ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2010. Том 17, № 5. С. 22–36

УДК 519.17

ПРЕДПИСАННАЯ 2-ДИСТАНЦИОННАЯ $(\Delta + 1)$-РАСКРАСКА ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ НЕ МЕНЕЕ 7 *)

А. О. Иванова

Аннотация. Тривиальная нижняя граница для 2-дистанционного хроматического числа $\chi_2(G)$ любого графа G с максимальной степенью Δ равна $\Delta + 1$. Известны примеры графов со сколь угодно большой Δ и обхватом $g \leqslant 6$, для которых $\chi_2(G) \geqslant \Delta + 2$. В работе улучшены известные ограничения на Δ и g, при которых плоский граф G имеет $\chi_2(G) = \Delta + 1$.

Ключевые слова: плоский граф, 2-дистанционная раскраска, предписанная раскраска.

Введение

Одной из наиболее естественных моделей в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования является (p, q)-раскраска. Вершины плоского графа (источники) должны быть раскрашены (получить частоты) так, чтобы цвета (целые числа) любых двух вершин, находящихся друг от друга на расстоянии 1, отличались не менее чем на p, а вершин на расстоянии 2 — не менее чем на q. На практике $p \geqslant q$, поскольку с увеличением расстояния интерференция волн ослабевает. Иногда множество допустимых частот может меняться от одного источника к другому, что соответствует предписанной (p, q)-раскраске.

Случай $p = q = 1$ в теории графов известен как задача 2-дистанционной раскраски плоских графов, как в обычном, так и предписанном её вариантах. Часто результаты по 2-дистанционной раскраске переносятся на произвольную (p, q)-раскраску без большого труда (см., например, [2, 8, 9]). В [8, 9] для плоских графов достаточно большого обхвата получены верхняя и нижняя оценки (p, q)-хроматического числа, отличающиеся друг от друга на аддитивную константу, которая не зависит от главного параметра p. В нашей статье рассматривается только случай $p = q = 1$.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08–01–00673 и 09–01–00244), а также гранта президента России для молодых ученых МК–2302.2008.1.

Под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Через $V(G)$, $E(G)$, $\Delta(G)$ и $g(G)$ обозначим множества вершин, рёбер, максимальную степень и обхват графа G соответственно (будем опускать аргумент всякий раз, когда граф ясен из контекста).

Раскраска $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ графа G называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины на расстоянии не более 2 друг от друга получают разные цвета. Минимальное число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется его 2-*дистанционным хроматическим числом* и обозначается через $\chi_2(G)$.

Если каждая вершина v графа G имеет множество $L(v)$ допустимых цветов, где $|L(v)| \geqslant k$, то будем говорить, что $V(G)$ имеет *предписание L мощности k*. Если любое предписание L мощности k допускает 2-дистанционную раскраску φ такую, что $\varphi(v) \in L(v)$ для всех $v \in V(G)$, то будем говорить, что граф G *предписанно 2-дистанционно k-раскрашиваем*. Наименьшее k, при котором G предписанно 2-дистанционно k-раскрашиваем, есть *предписанное 2-дистанционное хроматическое число графа G*, обозначаемое через $\chi_2^l(G)$.

В 1977 г. Вегнер [24] (см. также книгу Йенсена и Тофта [21]) высказал следующую гипотезу.

Гипотеза. *Для любого плоского графа справедливы следующие утверждения*:

(i) $\chi_2 \leqslant 7$, *если* $\Delta = 3$;

(ii) $\chi_2 \leqslant \Delta + 5$, *если* $4 \leqslant \Delta \leqslant 7$;

(iii) $\chi_2 \leqslant \lfloor (3\Delta)/2 \rfloor + 1$ *в противном случае.*

Были получены следующие верхние оценки: $\lfloor (9\Delta)/5 \rfloor + 2$ при $\Delta \geqslant 749$ Агнарсоном и Холдорсоном [12, 13] и $\lceil (9\Delta)/5 \rceil + 1$ при $\Delta \geqslant 47$ О. В. Бородиным, Брусмой, А. Н. Глебовым и Ван-Ден-Хойвелом [1, 2]. Наилучшие из известных верхних оценок при больших Δ принадлежат Молою и Салаватипуру [22, 23]: $\lceil (5\Delta)/3 \rceil + 78$ при всех Δ и $\lceil (5\Delta)/3 \rceil + 25$ при $\Delta \geqslant 241$.

Ясно, что $\chi_2^l(G) \geqslant \chi_2(G) \geqslant \Delta(G) + 1$ для любого графа G. В [3, 5] получены достаточные условия (в терминах g и Δ) того, что 2-дистанционное хроматическое число плоского графа достигает тривиальной нижней границы $\Delta + 1$. В частности, установлено, что минимальное g такое, что $\chi_2 = \Delta + 1$, если Δ достаточно велико (в зависимости от g), равно 7. Следующая теорема [10] переносит результаты из [3, 5] на предписанную 2-дистанционную раскраску.

Теорема 1. *Если G — плоский граф, то $\chi_2^l = \Delta + 1$ в каждом из*

следующих случаев:

(i) $\Delta = 3, \ \ g \geqslant 24$;

(ii) $\Delta = 4, \ \ g \geqslant 15$;

(iii) $\Delta = 5, \ \ g \geqslant 13$;

(iv) $\Delta = 6, \ \ g \geqslant 12$;

(v) $\Delta \geqslant 7, \ \ g \geqslant 11$;

(vi) $\Delta \geqslant 9, \ \ g = 10$;

(vii) $\Delta \geqslant 15, \ \ g \geqslant 8$;

(viii) $\Delta \geqslant 30, \ \ g = 7$.

Существуют плоские графы с $g \leqslant 6$ *такие, что* $\chi_2^l = \Delta + 2$ *для произвольно больших* Δ.

