\, x_{p-1}),$$

в последовательности (7) любой двоичный набор встречается не более 2^q раз. Но тогда из (6) и (10) следует, что любой двоичный набор из $\Gamma_{\pi,v}$ встречается в последовательности (7) ровно 2^q раз. Таким образом, $u = s_t$ для некоторого $t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2^n - 1$. Тогда гамильтонов цикл H', получающийся сдвигом H на вектор $s(x_0\, x_1\, \ldots\, x_{t-1})$, является искомым. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть H — такой гамильтонов цикл в $Q_n,\ n \geqslant 3$, что $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle \varphi_{\pi,v} \rangle$ и $|\mathrm{Aut}_+(H)| = 2^k,\ k \geqslant 1$. Тогда для любых цикла π_i длины n_i в циклическом разложении* (3) *перестановки π и $u \in \Gamma_{\pi,v}$ верно*

$$u_{\pi_i} \oplus \pi(u_{\pi_i}) \oplus \cdots \oplus \pi^{n_i-1}(u_{\pi_i}) = \begin{cases} \overline{0} & \text{при } \omega(v_{\pi_i}) \text{ чётно}, \\ \overline{1} & \text{в противном случае}. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что достаточно рассмотреть случай $u = v$. Пусть π_i имеет вид (4). Тогда при любом $j,\ 1 \geqslant j \geqslant n_i$, среди слов

$$v_{\pi_i},\ \pi(v_{\pi_i}),\ \ldots,\ \pi^{n_i-1}(v_{\pi_i})$$

ровно $\omega(v_{\pi_i})$ слов содержат букву $a_j^{(i)}$ нечётное число раз. Отсюда получаем искомое равенство. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть H — такой гамильтонов цикл в Q_n, $n \geqslant 3$, что $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle \varphi_{\pi,v} \rangle$ и $|\mathrm{Aut}_+(H)| = 2^k$, $k \geqslant 1$. Тогда в циклическом разложении (3) перестановки π найдётся такой цикл π_i длины 2^{k-1}, что двоичный набор v_{π_i} имеет нечётный вес.*

Доказательство. Пусть π имеет вид (3). По теореме 1 существует такой $u \in \Gamma_{\pi,v}$, что при любом i, $1 \leqslant i \leqslant s$, если v_{π_i} имеет чётный вес, то $u_{\pi_i} = \overline{0}$. Следовательно, если v_{π_i} имеет чётный вес для любого цикла π_i, то

$$u_{\pi_i} \oplus \pi(u_{\pi_i}) \oplus \dots \oplus \pi^{2^{k-1}-1}(u_{\pi_i}) = \overline{0}. \tag{14}$$

По следствию 1 из (14) имеем, что если для некоторого цикла π_i длины n_i

$$u_{\pi_i} \oplus \pi(u_{\pi_i}) \oplus \dots \oplus \pi^{2^{k-1}-1}(u_{\pi_i}) \neq \overline{0},$$

то $n_i = 2^{k-1}$ и вес v_{π_i} нечётный. Остаётся заметить, что

$$u \oplus \pi(u) \oplus \dots \oplus \pi^{2^{k-1}-1}(u) \neq \overline{0},$$

поскольку $|\mathrm{Aut}_+(H)| = 2^k$. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *При любом $n \geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$\tau_+(n) \leqslant 2^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor} + 1.$$

Доказательство. Пусть в Q_n, $n \geqslant 3$, существует такой гамильтонов цикл H, что $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle \varphi_{\pi,v} \rangle$ и $|\mathrm{Aut}_+(H)| = 2^k$, $k \geqslant 1$. Тогда по следствию 2 в циклическом разложении (3) перестановки π найдётся такой цикл π_i длины 2^{k-1}, что двоичный набор v_{π_i} имеет нечётный вес. Но по лемме 3 вес v чётный. Следовательно, в (3) $s \geqslant 2$. Получили, что $n \geqslant 2^{k-1} + 1$. Следствие 3 доказано.

Заметим, что следствие 3 доказано в [2].

