ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—август 2010. Том 17, № 4. С. 84–91

УДК 519.176

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА НА МАКСИМУМ В КОНЕЧНОМЕРНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ *)

В. В. Шенмайер

Аннотация. Рассматривается геометрическая задача коммивояжёра на максимум. Предполагается, что вершинами графа являются точки в произвольном конечномерном нормированном пространстве. Для данной задачи получен приближённый алгоритм с относительной погрешностью, стремящейся к нулю с ростом числа вершин. Алгоритм является обобщением известного алгоритма А. И. Сердюкова для евклидовой задачи MAX TSP.

Ключевые слова: задача коммивояжёра на максимум, геометрическая задача коммивояжёра, конечномерное нормированное пространство, асимптотически точный алгоритм.

Введение

Задача коммивояжёра на максимум (MAX TSP) заключается в отыскании гамильтонова цикла максимального веса в некотором взвешенном графе G. Рассмотрим геометрический вариант задачи, в котором вершинами графа являются точки в пространстве $\mathbb{R}^d$, а весами дуг — расстояния между ними относительно некоторой заданной нормы. Предполагается, что выполнены стандартные аксиомы нормы: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ и $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любых $x \in \mathbb{R}^d$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

В [6] установлено, что задача NP-трудна уже в случае пространства $\mathbb{R}^3$ с евклидовой нормой L_2. При $d = 2$ сложностной статус евклидовой задачи не установлен. Из положительных результатов отметим, что задача полиномиально разрешима в случае полиэдральной нормы с фиксированным числом фасет [4]. Примерами являются стандартные нормы L_1 и L_∞ в конечномерном пространстве. В случае произвольной нормы существует аппроксимационная схема, решающая задачу MAX TSP с относительной погрешностью ε за время $n^{O(\varepsilon^{-d})}$ [5]. Другая

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08–01–00516-а).

схема позволяет решать задачу с погрешностью $\varepsilon + O(\varepsilon^{-d}/n)$ за время $O(n^3 + \varepsilon^{-d})$ [3]. Оба алгоритма основаны на факте приближаемости произвольной нормы в конечномерном пространстве полиэдральной нормой.

А. И. Сердюков предложил асимптотически точный алгоритм решения задачи в конечномерном евклидовом пространстве [2]. Относительная погрешность алгоритма равна $\alpha_d\, n^{-2/(d+1)}$, где α_d — константа, зависящая только от d. В настоящей статье этот алгоритм обобщён на случай произвольного нормированного пространства. Относительная погрешность алгоритма оценивается величиной $(d+1)/\lfloor n^{1/(d+1)} \rfloor$. Эта оценка может быть сокращена вдвое путём использования более сложной схемы работы алгоритма.

1. Описание алгоритма

Алгоритм работает по схеме алгоритма А. И. Сердюкова [2] в упрощающей интерпретации Э. Х. Гимади [1]. Для применения данной схемы потребуется ввести понятие угла в произвольном нормированном пространстве.

Определение. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^d$. *Углом* между векторами x и y будем называть расстояние между вектором $x/\|x\|$ и ближайшим к нему вектором $\pm y/\|y\|$. Если норма хотя бы одного из векторов x, y равна нулю, то угол между ними считаем нулевым.

Заметим, что углы в нормированном пространстве принимают значения от 0 до 2. При этом если векторы параллельны ($x = \lambda y$), то угол между ними равен 0.

При описании алгоритма понадобится следующий геометрический факт, доказательство которого приведём ниже.

Лемма 1. *Среди любых N векторов ($N \geqslant 2$) в пространстве $\mathbb{R}^d$ найдутся два, угол между которыми не превосходит величины*

$$\alpha(d, N) = \frac{2d}{\lfloor (2N-1)^{1/d} \rfloor}.$$

Перейдём к описанию алгоритма.

Шаг 1. Находим паросочетание M максимального веса.

Шаг 2. Пусть $\ell \geqslant 2$ — параметр алгоритма, который уточнится при выводе оценки погрешности. Назовём $\ell - 2$ рёбер паросочетания M, имеющих минимальный вес, *лёгкими*, остальные рёбра паросочетания — *тяжёлыми*.

Шаг 3. Пусть $\alpha = \alpha(d, \ell)$. *α-Цепью* будем называть последовательность рёбер, в которой углы между соседними членами не превосходят α.