О. В. Бородин, А. О. Иванова и Т. К. Неустроева [6, 7] доказали, что $\chi_2 = \Delta + 1$ при всех $\Delta \geqslant 31$ для плоских графов обхвата 6 при дополнительном условии, что каждое ребро инцидентно вершине степени 2.

Дворжак, Крал, Ниедлы и Шкрековски [18] доказали, что каждый плоский граф с $\Delta \geqslant 8821$ и $g \geqslant 6$ имеет $\chi_2 \leqslant \Delta + 2$. О. В. Бородиным и А. О. Ивановой в [4, 15, 16] условие на Δ было ослаблено до 18, а в предписанном случае — до 24.

А. О. Иванова и А. С. Соловьева [11] доказали, что каждый плоский граф с $g \geqslant 13$ и $\Delta = 3$ имеет $\chi_2 \leqslant \Delta + 2$, что усиливает аналогичный результат $g \geqslant 14$ Дворжака, Шкрековски и Танцера [19].

Целью данной статьи является следующее усиление пунктов (iii)–(viii) теоремы 1.

Теорема 2. *Если* G *— плоский граф с обхватом* g *и максимальной степенью* Δ*, то* $\chi_2^l(G) = \Delta + 1$ *в каждом из следующих случаев*:

(i) $\Delta \geqslant 16$ *и* $g = 7$;

(ii) $\Delta \geqslant 10$ *и* $8 \leqslant g \leqslant 9$;

(iii) $\Delta \geqslant 6$ *и* $10 \leqslant g \leqslant 11$;

(iv) $\Delta = 5$ *и* $g \geqslant 12$.

Доказательство теоремы 2 основано на 2-чередующихся циклах, введённых О. В. Бородиным в [14] и использованных, в частности, в [3, 10, 17, 20] при решении задач раскраски и рёберного разбиения планарных графов. Кроме того, в доказательстве используется техника граней-трансмиттеров, разработанная О. В. Бородиным и А. О. Ивановой в [4, 15, 16].

1. Доказательство теоремы 2

Пусть G' — контрпример к теореме 2, т. е. $\Delta(G') = \Delta \geqslant 5$, $g(G')$ не меньше, чем в соответствующем пункте теоремы 2, но $\chi_2^l(G') \geqslant \Delta + 2$.

Пусть далее G — граф с минимальным числом рёбер такой, что $\Delta(G) \leqslant \Delta$, $g(G) = g \geqslant g(G')$ и существует нехроматичное предписание L на $V(G)$, где $|L(v)| \geqslant \Delta + 1$ для любой вершины $v \in V(G)$, т. е. $\chi_2^l(G) \geqslant \Delta + 2$. Множество графов с этими свойствами непусто, поскольку по крайней мере G' всеми ими обладает. Наша цель — доказать, что граф G не существует, что будет противоречить существованию G'.

Без ограничения общности можно считать, что G связен и не имеет висячих вершин. Формулу Эйлера $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)| = 2$ перепишем в виде

$$((g^* - 2)|E(G)| - g^*|V(G)|) + (2|E(G)| - g^*|F(G)|) = -2g^*,$$

где $F(G)$ — множество граней графа G, а g^* — натуральное число, не обязательно равное g.

Отсюда

$$\sum_{v\in V(G)} \left(\frac{g^* - 2}{2}\, d(v) - g^*\right) + \sum_{f\in F(G)} (r(f) - g^*) < 0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f.

Заряд $\mu(v)$ каждой вершины $v \in V(G)$ положим равным $\frac{g^*-2}{2}d(v)-g^*$, а *заряд* $\mu(f)$ каждой грани $f \in F(G)$ — равным $r(f) - g^*$. Заметим, что заряд вершины степени 2 равен -2 при любом g^*, а заряды всех остальных вершин и всех граней неотрицательны, если $6 \leqslant g^* \leqslant g$.

Для доказательства несуществования G (при любом Δ) сначала опишем ряд структурных свойств графа G, а затем, основываясь на них, перераспределим заряды, сохраняя их сумму так, что все новые заряды окажутся неотрицательными (что противоречит (1)).

Далее *d-вершина* — вершина степени d, *k-цепь* — цепь из в точности k вершин степени 2, а *$(k_1, \ldots, k_d)$-вершина* — d-вершина, инцидентная d различным цепям, i-я из которых есть k_i-цепь $(1 \leqslant i \leqslant d)$.

1.1. Структурные свойства графа G. Обозначим через $d^*(v)$ число вершин на расстоянии не более 2 от v, т. е. число *2-дистанционных соседей* вершины v.

Замечание 1. Для любого ребра $e = uw$, если $d^*(u) \leqslant d^*(w)$, то либо $d^*(w) \geqslant \Delta+2$, либо $d^*(u) = d^*(w) = \Delta+1$. В самом деле, иначе нетрудно продолжить 2-дистанционную $(\Delta+1)$-раскраску графа $G-e$ до искомой раскраски графа G, перекрасив сперва вершину w, а затем u.

Замечание 2. Более общо, если вершина w смежна с вершинами u_i с $d^*(u_i) \leqslant \Delta$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, то $d^*(w) \geqslant \Delta + k + 1$. Действительно, иначе

2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскраска графа $G - \{w, u_1, \ldots, u_k\}$ легко продолжается до раскраски графа G, причём первой красится вершина w.

