ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2010. Том 17, № 5. С. 3–14

УДК 519.725

СЕРИЯ ДВУМЕРНЫХ СЛОВ С МАКСИМАЛЬНОЙ ОКОННОЙ СЛОЖНОСТЬЮ $2k$ *)

Ц. Ч.-Д. Батуева

Аннотация. Максимальная оконная сложность $p^*(k)$ — это одна из подсчитывающих функций, сопоставляемых бесконечному слову. Эта функция рассматривается над двумерными словами. Построена новая серия бесконечных двумерных слов, для которых достигается минимальный рост данной функции для слов, не являющихся периодическими по всем направлениям: $p^*(k) = 2k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: сложность, максимальная оконная сложность, слово Тёплица, двумерное слово.

Введение

Комбинаторная сложность бесконечного слова $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ определяется [8, 18] как число его подслов длины $k \in \mathbb{N}$:

$$p_\alpha(k) = \#\{\alpha_i\alpha_{i+1}\ldots\alpha_{i+(k-1)};\quad i \in \mathbb{N}\}.$$

Эта функция для каждого бесконечного слова является неубывающей и ограничена сверху мощностью алфавита в степени k. Ясно, что сложность всякого периодического слова, начиная с некоторого момента, становится равной константе. Более того, известно, что если слово α непериодическое, то $p_\alpha(k) \geqslant k+1$ для всех k. Слова такие, что $p_\alpha(k) \equiv k+1$, называются *словами Штурма* [18, 19] и хорошо исследованы [17]. Обзор по комбинаторной сложности может быть найден в книгах [3, 7].

Существуют также различные вариации функции комбинаторной сложности, основанные на подсчёте не подслов бесконечного слова, а некоторых других объектов. Они включают палиндромную сложность [2], модифицированную сложность Накасимы и других [20], шаблонную сложность, введённую Рестиво и Салеми [21], арифметическую сложность,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке научных исследований молодых докторов наук МД–2587.2010.1.

введённую С. В. Августиновичем, Д. Г. Фон-Дер-Флаассом и А. Э. Фрид в [4], и др.

Над двумерными бесконечными словами комбинаторная сложность определяется как число прямоугольных подслов длины k и высоты l. Следующая гипотеза о связи комбинаторной сложности и периодичности известна как гипотеза Нива: если функция комбинаторной сложности $p_w(k,l)$ двумерного слова w удовлетворяет условию $p_w(k,l) \leqslant kl$ для некоторой пары целых чисел (k,l), то w имеет по крайней мере один вектор периодичности. В [9, 11] доказаны более слабые формы этой гипотезы. Рассматривались и двумерные аналоги слов Штурма со сложностью, равной $kl+1$ [5].

Максимальная оконная сложность, введённая Камаэ и Замбони [14], также является вариацией классической функции комбинаторной сложности. Она определяется как количество слов длины k, встречающихся в слове α определённым способом, который формально определён в разд. 1. Известно, что максимальная оконная сложность одномерного слова α не превосходит $2k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда слово периодично. Эта функция исследовалась и на двумерных словах [12]. Двумерное слово называется *сильно периодическим*, если оно периодично по двум неколлинеарным направлениям (из чего следует периодичность по любому направлению). Известно, что слово сильно периодично тогда и только тогда, когда его максимальная оконная сложность не превосходит $2k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и слово является строго 2-рекуррентным [12]. Таким образом, $2k$ — это минимум максимальной оконной сложности для не сильно периодичных и строго 2-рекуррентных слов. В некотором смысле можно рассуждать об аналоге слов Штурма для максимальной оконной сложности. В [13] приведён пример слова с максимальной оконной сложностью, равной $2k$. Цель нашей работы — построение бесконечной двупараметрической серии двумерных слов, имеющих такую же максимальную оконную сложность. Это подкласс класса двумерных слов Тёплица, состоящий из неподвижных точек морфизмов определённого вида. Заметим, что двумерные слова этой серии не являются словами Штурма.

Слова Тёплица, их комбинаторная сложность и периодичность ранее уже исследовались, например, в работах [1, 6, 16].