Следствие 4. *При любом $k \geqslant 2$ в $Q_{2^{k-1}+1}$ существует гамильтонов цикл с группой прямых автоморфизмов порядка 2^k тогда и только тогда, когда в $Q_{2^{k-1}+1}$ существует такой гамильтонов цикл H, что $|\mathrm{Aut}_+(H)| = 2^k$ и $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle \varphi_{\pi,v} \rangle$, где $\pi = (1\,2\,\dots\,2^{k-1})(2^{k-1}+1)$ и $v = (1, 0, 0, \dots, 0, 1)$.*

Пусть везде далее

$$\pi = (1\,2\,\dots\,2^{k-1})(2^{k-1}+1), \quad e = (1, 0, 0, \dots, 0, 1) \in Q_{2^{k-1}+1},$$

$$\varphi = \varphi_{\pi,e} \in \mathrm{Aut}(Q_{2^{k-1}+1}),$$

$$\pi_* = (1\,2\,\dots\,2^{k-1}), \quad e_* = (1, 0, 0, \dots, 0) \in Q_{2^{k-1}},$$

$$\varphi_* = \varphi_{\pi_*,e_*} \in \mathrm{Aut}(Q_{2^{k-1}}).$$

Лемма 5. *При любом $k \geqslant 2$ все элементы $Q_{2^{k-1}}$ под действием φ_* распадаются на орбиты длины 2^k.*

Доказательство. Легко видеть, что для любого $v \in Q_{2^{k-1}}$

$$\varphi_*^{2^k}(v) = v, \quad \varphi_*^{2^{k-1}}(v) = v \oplus \overline{1}.$$

Пусть t — такое минимальное целое положительное число, что $\varphi_*^t(v) = v$. Тогда t делит 2^k, но не делит 2^{k-1}. Следовательно, $t = 2^k$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *При любом $k \geqslant 2$ в $Q_{2^{k-1}}$ под действием φ_* существуют ровно 2^{k-2} орбит T таких, что в T существуют элементы v, $u \in T$, смежные в $Q_{2^{k-1}}$.*

Доказательство. Пусть $n = 2^{k-1}$ и в T существуют элементы v и u, смежные в $Q_{2^{k-1}}$. Если v и u различаются в i-й координате, то $\varphi_*(v)$ и $\varphi_*(u)$ различаются в $(i+1)$-й координате. Если $u = \varphi^t(v)$ для некоторого t, то $v = \varphi^{2^k - t}(u)$. Поэтому для некоторого t, $1 \leqslant t \leqslant n$, существует такой $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in T$, что

$$(w_{n-t+1} \oplus 1, w_{n-t+2} \oplus 1, \ldots, w_n \oplus 1, w_1, w_2, \ldots, w_{n-t}) \\ = (w_1 \oplus 1, w_2, w_3, \ldots, w_n). \quad (15)$$

Если t чётно, то наборы в (15) имеют разную чётность веса. Следовательно, t нечётно. Тогда по w_1 однозначно восстанавливаются остальные координаты. Полученные два набора принадлежат одной орбите. Следовательно, для каждого t, $1 \leqslant t \leqslant 2^{k-1} - 1$, существует единственная орбита T, содержащая пару наборов вида (15). Нетрудно видеть, что при разных t получатся разные орбиты. Лемма 6 доказана.

Для двоичного набора $v \in Q_{2^{k-1}}$ и $\sigma \in \{0, 1\}$ обозначим через (v, σ) двоичный набор из $Q_{2^{k-1}+1}$, получающийся добавлением $(2^{k-1}+1)$-й координаты σ из v.

Лемма 7. *При любом $k \geqslant 2$ все элементы $Q_{2^{k-1}+1}$ под действием φ распадаются на орбиты длины 2^k.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$\varphi((v, \sigma)) = (\varphi_*(v), \sigma \oplus 1).$$

Следовательно, любая орбита v_1, v_2, …, v_t в $Q_{2^{k-1}}$, образованная под действием φ_*, порождает две орбиты

$$\begin{gathered} (v_1, 0),\ (v_2, 1),\ \ldots,\ (v_{t-1}, 0),\ (v_t, 1), \\ (v_1, 1),\ (v_2, 0),\ \ldots,\ (v_{t-1}, 1),\ (v_t, 0) \end{gathered} \quad (16)$$

в $Q_{2^{k-1}+1}$ под действием φ. Остаётся заметить, что по лемме 5 $t = 2^k$. Лемма 7 доказана.

Для любого $k \geqslant 2$ определим граф орбит G_k следующим образом: вершинами графа являются орбиты в $Q_{2^{k-1}+1}$ под действием φ; две вершины T_1 и T_2 в G_k смежны, если орбиты T_1 и T_2 имеют представителей, смежных в $Q_{2^{k-1}+1}$.