Лемма 1. *В G нет $\geqslant 4$-цепей.*

Доказательство следует непосредственно из замечания 1. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Обе концевые вершины любой 3-цепи имеют степень Δ.*

Лемма 3. *Пусть u, w — концевые вершины некоторой 2-цепи. Тогда либо $\max\{d(u), d(w)\} = \Delta$, либо $d(u) = d(w) = \Delta - 1$.*

Лемма 4. *В G нет циклов, образованных 3-цепями.*

Доказательство. Пусть $C = v_0 v_1 \ldots v_{4k-1}$ — цикл с $d(v_i) = 2$ при всех $i \neq 4j$, $0 \leqslant i \leqslant 4k-1$ и $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Удалим все 2-вершины цикла C. Заметим, что все вершины v_{2t-1}, $1 \leqslant t \leqslant 2k$, имеют не менее двух допустимых цветов, и поэтому «2-дистанционный $2k$-цикл» $v_1 v_3 \ldots v_{4k-1}$ может быть раскрашен. Теперь нетрудно покрасить вершины v_{4j-2}, где $1 \leqslant j \leqslant k$, поскольку на выбор цвета для каждой из них имеется только четыре ограничения. Лемма 4 доказана.

Таким образом, 3-цепи в G образуют лес T_3. Теперь определим *спонсора* для центральной вершины каждой 3-цепи следующим образом. Возьмём висячую Δ-вершину в T_3 и объявим её спонсором центральной вершины её единственной 3-цепи P. Удалим P из T_3 и будем повторять это рассуждение, пока T_3 не исчерпается (рис. 1).

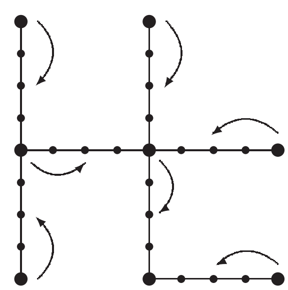

Рис. 1. Назначение спонсоров

Лемма 5. *Пусть $v \in V(G)$ и $3 \leqslant d(v) \leqslant \frac{\Delta+1}{2}$. Тогда*

(i) *v не является $(2, \geqslant 1, \ldots, \geqslant 1)$-вершиной;*

(ii) *если v — $(1, \ldots, 1)$-вершина и существует 1-цепь vxy, то $d(v) + d(y) \geqslant \Delta + 1$.*

Доказательство. Для доказательства (i) применим замечание 1 к ребру 2-цепи, инцидентному вершине v, а для доказательства (ii) — к ребру vx. В обоих случаях мы обесцвечиваем концевые вершины этого ребра и первой красим v. Лемма 5 доказана.

1.2. Случай (i) $\Delta \geqslant 16$ и $g \geqslant 7$. Положим $g^* = 7$. Вершину v назовём *младшей*, если $3 \leqslant d(v) \leqslant 4$.

1.2.1. Перераспределение зарядов вершин и граней. Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов.

R0. (i) Каждая 2-вершина 1-цепи получает заряд 1 от каждой смежной с ней вершины;

(ii) каждая 2-вершина $\geqslant$ 2-цепи, за исключением центральной вершины 3-цепи, получает заряд 2 от смежной с ней вершины степени $\geqslant 3$;

(iii) каждая центральная 2-вершина 3-цепи получает заряд 1 от своего спонсора и ещё 1 — от инцидентной ей $\geqslant$ 8-грани.

R1. Пусть $f = v_1v_2\ldots$, где $d(v_1) = d(v_2) = d(v_4) = 2$, а $3 \leqslant d(v_3) \leqslant 13$. Тогда f даёт вершине v_3

(i) 2, если $d(v_5) = 2$;

(ii) $\frac{1}{2}$ в противном случае.

R2. Пусть $f = v_1v_2\ldots$ — 7- или 8-грань. Тогда

(i) если $d(v_1) = d(v_7) = \Delta$, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_5) = d(v_6) = 2$, а $3 \leqslant d(v_4) \leqslant 13$, то f получает 1 вдоль ребра v_1v_7 от каждой из вершин v_1 и v_7, если $r(f) = 7$, и получает $\frac{1}{2}$ вдоль рёбер v_1v_8 и v_7v_8 от v_1 и v_7, если $r(f) = 8$;

(ii) если $r(f) = 7$ и $d(v_1) = \Delta$, $d(v_2) = d(v_3) = d(v_5) = 2$, а $3 \leqslant d(v_4) \leqslant 13$ и $d(v_6) \geqslant 3$, то f получает $\frac{1}{2}$ вдоль ребра v_1v_7 от v_1.

Грани из правила R2 будем называть *трансмиттерами* (рис. 2). Через $\xi(vw)$ обозначим суммарный заряд, передаваемый вдоль ребра vw от Δ-вершины v трансмиттерам, инцидентым ребру vw.

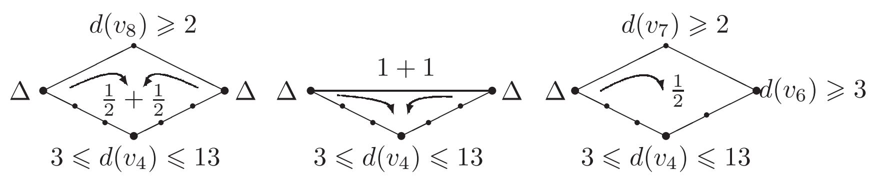

Рис. 2. Трансмиттеры в правиле R2

R3. Пусть v инцидентна 1-цепи vxy, где y — младшая. Тогда v даёт y следующий заряд:

(i) $1 - \xi(vx)$, если $d(v) = \Delta$;
(ii) 1, если $14 \leqslant d(v) \leqslant \Delta - 1$.

R4. Пусть v смежна с младшей вершиной x. Тогда v даёт x следующий заряд:
(i) $2 - \xi(vx)$, если $d(v) = \Delta$;
(ii) 2, если $14 \leqslant d(v) \leqslant \Delta - 1$;
(iii) $\frac{3}{2}$, если $9 \leqslant d(v) \leqslant 13$;
(iv) 1, если $d(v) = 8$.

1.2.2. Проверка того, что $\mu^*(f) \geqslant 0$ для каждой грани f.