1. Определения и обозначения

Рассматриваются слова над двубуквенным алфавитом $\Sigma = \{0,1\}$. *Прямоугольным словом* β с шириной n и высотой r называется функция $\{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,r\} \to \Sigma$.

Бесконечным двумерным словом α называется функция $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\Sigma$.

Через Σ^{**} обозначим множество всех прямоугольных и бесконечных двумерных слов.

Операция *инверсии* заменяет в слове β символы 1 на 0 и 0 на 1. Полученное слово обозначается через $\mathrm{inv}(\beta)$.

Шаффл $v Ш u$ одномерного слова $v = v_1v_2\dots v_n$ одномерным словом $u = u_1u_2\dots u_r$ означает вставку слова u между каждыми двумя соседними символами слова v, т.е. $v Ш u = v_1uv_2u\dots uv_n$.

Пусть α — двумерное слово. Будем записывать его следующим образом:

$$\begin{array}{cccc} & & \dots & \\ \alpha(3,1) & \alpha(3,2) & \alpha(3,3) & \dots \\ \alpha(2,1) & \alpha(2,2) & \alpha(2,3) & \dots \\ \alpha(1,1) & \alpha(1,2) & \alpha(1,3) & \dots \end{array}$$

Конечное множество $\tau\subset\mathbb{Z}^2$ мощности k, содержащее пару $(0,0)$, называется *k-окном.* Функцию $\tau\to\Sigma$ будем называть *τ-словом* и обозначать через $(\beta(x,y))_{(x,y)\in\tau}$, где $\beta(x,y)\in\Sigma$ — значение функции при $(x,y)\in\tau$. Множество всех τ-слов над алфавитом Σ обозначается через Σ^τ.

Рассмотрим пару $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ такую, что $(x,y)+\tau\subset\mathbb{N}^2$. Будем обозначать τ-слово $\alpha[(x,y)+\tau] = (\alpha(x+x',y+y'))_{(x',y')\in\tau}$ через $\alpha[(x,y)+\tau]$.

Некоторое τ-слово b называется *τ-подсловом* слова α, если существует такая пара (x,y), что $\alpha[(x,y)+\tau]=b$.

Будем обозначать через $F_\alpha(\tau)$ множество всех τ-подслов слова α:

$$F_\alpha(\tau) = \{\alpha[(x,y)+\tau] \mid (x,y)\in\mathbb{N}^2, (x,y)+\tau\subset\mathbb{N}^2\}.$$

Максимальной оконной сложностью называется функция

$$p^*_\alpha(k) = \sup\{\sharp F_\alpha(\tau) \mid \tau \text{ — } k\text{-окно}\},$$

где $k\in\mathbb{N}$.

Отображение $\varphi:\Sigma^{**}\to\Sigma^{**}$ называется *морфизмом*, если для него выполнено следующее свойство:

$$\varphi\begin{pmatrix} \beta(s,1) & \dots & \beta(s,n) \\ \dots & & \\ \beta(1,1) & \dots & \beta(1,n) \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \varphi(\beta(s,1)) & \dots & \varphi(\beta(s,n)) \\ \dots & & \\ \varphi(\beta(1,1)) & \dots & \varphi(\beta(1,n)) \end{array}$$

для любого конечного прямоугольного слова β. Очевидно, что морфизм φ можно задать значениями $\varphi(a)\in\Sigma^{**}$ для $a\in\Sigma$ (образы символов обязаны иметь одинаковый размер). В дальнейшем m будет обозначать ширину, а l — высоту образа символа.

Неподвижной точкой морфизма φ называется двумерное бесконечное слово α, удовлетворяющее равенству $\varphi(\alpha) = \alpha$.

В данной статье исследуются неподвижные точки $\alpha_{(m,l)}$ морфизмов следующего вида:

$$\varphi_{(m,l)}:\ 0 \longrightarrow \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix},\ 1 \longrightarrow \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{matrix},$$

где m — ширина, а l — высота образа символа. Индексы будут опускаться, если они следуют из контекста.

Неподвижные точки таких морфизмов могут быть построены методом Тёплица, описанным ниже. Поэтому морфизмы такого вида мы будем называть *морфизмами Тёплица*.