Заметим, что множество тяжёлых рёбер можно разбить на не более $\ell - 1$ α-цепей. Действительно, рассмотрим произвольное разбиение тяжёлых рёбер на α-цепи. Если количество α-цепей превосходит $\ell - 1$, то согласно лемме 1 найдутся две из них, начальные рёбра которых образуют угол, не больший α. Инвертировав первую из этих α-цепей и склеив с другой, уменьшим количество α-цепей на одну. Данную итерацию продолжим до тех пор, пока число α-цепей не уменьшится до $\ell - 1$.

Шаг 4. Перемежаем α-цепи, построенные на предыдущем шаге, лёгкими рёбрами (рис. 1.) Обозначим рёбра множества M в соответствии с полученным порядком: $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$, где $m = \lfloor n/2 \rfloor$.

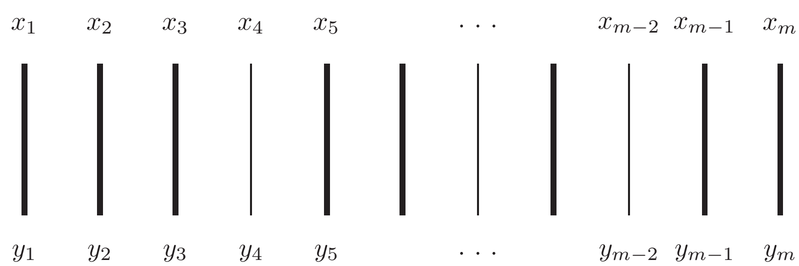

Рис. 1

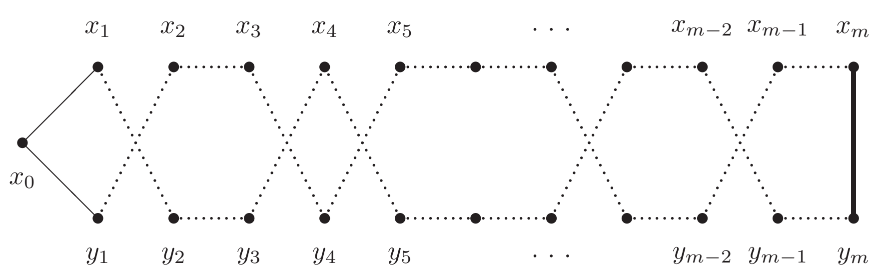

Рис. 2

Шаг 5. Строим гамильтонов цикл Γ в графе G. Включаем в него для каждого $j = 1, \ldots, m-1$ максимальную по суммарному весу пару рёбер: либо $(x_j, x_{j+1}) \cup (y_j, y_{j+1})$, либо $(x_j, y_{j+1}) \cup (y_j, x_{j+1})$ (рис. 2). В итоге получаем два непересекающихся простых пути. Соединяем их с одной стороны ребром (x_m, y_m), с другой — в случае чётного n ребром (x_1, y_1),

а в случае нечётного — парой рёбер $(x_1, x_0) \cup (x_0, y_1)$, где x_0 — вершина, не покрытая паросочетанием M.

Теорема. *Относительная погрешность алгоритма оценивается величиной* $(d+1)/\lfloor n^{1/(d+1)} \rfloor$ *при* $\ell = \lceil (n^{d/(d+1)} + 1)/2 \rceil$, $n \geqslant 2$.

2. Обоснование оценки погрешности

Сначала докажем лемму 1, используемую при описании алгоритма. Доказательство леммы основано на следующем геометрическом факте.

Лемма 2. *Для произвольного ограниченного множества векторов* V *существует линейный базис* $B \subseteq V$*, относительно которого все координаты векторов множества* V *лежат в интервале* $[-1, 1]$.

Доказательство. Пусть r — линейный ранг множества V. Для произвольного базиса B обозначим через V_B образ множества V в пространстве $\mathbb{R}^r$, соответствующий данному базису. В качестве B возьмём такой базис, что стандартный r-мерный объём выпуклой оболочки множества V_B минимален.

Предположим, что для некоторого вектора $v \in V$ одна из координат $v(i)$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, выходит за границы интервала $[-1, 1]$. Заменим орт e_i в базисе B вектором v. Линейная независимость нового r-векторника следует из того, что $v(i) \neq 0$. Покажем, что объём выпуклой оболочки множества V_B уменьшится при этом в $|v(i)|$ раз.