Случай 1. $r(f) \geqslant 11$. Распределим заряды 1, 2 и $\frac{1}{2}$, передаваемые гранью f по правилам R0(iii), R1(i) и R1(ii), по четырём, шести и двум рёбрам, ближайшим к получателю, принадлежащим границе $\partial(f)$ грани f, т. е. по $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно. Отметим, что множества таких рёбер не пересекаются благодаря леммам 2 и 3, поэтому

$$\mu^*(f) \geqslant r(f) - 7 - r(f) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} r(f) - 7 > 0.$$

Случай 2. $r(f) = 10$. Здесь $\mu(f) = 3$. Легко видеть, что $\mu^*(f) > 0$, кроме случая, когда $\partial(f)$ состоит из 3-цепи и двух 2-цепей, в этом случае $\mu^*(f) \geqslant 0$.

Случай 3. $r(f) = 9$, т. е. $\mu(f) = 2$. Заметим, что если f делает передачу заряда 2 по правилу R1(i), то она не делает больше никаких передач. Иначе f делает не более двух передач по правилам R0(iii) и R1(ii), так что $\mu^*(f) \geqslant 2 - 2 \times 1 = 0$.

Случай 4. $r(f) = 8$, а $\mu(f) = 1$. По лемме 4 $\partial(f)$ не может состоять из двух 3-цепей. Если $\partial(f)$ содержит 3-цепь, то $\mu^*(f) = 0$. Пусть $\partial(f)$ не содержит 3-цепь. Если f участвует в R1(ii), то не более чем дважды, и f не участвует в R1(i), а значит, $\mu^*(f) \geqslant 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Пусть теперь f участвует в R1(i), тогда она не участвует в R1(ii). Благодаря лемме 3 $\partial(f)$ содержит две Δ-вершины, так что $\mu^*(f) \geqslant 1 - 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R2(i).

Случай 5. $r(f) = 7$, т. е. $\mu(f) = 0$. Заметим, что f не участвует в R0(iii) и может участвовать только по одному разу в R1(i) и R1(ii). Если f делает передачу заряда 2 по R1(i), то f дважды получает по 1 по R2(i), а значит, $\mu^*(f) = 0$. Если f делает передачу в $\frac{1}{2}$ по R1(ii), то f получает $\frac{1}{2}$ по R2(ii).

1.2.2.Проверка того, что $\mu^*(v) \geqslant 0$ для каждой вершины v.

Случай 1. $14 \leqslant d(v) \leqslant \Delta$. Пусть сначала $d(v) = \Delta$. Напомним, что v может являться спонсором только для одной центральной вершины

3-цепи, т. е. давать не более 1 по правилу R0(iii). Заметим, что суммарный заряд, посылаемый вершиной v вдоль каждого ребра по правилам R0(i), R0(ii), R2, R3(i) и R4(i), не превышает 2. Следовательно,

$$\mu^*(v) \geqslant \frac{5}{2}\Delta - 7 - 1 - 2\Delta = \frac{\Delta - 16}{2} \geqslant 0.$$

Если $d(v) \leqslant \Delta - 1$, то $\mu^*(v) \geqslant \frac{5}{2}d(v) - 7 - 2d(v) = \frac{d(v)-14}{2} \geqslant 0$, поскольку v не может быть спонсором.

Случай 2. $9 \leqslant d(v) \leqslant 13$. Теперь v отдаёт не более $\frac{3}{2}$ вдоль каждой инцидентной ей 1- и 0-цепи согласно R0(i) и R4(iii) и заряд 2 каждой своей 2-цепи по R0(ii). С другой стороны, v может получать заряд 2 по R1(i), пусть это происходит s раз.

Через d_2 обозначим число 2-цепей, инцидентных v, а значит, число 0- и 1-цепей, инцидентных v, равно $d(v) - d_2$, откуда $s \geqslant d_2 - (d(v) - d_2)$.

Предположим, что $d_2 \leqslant \frac{d(v)}{2}$. Тогда

$$\mu^*(v) \geqslant \frac{5}{2}d(v) - 7 - 2d_2 - \frac{3}{2}(d(v) - d_2) \geqslant \frac{3d(v)}{4} - 7 > 0,$$

если $d(v) \geqslant 10$. При $d(v) = 9$ имеем $\mu^*(v) \geqslant \frac{5}{2} \times 9 - 7 - 2 \times 4 - \frac{3}{2} \times 5 = 0$.

Пусть теперь $d_2 = \lfloor d(v)/2 \rfloor + k$, где $k \geqslant 1$. Тогда $\mu^*(v) \geqslant \frac{5}{2}d(v) - 7 - 2\left(\lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor + k\right) - \frac{3}{2}\left(d(v) - \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor - k\right) + 2\left(2k - d(v) + 2\lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor\right) = -d(v) - 7 + \frac{7}{2}\left(k + \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor\right) \geqslant -d(v) - 7 + \frac{7}{2}\left(1 + \frac{d(v)-1}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(d(v) - 7\right) > 0$.

Случай 3. $d(v) = 8$. Здесь v отдаёт не более 1 вдоль каждой 1- и 0-цепи по R0(i) и R4(iv), следовательно, $\mu^*(v) \geqslant 13 - 2 \times 4 - 1 \times 4 > 0$, если $d_2 \leqslant 4$, или $\mu^*(v) \geqslant 13 - 2 \times (4 + k) - 1 \times (4 - k) + 2 \times 2k > 0$, если $d_2 = 4 + k$, где $k \geqslant 1$.

Случай 4. $3 \leqslant d(v) \leqslant 7$. Заметим, что теперь v отдаёт заряд только смежным 2-вершинам по R0(i) и R0(ii).

Подслучай 4.1. $5 \leqslant d(v) \leqslant 7$. Требуется рассмотреть лишь случай, когда v отдаёт не менее $\mu(v) + \frac{1}{2} = \frac{5d(v)-13}{2}$ своим 2-вершинам; при этом $d_2 \geqslant 1$. Согласно лемме 5(i) вершина v инцидентна 0-цепи.