В дальнейшем под *позицией* понимаем пару неотрицательных целых чисел — координат некоторого символа двумерного слова.

Позиция $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ называется *n-ключевой*, если m^n делит i и l^n делит j, но m^{n+1} не делит i или l^{n+1} не делит j. Символ $\alpha(i, j)$ в этом случае также называется *n-ключевым*. Позиция называется *ключевой*, если она является n-ключевой для некоторого $n > 0$.

Пример. Рассмотрим два способа построения неподвижных точек на примере морфизма $\varphi_{(2,2)}$.

Первый способ основан на последовательном вычислении неподвижной точки из 0: $0 \to \varphi(0) \to \varphi(\varphi(0)) \to \ldots$, т. е.

$$0 \ \to \ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \ \to \ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \ \to \ \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \ \to \ldots .$$

Свойство 1. *Символы, находящиеся в ключевых позициях каждого слова $\varphi^{n+1}(0)$, образуют слово, являющееся инверсией к слову $\varphi^n(0)$. Следовательно, $\varphi^n(0)(ms, lr) = \mathrm{inv}(\varphi^n(0)(s, r))$ для $s, r \in \mathbb{N}$. Во всех не ключевых позициях слова $\varphi^n(0)$ находится символ 0.*

Второй способ построения неподвижной точки морфизма $\varphi_{(m,l)}$ — это конструкция Тёплица, основанная на свойстве 1. Сначала заполняются

нулями все неключевые позиции. Затем все n-ключевые позиции, где n нечётно, заполняются единицами, а все n-ключевые позиции, где n чётно, заполняются нулями:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \dots & & & & & \\
0 & \diamond & 0 & \diamond & 0 & \diamond & 0 & \diamond & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & \diamond & 0 & \diamond & 0 & \diamond & 0 & \diamond & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & \diamond & 0 & \diamond & 0 & \diamond & 0 & \diamond & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \dots & & & & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{array}
$$

В результате, как нетрудно видеть, получится неподвижная точка $\alpha_{(m,l)}$ морфизма $\varphi_{(m,l)}$.

2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства главной теоремы нам потребуются некоторые результаты работ [12–15].

Одномерное бесконечное слово w называется *периодическим*, если оно представимо в виде $w = vuuu\cdots = vu^{\infty}$, где v и u — конечные слова, причём v может быть пустым.

Лемма 1 [14]. *Одномерное бесконечное слово w непериодично тогда и только тогда, когда его максимальная оконная сложность удовлетворяет неравенству $p_w^*(k) \geqslant 2k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Окно τ' называется *расширением* окна τ, если $\tau' \supset \tau$ и $\#\tau' = \#\tau + 1$.

Следующая лемма доказана для одномерных слов в [15] и сформулирована без доказательства для двумерных слов в [13]. Для полноты рассуждений приведём её доказательство.

Лемма 2. *Пусть α — двумерное бесконечное слово такое, что $p_\alpha^*(2) = 4$. Если для любых 2-окна τ и его расширения τ' выполняется неравенство $\sharp F_\alpha(\tau') \leqslant \sharp F_\alpha(\tau) + 2$, то $p_\alpha^*(k) \leqslant 2k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть слово α удовлетворяет условиям леммы.

Допустим, что существует $k \geqslant 3$, для которого

$$p_\alpha^*(k+1) > 2(k+1),$$

причём k выбрано как минимальное число с этим свойством. Таким образом, $p_\alpha^*(k+1) \geqslant p_\alpha^*(k) + 3$.

Рассмотрим $(k+1)$-окно τ', на котором достигается максимум сложности, т. е. значение функции $p^*_\alpha(k+1)$. Возьмём некоторое k-окно τ, расширением которого является τ'. Тогда

$$\#F_\alpha(\tau)+3 \leqslant \#F_\alpha(\tau'), \tag{1}$$

поскольку

$$\#F_\alpha(\tau)+3 \leqslant p^*_\alpha(k)+3 \leqslant p^*_\alpha(k+1) = \#F_\alpha(\tau').$$

Так как алфавит слова α двусимвольный, из неравенства (1) следует существование как минимум трёх различных τ-слов, которые имеют два расширения в $F_\alpha(\tau')$. Обозначим их через $u^1, u^2, u^3 \in F_\alpha(\tau)$.