Рёбра в G_k, соединяющие пары орбит вида (16), назовём *α-рёбрами*. Если же эти орбиты образованы из орбиты $v_1, v_2, \ldots, v_t$, удовлетворяющей условиям леммы 6, то соответствующее α-ребро назовём *суперребром*. Очевидна

Лемма 8. *Для $T_1T_2 \in EG_k$ существуют такие $v_1 \in T_1$, $v_2 \in T_2$, что v_1 и v_2 различаются только в последней координате тогда и только тогда, когда T_1T_2 — α-ребро. Если T_1T_2 является α-ребром в G_k, то существуют такие $v_1 \in T_1$, $v_2 \in T_2$, что v_1 и v_2 различаются только в i-й координате, причём $i < 2^{k-1} + 1$ тогда и только тогда, когда T_1T_2 является суперребром.*

Теорема 2. *При любом $k \geqslant 3$ в $Q_{2^{k-1}+1}$ существует гамильтонов цикл с группой прямых автоморфизмов порядка 2^k тогда и только тогда, когда в G_k существует гамильтонов цикл либо проходящий по нечётному числу α-рёбер, либо содержащий по крайней мере одно суперребро.*

Доказательство. Пусть $n = 2^{k-1} + 1$. Необходимость. Пусть $H = v_0 = \overline{0}, v_1, \ldots, v_{2^n-1}, v_{2^n} = v_0$ — гамильтонов цикл в Q_n с группой прямых автоморфизмов порядка 2^k. По следствию 4 без ограничения общности $\mathrm{Aut}_+(H) = \langle\varphi\rangle$. Тогда вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{2^{n-k}-1}$ из разных орбит Q_n под действием φ. При любом i, $0 \leqslant i < 2^{n-k}$, обозначим через T_i такую вершину в G_k, что $v_i \in T_i$. Тогда $T_0, T_1, \ldots, T_{2^{n-k}-1}, T_{2^{n-k}} = T_0$ — гамильтонов цикл в G_k. Поскольку $v_{2^{n-k}} = \varphi(v_0)$, наборы $v_{2^{n-k}}$ и v_0 в последней позиции различаются. Следовательно, в цепи $v_0, v_1, \ldots, v_{2^{n-k}-1}$, $v_{2^{n-k}}$ рёбер, соединяющих вершины, различающиеся в последней позиции, нечётное число. Тогда утверждение теоремы вытекает из леммы 8.

Достаточность. Пусть $T_0, T_1, \ldots, T_{2^{n-k}-1}, T_{2^{n-k}} = T_0$ — гамильтонов цикл в G_k, содержащий чётное число α-рёбер. Тогда по условию теоремы хотя бы одно из α-рёбер является суперребром. Без ограничения общности, пусть T_0T_1 — суперребро. Построим цепь в Q_n следующим образом. Возьмём произвольный $v_0 \in T_0$. По лемме 8 найдётся такой $u \in T_1$, что v_0 и u различаются только в i-й координате, причём $i < n$. Положим $v_1 = u$.

Пусть для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant 2^{n-k} - 1$, цепь $v_0, v_1, \ldots, v_j$ постро-

ена. Если T_jT_{j+1} является α-ребром, то положим

$$v_{j+1} = v_j \oplus (0, 0, \ldots, 0, 1) \in T_{j+1}.$$

В противном случае в качестве v_{j+1} возьмём любую вершину из орбиты T_{j+1}, смежную с v_j в Q_n.

Построенная цепь v_0, v_1, …, $v_{2^{n-k}}$ протыкает все орбиты Q_n под действием φ, причём только v_0 и $v_{2^{n-k}}$ из одной орбиты T_0. Пусть для некоторого t имеет место равенство $v_{2^{n-k}} = \varphi^t(v_0)$. Так как по построению v_0 и $v_{2^{n-k}}$ различаются в последней позиции, то t нечётно, а следовательно, взаимно просто с длиной орбиты 2^k. Тогда в Q_n

$$\begin{gathered} v_0,\, v_1,\, \ldots,\, v_{2^{n-k}-1},\, \varphi^t(v_0),\, \varphi^t(v_1),\, \ldots,\, \varphi^t(v_{2^{n-k}-1}), \\ \varphi^{2t}(v_0),\, \varphi^{2t}(v_1),\, \ldots,\, \varphi^{2t}(v_{2^{n-k}-1}),\, \ldots, \\ \varphi^{(2^k-1)t}(v_0),\, \varphi^{(2^k-1)t}(v_1),\, \ldots,\, \varphi^{(2^k-1)t}(v_{2^{n-k}-1}) \end{gathered}$$

является гамильтоновым циклом с группой прямых автоморфизмов порядка 2^k.

Случай, когда гамильтонов цикл T_0, T_1, …, $T_{2^{n-k}-1}$, $T_{2^{n-k}} = T_0$ содержит нечётное число α-рёбер, рассматривается аналогично, только суперребро не используется. Теорема 2 доказана.