Если $6 \leqslant d(v) \leqslant 7$, то фактически $d_2 \geqslant 4$ и v получает не менее 2 по R1(i), так что $\mu^*(v) \geqslant \mu(v) + 2 - 2(d(v) - 1) \geqslant 0$. Если $d(v) = 5$, то v имеет от 6 до 8 вершин степени 2 на инцидентных ей k-цепях. Благодаря зарядам $\frac{1}{2}$ и 2, получаемым вершиной v согласно правилу R1, легко заключаем, что $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Подслучай 4.2. $d(v) = 4$. Поскольку $\mu(v) = 3$, v должна иметь не менее 4 вершин степени 2 на инцидентных ей цепях. Если v не инцидентна 0-цепям, то она инцидентна четырём 1-цепям vx_iy_i, где $d(y_i) \geqslant \Delta - 2$,

$1 \leqslant i \leqslant 4$, по лемме 5(i) и замечанию 2. Кроме того, v не инцидентна трансмиттерам, т. е. $\xi(y_i x_i) = 0$, поэтому $\mu^*(v) \geqslant 3 - 4 \times 1 + 4 \times 1 > 0$ по R3(i),(ii).

Теперь предположим, что v инцидентна в точности одной 0-цепи vx, а следовательно, 2-цепи $vy\ldots$. Тогда $d(x) \geqslant \Delta - 4 \geqslant 12$ согласно замечанию 2, применённому к ребру vy. Поскольку ребро vx не инцидентно трансмиттерам, вершина x передаёт v заряд не менее $\frac{3}{2}$ по R4(i)–(iii). С другой стороны, v получает не менее $\frac{1}{2}$ по R1 (а в случае, когда v инцидентна трём 2-цепям, v дважды получает 2 по R1(i)), откуда $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Наконец, пусть v инцидентна ровно двум 0-цепям vx и vy (и двум 2-цепям $vx_1\ldots$, $vy_1\ldots$). Применим замечание 2 к вершинам v, x_1 и y_1, тогда $d(x) + d(y) \geqslant \Delta - 1$, т. е., скажем, $d(x) \geqslant 8$. Если $\xi(xv) = 0$, то $\mu^*(v) \geqslant 0$, поскольку x даёт v не менее 1 по R4. Иначе $d(x) = \Delta$, но тогда vx не инцидентно трансмиттеру, получающему 1 по R2(i), а значит, $\xi(xv) \leqslant 1$, и x отдаёт не менее 1 вершине v по R4(i).

Подслучай 4.3. $d(v) = 3$, т. е. $\mu(v) = \frac{1}{2}$. Если v не инцидентна 0-цепям, то v инцидентна в точности трём 1-цепям $vx_i y_i$, где $d(y_i) \geqslant \Delta - 1$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, по лемме 5(i) и замечанию 2. Легко видеть, что v не инцидентна трансмиттерам, т. е. $\xi(y_i x_i) = 0$, поэтому $\mu^*(v) \geqslant \frac{1}{2} - 3 \times 1 + 3 \times 1 > 0$ по R3(i),(ii).

Теперь предположим, что v инцидентна в точности одной 0-цепи vx. Если v — (1,1,0)-вершина, инцидентная 1-цепям vx_1y_1 и vx_2y_2, то либо ($\star$) $d(y_i) \geqslant \Delta - 2$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, либо ($\star\star$) $d(x) \geqslant \Delta - 2$ согласно замечанию 1, применённому к рёбрам vx_1 и vx_2.

Если имеет место ($\star\star$), то $\xi(xv) = 0$, поэтому $\mu^*(v) \geqslant \frac{1}{2} - 2 \times 1 + 2 > 0$ по R4(i),(ii). Пусть теперь выполняется ($\star$). Заметим, что $\xi(y_1x_1) = \xi(y_2x_2) = 0$, а значит, $\mu^*(v) \geqslant \frac{1}{2} - 2 \times 1 + 2 \times 1 > 0$ по R3(i) и R3(ii).

Если v — (2,2,0)-вершина, то $d(x) \geqslant \Delta - 1$ согласно замечанию 2, применённому к вершинам v, x_1, x_2, а $\xi(xv) = 0$. Концевые вершины её 2-цепей имеют степень Δ согласно лемме 3, следовательно, $\mu^*(v) \geqslant \frac{1}{2} - 4 \times 1 + 2 + 2 > 0$ по R4(i),(ii) и R1(i).

Предположим, что v — (2,1,0)-вершина, инцидентная 2-цепи $vx_1\ldots$. В этом случае $d(x) \geqslant \Delta - 2$ по замечанию 1, применённому к ребру vx_1, и легко видеть, что $\xi(xv) = 0$. Теперь вершина v получает заряд 2 от x по R4(i) или R4(ii) и $\frac{1}{2}$ по R1(ii), откуда $\mu^*(v) = \frac{1}{2} - 3 + 2 + \frac{1}{2} = 0$.

Если v — (2,0,0)-вершина и vx_1, vx_2 — 0-цепи, инцидентные ей, то $d(x_1) + d(x_2) \geqslant \Delta$ по замечанию 1, поэтому либо $d(x_1) = d(x_2) = 8$, либо, скажем, $d(x_1) \geqslant 9$. В первом случае v получает 1 от каждой из x_1, x_2 по R4(iv), т. е. $\mu^*(v) \geqslant 0$. Пусть $d(x_1) \geqslant 9$. Если $\xi(x_1v) = 0$, то $\mu^*(v) \geqslant 0$ по

правилу R4. Заметим, что грань, инцидентная ребру vx_1 и 2-цепи при v, не может быть трансмиттером. Пусть $\xi(x_1v) \geqslant \frac{1}{2}$, т. е. грань $x_1vx_2\ldots$ — трансмиттер, и пусть $d(x_1) = \Delta$. Если так, то $\xi(x_1v) = \frac{1}{2}$ и x_1 даёт v заряд $\frac{3}{2}$ по R4(i).