$$\begin{array}{cccc} & & \bigcirc & \\ & \bigcirc & & \bigcirc \\ \tau: & & \ldots & \\ & & & \bigcirc \\ & & \bigcirc & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & \bigcirc & \\ & \bigcirc & & \bigcirc \\ \tau': & & \ldots & \\ & (x',y') & & \bigcirc \\ & \triangle & \bigcirc & \end{array}$$

Рассмотрим произвольную позицию $(x,y) \in \tau$ и заметим, что в некоторых двух из трёх τ-слов u^1, u^2, u^3 в позиции (x,y) стоят разные символы. Действительно, если бы присутствовал только один символ, то, удалив позицию (x,y) в каждом из трёх τ-слов, мы получили бы три различных подслова, которые расширяются двумя способами, что противоречило бы минимальности k, поскольку k-окно $\tau' \backslash (x,y)$ удовлетворяло бы неравенству (1).

$$\begin{array}{cccc} & & 0 & (x,y) \\ & 1 & & 0 \\ u^1: & & \ldots & \\ & & & 0 \\ & & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 1 & (x,y) \\ & 1 & & 0 \\ u^2: & & \ldots & \\ & & & 1 \\ & & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & & 0 & (x,y) \\ & 0 & & 1 \\ u^3: & & \ldots & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{array}$$

Без ограничения общности считаем, что $u^1_{(x,y)}=0, u^2_{(x,y)}=0, u^3_{(x,y)}=1$ и u^4, u^5, u^6 — это подслова мощности $k-1$, полученные в результате удаления позиции (x,y) из соответствующих τ-слов. Так как $u^1 \neq u^2$, видим, что $u^4 \neq u^5$, т. е. существует такая позиция $(s,r) \in \tau \backslash (x,y)$, что $u^4_{(s,r)} \neq u^5_{(s,r)}$. Из этого следует, что 3-окно $\eta' = \{(0,0),(x,y)-(s,r),(x',y')-(s,r)\}$ удовлетворяет неравенству (1), что противоречит утверждению леммы.

Таким образом, $p^*_\alpha(k+1) \leqslant p^*_\alpha(k)+2$ для любого $k \geqslant 2$, откуда $p^*_\alpha \leqslant 2k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим одномерное слово w_r, которое является неподвижной точкой морфизма $\psi_r : 0 \to 0 \dots 01;\ 1 \to 0 \dots 00$, где образы символов имеют длину r. Следующая лемма о его максимальной оконной сложности доказана в [15].

Лемма 3. *Для одномерного слова w_r максимальная оконная сложность $p^*_{w_r}(k)$ равна $2k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

3. Главная теорема

Теорема. *Для любых натуральных чисел $m, l \geqslant 2$ максимальная оконная сложность слова $\alpha_{(m,l)}$ равна $2k$ для всех $k \geqslant 1$.*

Доказательство. Доказательство состоит их двух частей: нижней оценки $p^*_\alpha(k) \geqslant 2k$ и верхней оценки $p^*_\alpha(k) \leqslant 2k$.

Нижняя оценка $p^*_\alpha(k) \geqslant 2k$. Покажем, что все префиксы одномерного слова w_m встречаются и в слове α. Тогда максимальная оконная сложность слова α будет не меньше максимальной оконной сложности слова w_m.

Рассмотрим k-окно вида

$$\{(0,0), (0,1), (0,2), \dots, (0, k-1)\}.$$

Обозначим через $\beta(j)$ последовательность символов, записанных в j-строке слова α. Заметим, что $\beta(m^i)$ связана с $\beta(m^{i-1})$ следующим образом:

$$\beta(m^i) = 0^{l-1}[\mathrm{inv}(\beta(m^{i-1}))Ш0^{l-1}].$$

Например, строки слова $\alpha_{(3,l)}$ представляют собой периодические слова со следующими периодами:

1 строка: 0;

l строка: 00**1**;

l^2 строка: 00**1**00**1**00**0**;

l^3 строка: 00**1**00**1**00**0**00**1**00**1**00**0**00**1**00**1**00**1**;

$\dots$

Заметим, что все эти слова-периоды являются префиксами слова w_m, максимальная оконная сложность которого равна $2k$ по лемме 3. Для каждого k существует конечный префикс $\gamma(k)$ такой, что

$$p^*_{\gamma(k)}(k) = p^*_{w_m}(k),$$

поэтому слово $\alpha_{(m,l)}$ имеет максимальную оконную сложность также не меньше $2k$. Более того, значение $2k$ для любого k может быть достигнуто

уже на k-окне вида $\{(0,0),(0,y_1),(0,y_2),\ldots,(0,y_{k-1})\}$, т. е. по горизонтали.