Для любого $k \geqslant 2$ определим граф орбит G_k^* следующим образом: вершинами графа являются орбиты в $Q_{2^{k-1}}$ под действием φ_*; две вершины T_1 и T_2 в G_k^* смежны, если орбиты T_1 и T_2 имеют представителей, смежных в $Q_{2^{k-1}}$.

По лемме 6 в G_k^* ровно 2^{k-2} вершин имеют петли.

Теорема 3. *Если в G_k^* существует гамильтонова цепь с концом в вершине с петлёй, то в $Q_{2^{k-1}+1}$ существует гамильтонов цикл с группой прямых автоморфизмов порядка 2^k.*

Доказательство. Пусть $n = 2^{k-1}$. Пусть T_0, T_1, …, $T_{2^{n-k}-1}$ — гамильтонова цепь в G_k^*, причём вершина T_0 имеет петлю. Индукцией по длине построим две непересекающиеся цепи T_0^0, T_1^0, …, $T_{2^{n-k}-1}^0$ и T_0^1, T_1^1, …, $T_{2^{n-k}-1}^1$ в G_k. Орбита T_0 в G_k^* под действием φ_* порождает две орбиты вида (16) в G_k под действием φ. Обозначим их через T_0^0 и T_0^1 соответственно. Заметим, что по определению $T_0^0T_0^1$ — суперребро в G_k. При любом i, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-k}-1$, орбита T_i в G_k^* под действием φ_* порождает две орбиты вида (16) в G_k под действием φ. Причём одна из них смежна с T_{i-1}^0, а другая с T_{i-1}^1. Обозначим первую через T_i^0, вторую — через T_i^1.

Добавив суперребро $T_0^0 T_0^1$ и α-ребро $T^0_{2^{n-k}-1} T^1_{2^{n-k}-1}$ к полученным цепям, получим гамильтонов цикл в G_k, содержащий суперребро. По теореме 2 в $Q_{2^{k-1}+1}$ существует гамильтонов цикл с группой прямых автоморфизмов порядка 2^k. Теорема 3 доказана.

Следствие 5. *Если граф G_k^* гамильтонов, то в $Q_{2^{k-1}+1}$ существует гамильтонов цикл с группой прямых автоморфизмов порядка 2^k.*

Легко проверяется вручную, что в G_2^* одна вершина с петлёй, G_3^* имеет ровно две смежные вершины, обе с петлями, G_4^* гамильтонов. С помощью компьютера найден гамильтонов цикл в G_5^*. Тогда из теорем 2, 3 и следствия 3 вытекает

Теорема 4. *При любом n, $3 \leqslant n \leqslant 32$, верно равенство*

$$\tau_+(n) = 2^{\lfloor \log_2 (n-1) \rfloor} + 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Евдокимов А. А.** О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач: Сб. науч. тр. Вып. 34. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. — С. 8–26.
2. **Пережогин А. Л.** Об автоморфизмах циклов в n-мерном булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 67–79.
3. **Холл М.** Теория групп. — М.: Изд-во иностр. лит. 1962. — 468 с.
4. **Dejter I. J., Delgado A. A.** Classes of Hamilton cycles in the 5-cube // J. Comb. Math. Comb. Comput. — 2007. — Vol. 61. — P. 81–95.
5. **Gilbert E. N.** Gray codes and paths on the n-cube // Bell System Tech. J. — 1958. — Vol. 37, N 3. — P. 815–826.
6. **Goddyn L., Gvozdjak P.** Binary Gray codes with long bit runs // Electron. J. Comb. — 2003. — 10. ♯R27.
7. **Kreweras G.** Some remarks about Hamiltonian circuits and cycles on hypercubes // Bull. Inst. Comb. Appl. — 1994. — Vol. 12. — P. 19–22.
8. **Ramras M.** A new method of generating Hamiltonian cycles on the n-cube // Discrete Math. — 1990. — Vol. 85, N 3. — P. 329–331.
9. **Savage C. D.** A survey of combinatorial Gray codes // SIAM Rev. — 1997. — Vol. 39, N 4. — P. 605–629.
10. **Savage C. D., Shields I.** A Hamilton path heuristic with applications to the middle two levels problem // Congr. Numerantium. — 1999. — Vol. 140. — P. 161–178.

11. **Shields I., Shields B. J., Savage C. D.** An update on the middle levels problem // Discrete Math. — 2009. — Vol. 309. — P. 5271–5277.

Пережогин Алексей Львович,
e-mail: perezhogin@math.nsc.ru

Статья поступила
9 декабря 2009 г.

Переработанный вариант —
11 января 2010 г.