Наконец, v — (1,0,0)-вершина, инцидентная 0-цепям vx_1, vx_2 и 1-цепи vxy. Тогда либо ($\star$) $d(x_1) + d(x_2) \geqslant \Delta$, либо ($\star\star$) $d(y) \geqslant \Delta - 2$ по замечанию 1, применённому к ребру vx. Если имеет место ($\star\star$), то v получает 1 от y, поскольку $\xi(yx) = 0$; иначе мы можем предположить, что $d(x_1) \geqslant 8$, а поскольку $\xi(x_1v) \leqslant 1$, по R4 $\mu^*(v) > 0$.

Случай 5. $d(v) = 2$, т. е. $\mu(v) = -2$. Заметим, что каждая 3-цепь инцидентна не менее чем одной $\geqslant 8$-грани. Центральная вершина каждой 3-цепи получает 1+1 по R0(iii), а любая другая 2-вершина получает 1+1 по R0(i) или 2 по R0(ii), откуда $\mu^*(v) \geqslant 0$.

1.3. Случай (ii) $\Delta \geqslant 10$ и $8 \leqslant g \leqslant 9$.

1.3.1. Перераспределение зарядов вершин и граней. Полагаем $g^* = 8$ и используем следующие правила перераспределения зарядов.

R0*. (i) Каждая 2-вершина 1-цепи получает 1 от каждой смежной с ней вершины;

(ii) каждая 2-вершина в $\geqslant 2$-цепи, за исключением центральной вершины 3-цепи, получает 2 от смежной $\geqslant 3$-вершины;

(iii) каждая центральная вершина 3-цепи получает 2 от своего спонсора.

R1. Пусть 8-грань $f = v_1v_2\ldots$ инцидентна цепи $P = v_1v_2\ldots v_7$, где $d(v_2) = d(v_3) = d(v_5) = d(v_6) = 2$, $d(v_4) = 3$, а $d(v_1) = d(v_7) = \Delta$. Тогда f получает $\frac{1}{2}$ от каждой вершины v_1 и v_7 цепи P вдоль рёбер v_1v_8 и v_7v_8 соответственно.

R2. Каждая грань f отдаёт 1 центральной вершине v_4 каждой цепи P (описанной в R1), лежащей в границе f.

R3. Если v инцидентна 1-цепи vxy, где $d(v) \geqslant 8$ и $d(y) = 3$, то v отдаёт 1 вершине y вдоль vxy.

R4. Пусть v инцидентна ребру vx, где $3 \leqslant d(x) \leqslant 5$. Тогда v отдаёт вершине x следующий заряд:

(i) 2, если $d(v) \geqslant 8$, кроме случая, когда $d(v) = \Delta$ и x смежна с Δ-вершиной $w \neq v$, в этом случае v отдаёт вершине x заряд 1;

(ii) 1, если $d(x) = 3$ и $6 \leqslant d(v) \leqslant 7$;

(iii) 1, если $4 \leqslant d(x) \leqslant 5$, а $d(v) = 7$;

(iv) $\frac{1}{2}$, если $d(x) = 3$ и $d(v) = 5$.

1.3.2. Проверка того, что $\mu^*(f) \geqslant 0$ для каждой грани f. Предположим, что $r(f) = 8$. Если f не делает передач по R2, то

$$\mu^*(f) = \mu(f) = r(f) - 8 = 0,$$

иначе такая передача единственна, поэтому $\mu^*(f) = 0 - 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R2 и R1.

Пусть теперь $r(f) \geqslant 9$ и f делает p передач по R2, тогда

$$\mu^*(f) = r(f) - 8 - p \times 1.$$

Если $p \leqslant 1$, то $r(f) - 8 - p \geqslant 9 - 8 - 1 = 0$, иначе $r(f) - 8 - p \geqslant 6p - 8 - p > 0$, поскольку $r(f) \geqslant 6p$, так как цепи, центральные вершины которых получают заряд по R2, не имеют общих рёбер друг с другом.

1.3.3. Проверка того, что $\mu^*(v) \geqslant 0$ для каждой вершины v.

Случай 1. $8 \leqslant d(v) \leqslant \Delta$. Заметим, что v отдаёт не более 2 вдоль каждого инцидентного ребра: либо на 2-вершину, принадлежащую 2- или 3-цепи, либо по правилам R3 и R0*(i), или по R4(i), или по R0*(i) и R1. Следовательно, если $8 \leqslant d(v) \leqslant \Delta - 1$, то $\mu^*(v) = 3d(v) - 8 - 2d(v) \geqslant 0$, поскольку v не может быть спонсором. Если же $d(v) = \Delta$, то v может являться спонсором не более одного раза, поэтому

$$\mu^*(v) \geqslant 3\Delta - 8 - 2\Delta - 2 \geqslant 0$$

по R0*(iii).

Случай 2. $6 \leqslant d(v) \leqslant 7$. Теперь v отдаёт 2 только на 2-цепь по R0*(ii), 1 — на 1-цепь по R0*(i) и не более 1 вдоль 0-цепи согласно R4(ii),(iii). Если $d(v) = 7$, то $\mu(v) = 13$ и $\mu^*(v) \geqslant 0$, поскольку по замечанию 2 v не может быть $(2, \ldots, 2)$-вершиной.

Пусть $d(v) = 6$, т. е. $\mu(v) = 10$. Достаточно рассмотреть случай, когда v отдаёт не менее 11, а это значит, что v инцидентна пяти 2-цепям $vx_i \ldots$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, и одной $\geqslant 1$-цепи vx_6. Но это противоречит замечанию 2, применённому к вершине v.