Верхняя оценка $p^*_\alpha(k) \leqslant 2k$. Очевидно, что $p^*_\alpha(2) = 4$, так как $\#F_\alpha(\tau) = 4$ для окна $\tau = \{(0,0),(m,l)\}$. По лемме 2 для доказательства верхней оценки для любого 2-окна τ и любого его расширения τ' достаточно проверить неравенство

$$\sharp F_\alpha(\tau') \leqslant \sharp F_\alpha(\tau) + 2.$$

Для этого надо посчитать $\sharp F_\alpha$ для всех 2- и 3-окон.

Возьмём произвольное 2-окно $\tau = \{\tau_0, \tau_1\}$, где $\tau_0 = (0,0)$, и произвольное его расширение $\tau' = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2\}$.

Для доказательства неравенства рассмотрим три случая в зависимости от делимости первой и второй координаты точки τ_1 на m и l соответственно.

Случай 1: $\tau_1 \in (E_1 \times E_2)$.

Случай 2: $\tau_1 \in (E_1 \times O_2)$.

Случай 3: $\tau_1 \in (O_1 \times O_2)$.

Здесь E_1 — множество чисел, делящихся на m, а O_1 — множество всех остальных чисел. Аналогично, E_2 — множество чисел, делящихся на l, а O_2 — множество всех остальных чисел. Случай $\tau_1 \in (O_1 \times E_2)$ аналогичен случаю 2 с точностью до перестановки переменных, поэтому его опускаем.

Будем обозначать символ в позиции τ_i некоторого τ-слова через a_i, $a_i \in \Sigma$, а все τ-слово — через $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Лемма 4.
(i) $F_\alpha(\tau) = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ *в случае* 1;
(ii) $F_\alpha(\tau) = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ *в случае* 2;
(iii) $F_\alpha(\tau) = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ *в случае* 3.

Доказательство. (i) Пусть $\tau_1 \in (E_1 \times E_2)$. Возьмём неключевую позицию (x,y). Тогда $(x,y)+\tau_1$ будет тоже неключевой позицией. Так как в неключевых позициях слова α стоят нули, то $\alpha[(x,y)+\tau] = (0,0)$.

Представим пару τ_1 в виде $(m^r t, l^r d)$, где $t, d \in \mathbb{N}$, а r — максимальное натуральное число такое, что τ_1^1 и τ_1^2 делятся на m^r и l^r соответственно. Возьмём позицию $(x,y) = (m^s, l^s)$, где $s \in 2\mathbb{N}+1$, $t < m^{s-r}$ и $d < l^{s-r}$. По свойству 1 в позиции (x,y) стоит единица. В то же время в позиции $(x,y)+\tau_1 = (m^s + m^r t, l^s + l^r d)$ стоит тот же символ, что и в позиции $(m^{s-r}+t, l^{s-r}+d)$, если r чётно, и стоит его инверсия, если r нечётно. Так как позиция $(m^{s-r}+t, l^{s-r}+d)$ неключевая, в ней стоит

нуль. Аналогично, в позиции $(x, y) - \tau_1$ стоит тот же символ, что и в позиции $(m^{s-r} - t, l^{s-r} - d)$ (т. е. нуль), если r чётно, и его инверсия (т. е. единица), если r нечётно.