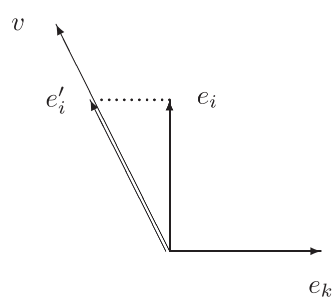

Рис. 3

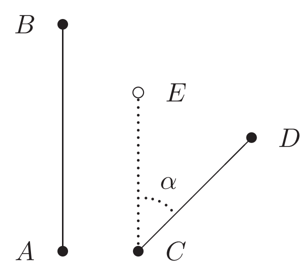

Рис. 4

Действительно, замену вектора e_i вектором v можно представить в виде суперпозиции двух замен: вектора e_i вектором $e'_i = v/v(i)$ и вектора e'_i вектором v (рис. 3). Первая замена соответствует преобразованию скоса пространства $\mathbb{R}^r$ параллельно основанию $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_r$. Вторая — преобразованию сжатия вдоль i-й координаты (а также, возможно, преобразованию отражения от основания в случае $v(i) < 0$). Скос и отражение не меняют объём r-мерной фигуры, а сжатие уменьшает его

в $|v(i)|$ раз. Таким образом получено противоречие с выбором базиса B. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть V — заданный набор векторов. Если V содержит векторы с нулевой нормой или параллельные векторы, то утверждение леммы очевидно. Поэтому считаем, что таких векторов нет. Поскольку при $\alpha(d,N) \geqslant 2$ утверждение также очевидно, можно считать, что $\alpha(d,N) < 2$. Без ограничения общности полагаем также, что все векторы имеют единичную норму.

Рассмотрим множество $\widetilde{V} = \{\pm v \mid v \in V\}$. Поскольку в исходном множестве V нет параллельных векторов, множество $\widetilde{V}$ состоит из $2N$ элементов. Согласно лемме 2 среди векторов данного множества можно выбрать базис B пространства $\mathbb{R}^r$ такой, что $\widetilde{V}_B \subset [-1,1]^r$, где r — линейный ранг множества V, $r \leqslant d$.

Рассмотрим r-мерную сетку с некоторым шагом h. Заметим, что куб $[-1,1]^r$ покрывается $\lceil 2/h \rceil^r$ ячейками данной сетки. Значит, если $2N \geqslant \lceil 2/h \rceil^r + 1$, то найдутся два вектора $u, v \in \widetilde{V}$, образы которых попадают в одну ячейку. Но согласно неравенству треугольника и тому факту, что векторы выбранного базиса имеют норму 1, расстояние между u и v не превосходит rh. Следовательно, взяв в качестве h величину $2/\lfloor (2N-1)^{1/r} \rfloor$, получим

$$\|u - v\| \leqslant \frac{2r}{\lfloor (2N-1)^{1/r} \rfloor} \leqslant \alpha(d,N).$$

Таким образом, $\|u - v\| < 2$, значит, векторы u и v соответствуют двум разным векторам исходного множества V. Угол между этими векторами в силу полученного соотношения не превосходит $\alpha(d,N)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 3. *Пусть AB и CD — интервалы в пространстве $\mathbb{R}^d$. Тогда*

$$\max(\|AC\| + \|BD\|, \|AD\| + \|BC\|) \geqslant \max(\|AB\|, \|CD\|).$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что

$$\|AB\| \geqslant \|CD\|.$$

Тогда согласно неравенству треугольника $\|AC\| + \|BC\| \geqslant \|AB\|$ и $\|AD\| + \|BD\| \geqslant \|AB\|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\max(\|AC\|+\|BD\|, \|AD\|+\|BC\|) &\geqslant (\|AC\|+\|BD\|+\|AD\|+\|BC\|)/2 \\ &\geqslant \|AB\| = \max(\|AB\|, \|CD\|).\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть AB и CD — интервалы в пространстве $\mathbb{R}^d$ и α — угол между ними. Тогда*

$$\max(\|AC\| + \|BD\|, \|AD\| + \|BC\|) \geqslant (\|AB\| + \|CD\|)\,(1 - \alpha/2).$$

Доказательство. Если один из интервалов AB, CD имеет нулевую длину, то утверждение леммы следует из леммы 3. Поэтому рассматриваем случай, когда нормы векторов ненулевые. Без ограничения общности считаем, что $\|AB\| \geqslant \|CD\|$ и что вектор $CD/\|CD\|$ ближе к вектору $AB/\|AB\|$, чем $DC/\|CD\|$.