Случай 3. $4 \leqslant d(v) \leqslant 5$. Заметим, что v отдаёт заряд смежным с ней 2-вершинам по R0*(i) и R0*(ii), а при $d(v) = 5$ также $\frac{1}{2}$ по R4(iv) смежной 3-вершине. Можно считать, что v отдаёт не менее $\mu(v) + \frac{1}{2}$. Тогда v инцидентна не менее чем одной 2-цепи. Это означает, что v инцидентна 0-цепи vx по лемме 5(i).

Пусть $d(v) = 5$. Если v инцидентна четырём 2-цепям, то $d(x) \geqslant 7$ по замечанию 2, поэтому $\mu^*(v) \geqslant 7 - 4 \times 2 + 1 = 0$ по R0* и R4. Если же v

делает не менее двух передач по R4(iv), то $\mu^*(v) \geqslant 7 - 3 \times 2 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$. Остаётся рассмотреть случай, когда расход вершины v составляет 7 по правилам R0(i),(ii) и v делает передачу в $\frac{1}{2}$ по R4(iv), но он невозможен ввиду замечания 2.

Пусть теперь $d(v) = 4$. Если v инцидентна трём 2-цепям, то $d(x) \geqslant 8$, откуда $\mu^*(v) \geqslant 4 - 3 \times 2 + 2 = 0$ по R4(i). Если же v инцидентна двум 2-цепям и одной 1-цепи, то $d(x) \geqslant 7$, т. е. $\mu^*(v) \geqslant 4 - 2 \times 2 - 1 + 1 = 0$ по R4(i),(iii).

Случай 4. $d(v) = 3$, т. е. $\mu(v) = 1$. Если v не инцидентна 0-цепям, то вершина v инцидентна трём 1-цепям vx_iy_i, где $d(y_i) \geqslant 8$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, по лемме 5(i),(ii), следовательно, $\mu^*(v) \geqslant 1 - 3 \times 1 + 3 \times 1 > 0$ по R3.

Предположим, v инцидентна в точности одной 0-цепи vx. Если v — (1,1,0)-вершина, инцидентная 1-цепи vyz, то либо $d(z) \geqslant 8$, либо $d(x) \geqslant 6$ согласно замечанию 1, что означает, что v получает не менее 1 по R3 или R4.

Если v — (2,1,0)-вершина, то $d(x) \geqslant 8$ и v получает 2 от x по R4(i). Пусть v — (2,2,0)-вершина. Тогда $d(x) \geqslant 8$ согласно замечанию 1. С другой стороны, концевые вершины 2-цепей имеют степень Δ, так что v получает 1 по R2 и $\mu^*(v) \geqslant 1 - 2 \times 2 + 2 + 1 = 0$.

Остаётся предположить, что v — (2,0,0)-вершина, инцидентная 0-цепям vx_1, vx_2. Заметим, что $d(x_1) + d(x_2) \geqslant 10$ по замечанию 1, поэтому можно считать, что либо $d(x_1) \geqslant 6$, либо $d(x_1) = d(x_2) = 5$. В первом случае v получает 1 от x_1 по R4, а во втором — по $\frac{1}{2}$ от x_1 и x_2 по R4(iv), так что $\mu^*(v) \geqslant 0$.

Случай 5. $d(v) = 2$. Очевидно, что $\mu^*(v) = 0$ по R0*.

1.4. Случай (iii) $\Delta \geqslant 6$, $10 \leqslant g \leqslant 11$. Полагаем $g^* = 10$ и используем R0* и следующее правило.

R1. Каждая 3-вершина v получает

(i) 1 вдоль каждой инцидентной ей 1-цепи vxy, где $d(y) \geqslant 5$;

(ii) 2 от каждой смежной вершины степени не менее 5;

(iii) 1 от каждой смежной 4-вершины.

1.4.1. Проверка того, что $\mu^* \geqslant 0$ для каждой вершины v и грани f. Очевидно, что $\mu^*(f) = \mu(f) = r(f) - 10 \geqslant 0$. Если $d(v) = \Delta$, то $\mu^*(v) \geqslant 4\Delta - 10 - 2\Delta - 2 \geqslant 0$, и если $5 \leqslant d(v) \leqslant \Delta - 1$, то

$$\mu^*(v) \geqslant 4d(v) - 10 - 2d(v) \geqslant 0$$

по R0* и R1.

Предположим, что $d(v) = 4$. Теперь $\mu(v) = 6$ и v может участвовать в R0*(i),(ii) и R1(iii). Если суммарный расход v превышает 6, то v инцидентна по крайней мере трём 2-цепям. Тогда v смежна с $\geqslant 4$-вершиной согласно замечанию 2; противоречие.

Пусть $d(v) = 3$, т. е. $\mu(v) = 2$. В рассмотрении нуждается лишь случай, когда на инцидентных v цепях имеется не менее трёх 2-вершин.

Если v не инцидентна 0-цепям, то по лемме 5 v инцидентна трём 1-цепям vx_iy_i, где $d(y_i) \geqslant 5$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, по замечанию 1, а значит,

$$\mu^*(v) \geqslant 2 - 3 \times 1 + 3 \times 1 > 0$$

по R0*(i) и R1.

Теперь предположим, что v инцидентна 0-цепи vx, т. е. v — либо (2,1,0)-вершина, либо (2,2,0)-вершина. Во втором случае $d(x) \geqslant 5$ по замечанию 2 и v получает 2 по R1(ii), так что $\mu^*(v) \geqslant 2 - 2 \times 2 + 2 = 0$. Если v — (2,1,0)-вершина, то $d(x) \geqslant 4$ и v получает не менее 1 по R1(ii) или R1(iii), откуда $\mu^*(v) \geqslant 2 - 2 - 1 + 1 = 0$.

И наконец, если $d(v) = 2$, то $\mu^*(v) = 0$ по R0*.