Пусть r чётно. Тогда в позиции $(x, y) + \tau_1$ стоит нуль и $\alpha[(x, y) + \tau] = (1, 0)$. Точно так же $\alpha[((x, y) - \tau_1) + \tau] = \alpha\big[\big\{\big(x - \tau_1^1, y - \tau_1^2\big), (x, y)\big\}\big] = (0, 1)$. Наконец, $\alpha[(m, l) + \tau] = (1, 1)$, так как в позиции $(m, l) + \tau_1$ стоит инверсия к символу в позиции $(1 + m^{r-1}t, 1 + l^{r-1}d)$, а она неключевая.

Пусть теперь r нечётно. Тогда в позиции $(x, y) + \tau_1$ стоит единица и, следовательно, $\alpha[(x, y) + \tau] = (1, 1)$. Возьмём теперь позицию $(x, y) = (m^s, l^s)$, где $s \in 2\mathbb{N}$, $t < m^{s-r}$ и $d < l^{s-r}$. По свойству 1 в позиции (x, y) стоит нуль. Следовательно, рассуждениями, аналогичными предыдущему случаю, получаем

$$\alpha[(x, y) + \tau] = (0, 1)$$

и

$$\alpha[((x, y) - \tau_1) + \tau] = \alpha\big[\big\{\big(x - \tau_1^1, y - \tau_1^2\big), (x, y)\big\}\big] = (1, 0).$$

(ii) Пусть $\tau_1 \in (E_1 \times O_2)$. Тогда

$$\alpha[(1, 1) + \tau] = (0, 0) \text{ и } \alpha[(m, l) + \tau] = (1, 0),$$

так как позиции $(1, 1)$, $(1, 1) + \tau_1$, $(m, l) + \tau_1$ неключевые и, следовательно, в них стоят нули. В позиции (m, l) стоит единица по определению морфизма.

Возьмём позицию $(x, y) = (m^r, l^r)$, где $r \in 2\mathbb{N} + 1$, такую, что $\tau_1^1 < x$, а $\tau_1^2 < y$. Тогда $\big(x - \tau_1^1, y - \tau_1^2\big)$ — неключевая позиция,

$$\alpha\big[\big\{\big(x - \tau_1^1, y - \tau_1^2\big), (x, y)\big\}\big] = (0, 1).$$

Наконец, значение $\alpha[(x, y) + \tau] = (1, 1)$ в данном случае встретиться не может, так как все единицы стоят на ключевых позициях.

(iii) Пусть $\tau_1 \in (O_1 \times O_2)$. Для всякого $(x, y) \in (E_1 \times O_2)$ имеем $\alpha[(x, y) + \tau] = (0, 0)$. Кроме того, $\alpha[(m, l) + \tau] = (1, 0)$.

Возьмём теперь $(x, y) = (m^r, l^r)$, где $r \in 2\mathbb{N} + 1$, и при этом $\tau_1^1 < x$, $\tau_1^2 < y$. Тогда верно, что

$$\alpha[((x, y) - \tau_1) + \tau] = \alpha\big[\big\{\big(x - \tau_1^1, y - \tau_1^2\big), (x, y)\big\}\big] = (0, 1).$$

Значение $\alpha[(x, y) + \tau] = (1, 1)$ в данном случае, как и в предыдущем, встретиться не может, так как все единицы стоят на ключевых позициях. Лемма 4 доказана.

Теперь рассмотрим все 3-окна и разделим их на подслучаи в зависимости от кратности элементов τ_2.

Случай 1-1: $\tau_1 \in (E_1 \times E_2)$, $\tau_2 \in (E_1 \times E_2)$.
Случай 1-2: $\tau_1 \in (E_1 \times E_2)$, $\tau_2 \in (E_1 \times O_2)$.
Случай 1-3: $\tau_1 \in (E_1 \times E_2)$, $\tau_2 \in (O_1 \times O_2)$.
Случай 2-1: $\tau_1 \in (E_1 \times O_2)$, $\tau_2 \in (E_1 \times E_2)$.
Случай 2-2: $\tau_1 \in (E_1 \times O_2)$, $\tau_2 \in (E_1 \times O_2)$.
Случай 2-3: $\tau_1 \in (E_1 \times O_2)$, $\tau_2 \in (O_1 \times O_2)$.
Случай 3-1: $\tau_1 \in (O_1 \times O_2)$, $\tau_2 \in (E_1 \times E_2)$.
Случай 3-2: $\tau_1 \in (O_1 \times O_2)$, $\tau_2 \in (E_1 \times O_2)$.
Случай 3-3: $\tau_1 \in (O_1 \times O_2)$, $\tau_2 \in (O_1 \times O_2)$.