Пусть E — точка в пространстве $\mathbb{R}^d$ такая, что интервал CE параллелен интервалу AB и имеет ту же длину, что и CD (рис. 4). Тогда $\|DE\| = \alpha\|CD\|$. Согласно неравенству треугольника сумма длин диагоналей трапеции не меньше суммы длин оснований:

$$\|AE\| + \|BC\| \geqslant \|AB\| + \|CE\|.$$

Отсюда с учётом соотношений $\|CE\| = \|CD\|$ и $\|AE\| \leqslant \|AD\| + \|DE\|$ получаем $\|AD\| + \|BC\| \geqslant \|AB\| + \|CD\| - \alpha\|CD\|$. Остаётся заметить, что поскольку интервал CD выбран за меньший из двух, то

$$\|CD\| \leqslant (\|AB\| + \|CD\|)/2.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Оценим сумму весов всех рёбер, выбранных на шаге 5. Если $1 \leqslant j \leqslant m-1$ и оба ребра (x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}) тяжёлые, то согласно описанию шагов 3 и 4 угол между ними не превосходит α. Следовательно, в силу леммы 4 пара рёбер, выбранных на шаге 5, имеет суммарный вес не меньше $(\|x_j\, y_j\| + \|x_{j+1}\, y_{j+1}\|)\,(1-\alpha/2)$. Если ровно одно из рёбер (x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}) тяжёлое, то согласно лемме 3 вес выбранных рёбер не меньше веса этого ребра.

Учтём выбранные на последнем шаге тяжёлые ребра (x_m, y_m) и (x_1, y_1). При нечётном n последнее заменено парой рёбер $(x_1, x_0) \cup (x_0, y_1)$, имеющей согласно неравенству треугольника не меньший суммарный вес.

Таким образом, сложив оценки весов всех выбранных рёбер, получим, что вес каждого тяжёлого ребра присутствует в полученной сумме дважды, иногда с множителем $(1-\alpha/2)$. Следовательно, вес построенного гамильтонова цикла не меньше величины $2w(H)\,(1-\alpha/2)$, где $w(H)$ — вес всех тяжёлых рёбер. Отсюда с учётом выбора разбиения на лёгкие и

тяжёлые ребра (шаг 2) получаем

$$w(\Gamma) \geqslant 2w(M)\left(1 - \frac{\ell - 2}{m}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

С другой стороны, веса оптимальных решения задачи MAX TSP и паросочетания связаны соотношением $w(\Gamma^*)\,2m/n \leqslant 2w(M)$. Следовательно,

$$\frac{w(\Gamma)}{w(\Gamma^*)} \geqslant \frac{2m}{n}\left(1 - \frac{\ell - 2}{m}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \geqslant \frac{2m}{n}\left(1 - \frac{\ell - 2}{m} - \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\geqslant 1 - \frac{1}{n} \; - \; 2\frac{\ell - 2}{n} \; - \; \frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, относительная погрешность алгоритма оценивается величиной

$$\varepsilon = \frac{2\ell - 3}{n} + \frac{d}{\lfloor (2\ell - 1)^{1/d} \rfloor}.$$

Подставив в качестве ℓ величину $\lceil \frac{n^{d/(d+1)}+1}{2} \rceil$, получим

$$\varepsilon \leqslant \frac{d+1}{\lfloor n^{1/(d+1)} \rfloor}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если в качестве схемы алгоритма использовать оригинальную схему А. И. Сердюкова [2], то погрешность алгоритма сократится приблизительно вдвое, поскольку построенный с её помощью гамильтонов цикл будет состоять из рёбер максимального паросочетания M и почти половины рёбер гамильтонова цикла Γ, полученного выше. Тем не менее сам алгоритм будет существенно сложнее, поэтому была выбрана более простая интерпретация Э. Х. Гимади [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х.** Новая версия асимптотически-точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера на максимум // Тр. XII Байкальской междунар. конф. Том 1. — Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2001. — С. 117–123.
2. **Сердюков А. И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжёра на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы). Вып. 27. — Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 1987. — С. 79-87.

3. **Сердюков А. И.** Задача коммивояжёра на максимум в конечномерных вещественных пространствах // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 27, № 1. — С. 50–56.
4. **Barvinok A. I., Johnson D. S., Woeginger G., Woodroofe R.** The maximum traveling salesman problem under polyhedral norms // Integer Programming and Combinatorial Optimization. — Berlin: Springer-Verl., 1998. — P. 195–201 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 1412).
5. **Barvinok A. I., Fekete S. P., Johnson D. S., Tamir A., Woeginger G., Woodroofe R.** The geometric maximum traveling salesman problem // J. ACM. — 2003. — Vol. 50, N 5. — P. 641–664.
6. **Fekete S. P.** Simplicity and hardness of the maximum traveling salesman problem under geometric distances // Proc. 10th Ann. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms. — New York: ACM, 1999. — P. 337–345.

Шенмайер Владимир Владимирович,
e-mail: shenmaier@mail.ru

Статья поступила
28 декабря 2009 г.

Переработанный вариант —
6 марта 2010 г.