Лемма 5.
(i) $F_\alpha(\tau') \subseteq \{0,1\}^3 \backslash \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ *в случае* 1-2;
(ii) $F_\alpha(\tau') \subseteq \{0,1\}^3 \backslash \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ *в случае* 1-3;
(iii) $F_\alpha(\tau') \subseteq \{0,1\}^3 \backslash \{(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *в случае* 2-1;
(iv) $F_\alpha(\tau') \subseteq \{0,1\}^3 \backslash \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *в случае* 2-2;
(v) $F_\alpha(\tau') \subseteq \{0,1\}^3 \backslash \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *в случае* 2-3;
(vi) $F_\alpha(\tau') \subseteq \{0,1\}^3 \backslash \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ *в случае* 3-1;
(vii) $F_\alpha(\tau') \subseteq \{0,1\}^3 \backslash \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *в случае* 3-2;
(viii) $F_\alpha(\tau') \subseteq \{0,1\}^3 \backslash \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *в случае* 3-3.

Доказательство. Пусть $(x,y) \in \mathbb{N}^2$. Если τ_1 — неключевая позиция, то τ'-подслова слова α не могут начинаться на τ-слово (1,1). Следовательно, во всех подслучаях случаев 2 и 3 из множества возможных τ'-слов исключаются $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$.

Если τ_2 – неключевая позиция, то τ'-подслова слова α не могут одновременно начинаться и заканчиваться единицей. Следовательно, в случаях 1-2, 1-3, 2-2, 2-3, 3-2 и 3-3 исключаются τ'-слова $(1,0,1)$ и $(1,1,1)$.

Наконец, если $\tau_1 - \tau_2$ — неключевая позиция, то τ'-подслова слова α не могут заканчиваться на (1,1). Следовательно, в случаях 1-2, 1-3, 2-1, 2-3, 3-1 и 3-2 исключаются τ'-слова $(1,1,1)$ и $(0,1,1)$. Лемма 5 доказана.

Следствие 1. *Во всех подслучаях, кроме случая* 1-1, *выполняются следующие неравенства*:

$$\sharp F_\alpha(\tau') \leqslant \sharp F_\alpha(\tau) + 2, \tag{2}$$

$$\sharp(F_\alpha(\tau') \backslash \{(0,0,0),(1,1,1)\}) \leqslant 4. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь случай 1-1, когда τ_1 и τ_2 — ключевые позиции. Если (x,y) — неключевая позиция, то $\alpha[(x,y)+\tau'] = (0,0,0)$.

Рассмотрим случай, когда (x, y) — ключевая позиция. Для множества всех τ'-подслов слова α справедливо следующее равенство:

$$F_\alpha(\tau') = \{\alpha[(x, y) + \tau'] \mid (x, y) \in \ (e_1 \times e_2)\} \cup \{(0, 0, 0)\}. \tag{4}$$

Введём обозначение:

$$\tau'/(a, b) = \big\{(0, 0), \big(\tau_1^1/a, \tau_1^2/b\big), \big(\tau_2^1/a, \tau_2^2/b\big)\big\},$$

где $\big(\tau_1^1, \tau_1^2\big) = \tau_1$ и $\big(\tau_2^1, \tau_2^2\big) = \tau_2$.

Пусть (x, y) — ключевая позиция. Тогда по свойству 1 справедливо равенство

$$\alpha[(x, y) + \tau'] = \operatorname{inv}(\alpha[(x/m, y/l) + \tau'/(m, l)]).$$

Пусть r — первое число, для которого окно $\tau'/(m^r, l^r)$ не попадает в случай 1-1. Заметим, что число r и окно $\tau'/(m^r, l^r)$ определены корректно. Подставив предыдущее равенство r раз в равенство (4), получаем, что

$$F_\alpha(\tau') = \operatorname{inv}^r(F_\alpha(\tau'/(m^r, l^r))) \cup \{(0, 0, 0)\}.$$

Применив к $F_\alpha(\tau'/(m^r, l^r))$ неравенство (3), видим, что $\sharp F_\alpha(\tau') \leqslant 6$. Таким образом, неравенство (2) выполняется и в этом случае.

По лемме 2 получаем, что $p^*_\alpha \leqslant 2k$. Теорема доказана.

Выражаю большую благодарность Анне Эдуардовне Фрид за ценные советы при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Батуева Ц. Ч.-Д.** Арифметическое замыкание двумерных слов Тёплица // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 2. — С. 3–15.
2. **Allouche J.-P., Baake M., Cassaigne J., Damanik D.** Palindrom complexity // Theor. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 292. – P. 9–31.
3. **Allouche J.-P., Shallit J.** Automatic sequences: theory, applications, generalizations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. — 592 p.
4. **Avgustinovich S. V., Fon-Der-Flaass D. G., Frid A. E.** Arithmetical complexity of infinite words // Words, languages & combinatorics. III. 2003. P. 51–62. Singapore. World Sci. Publ. ICWLC 2000, Kyoto, Japan, 2000. March. P. 14–18.
5. **Cassaigne J.** Double sequences with complexity $mn + 1$ // J. Autom. Lang. Comb. IV. — 1999. — Vol. 3. – P. 153–170.
6. **Cassaigne J., Karhumäki J.** Toeplitz words, generalized periodicity and periodically iterated morphisms // Eur. J. Comb. — 1997. — Vol. 18. — P. 497–510.

7. **Choffrut C., Karhumäki J.** Combinatorics of words // Handbook of formal languages. — 1997. — Vol. 1. — P. 329–438.
8. **Ehrenfeucht A., Rozenberg G.** A limit theorem for sets of subwords in deterministic T0L languages // Inf. Process. Lett. — 1973. — Vol. 2–3. — P. 70–73.
9. **Epifanio C., Koskas M., Mignosi F.** On a conjecture on bidimensional words // Theor. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 299, N 1–3. — P. 123–150.
10. **Frid A. E.** Arithmetical complexity of symmetric DOL words // Theor. Comput. Sci. — 2003. — Vol. 306. — P. 535–542.
11. **Quas A., Zamboni L.** Periodicity and local complexity // Theor. Comput. Sci. — 2004. — Vol. 319, N 1–3. — P. 229–240.
12. **Kamae T., Rao H., Xue Y.-M.** Maximal pattern complexity for 2-dimensional words // Theor. Comput. Sci. — 2002. — Vol. 359. — P. 15–27.
13. **Kamae T., Xue Y.-M.** Two dimensional word with $2k$ maximal pattern complexity // Osaka J. Math. — 2004. — Vol. 41. — P. 257–265.
14. **Kamae T., Zamboni L.** Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words // Ergodic Theory Dyn. Syst. — 2002. — Vol. 22. — P. 1191–1199.
15. **Kamae T., Zamboni L.** Maximal pattern complexity for discrete systems // Ergodic Theory Dyn. Syst. — 2002. — Vol. 22–4. — P. 1201–1214.
16. **Koskas M.** Complexités de suites de Toeplitz // Discrete Math. — 1998. — Vol. 183. — P. 161–183.
17. **Lothaire M.** Algebraic combinatorics on words // Encycl. Math. Appl. — 2002. — Vol. 90. — P. 528.
18. **Morse M., Hedlund G. A.** Symbolic dynamics // Amer. J. Math. — 1938. — Vol. 60. — P. 815—866.
19. **Morse M., Hedlund G. A.** Symbolic dynamics. II // Amer. J. Math. — 1940. — Vol. 62. — P. 1—42.
20. **Nakashima I., Tamura J.-I., Yasutomi S.-I.** *-Sturmian words and complexity // J. Theór. Nombres Bord. — 2003. — Vol. 15. — P. 767–804.
21. **Restivo A., Salemi S.** Binary patterns in infinite binary words // Formal and natural computing. — Berlin: Springer-Verl., 2002. — P. 107–118 (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2300).

Батуева Цындыма Чимит-Доржиевна,
e-mail: cendema@ngs.ru

Статья поступила
9 февраля 2009 г.
Переработанный вариант —
23 июня 2010 г.