1.5. Случай (iv) $\Delta = 5$, $g \geqslant 12$. Полагаем $g^* = 12$ и используем R0* и следующее правило.

R1. Каждая 3-вершина v получает 2 от каждой смежной $\geqslant 4$-вершины.

1.5.1. Проверка того, что $\mu^* \geqslant 0$ для каждой вершины v и грани f. Очевидно, что $\mu^*(f) = \mu(f) = r(f) - 12 \geqslant 0$. Если $d(v) = \Delta$, то $\mu^*(v) \geqslant 5\Delta - 12 - 2\Delta - 2 > 0$, и если $4 \leqslant d(v) \leqslant \Delta - 1$, то

$$\mu^*(v) \geqslant 5d(v) - 12 - 2d(v) \geqslant 0$$

по R0* и R1.

Пусть $d(v) = 3$, т. е. $\mu(v) = 3$. В рассмотрении нуждается лишь случай, когда на инцидентных v цепях имеется не менее четырёх 2-вершин.

Заметим, что v не может быть $(2,\geqslant 1,\geqslant 1)$-вершиной согласно лемме 5.

Если v — (2,2,0)-вершина, то она смежна с $\geqslant 4$-вершиной по замечанию 2, следовательно, $\mu^*(v) \geqslant 3 - 2 \times 2 + 2 > 0$ по R1.

Наконец, если $d(v) = 2$, то $\mu^*(v) = 0$ по R0*. Теорема 2 доказана.

Автор благодарит О. В. Бородина за полезные замечания, а также выражает отдельную благодарность рецензенту за тщательную проверку доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.** Строение плоских триангуляций в терминах пучков и звёзд // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 15–39.
2. **Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.** Минимальная степень и хроматическое число квадрата плоского графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 4. — С. 9–33.
3. **Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К., Ташкинов В. А.** Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. (http://semr.math.nsc.ru). — 2004. — № 1. — С. 129–141.
4. **Бородин О. В., Иванова А. О.** Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+2)$-раскраска плоских графов с обхватом 6 и $\Delta \geqslant 24$ // Сиб. мат. журн. — 2009. — Т. 50, № 6. — С. 1216–1224.
5. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** 2-дистанционная раскраска разреженных плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. (http://semr.math.nsc.ru). — 2004. — № 1. — С. 76–90.
6. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — Т. 12, № 3. — С. 32–47.
7. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** Достаточные условия минимальной 2-дистанционной раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Сиб. электрон. мат. изв. (http://semr.math.nsc.ru). — 2006. — № 3. — С. 441–450.
8. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** (p,q)-Раскраска разреженных плоских графов // Мат. заметки ЯГУ. — 2006. — Т. 13, № 2. — С. 3–9.
9. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** Предписанная (p,q)-раскраска разреженных плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. (http://semr.math.nsc.ru). — 2006. — № 3. — С. 355–361.
10. **Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.** Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскрашиваемость плоских графов с заданным обхватом // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 13–30.
11. **Иванова А. О., Соловьева А. С.** 2-Дистанционная $(\Delta+2)$-раскраска разреженных плоских графов с $\Delta = 3$ // Мат. заметки ЯГУ. — 2009. — Т. 16, № 2. — С. 2–41.
12. **Agnarsson G., Halldorsson M. M.** Coloring powers of planar graphs // Proc. of 11th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (San Francisco, January 9—11, 2000). — Philadelphia: SIAM press, 2000. — P. 654–662.
13. **Agnarsson G., Halldorsson M. M.** Coloring powers of planar graphs //

SIAM J. Discrete Math. — 2003. — Vol. 16, N 4. — P. 651–662.

14. **Borodin O. V.** On the total coloring of planar graphs // J. Reine Angew. Math. — 1989. — Bd 394. — S. 180–185.
15. **Borodin O. V., Ivanova A. O.** List 2-distance $(\Delta + 2)$-coloring of planar graphs with girth six // Europ. J. Combin. — 2009. — Vol. 30. — P. 1257–1262.
16. **Borodin O. V., Ivanova A. O.** 2-Distance $(\Delta+2)$-coloring of planar graphs with girth six and $\Delta \geqslant 18$ // Discrete Math. — 2009. — Vol. 309. — P. 6496–6502.
17. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.** List edge and list total colorings of multigraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. — 1997. — Vol. 71, N 2. — P. 184–204.
18. **Dvořák Z., Kràl D., Nejedlỳ P., Škrekovski R.** Coloring squares of planar graphs with girth six // Europ. J. Combin. — 2008. — Vol. 29, N 4. — P. 838–849.
19. **Dvořák Z., Škrekovski R., Tancer M.** List-coloring squares of sparse subcubic graphs // SIAM J. Discrete Math. — 2008. — Vol. 22, N 1. — P. 139–159.
20. **He W., Hou X., Lih K. W., Shao J., Wang W., Zhu X.** Edge-partitions of planar graphs and their game coloring numbers // J. Graph Theory. — 2002. — Vol. 41. — P. 307–317.
21. **Jensen T., Toft B.** Graph Coloring Problems. — New York: John Willey & Sons, 1995. — 245 p.
22. **Molloy M., Salavatipour M. R.** Frequency channel assignment on planar networks // Algorithms–ESA 2002. Mohring R. H., Raman R. (Eds.). — Berlin: Springer-Verl., 2002. — P. 736–747. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2461).
23. **Molloy M., Salavatipour M. R.** A bound on the chromatic number of the square of a planar graph // J. Combin. Theory. Ser. B. — 2005. — Vol. 94. — P. 189–213.
24. **Wegner G.** Graphs with given diameter and a coloring problem // Technical report. — Dortmund, Germany: University of Dortmund, 1977. — 12 p.

Иванова Анна Олеговна,
e-mail: shmgnanna@mail.ru

Статья поступила
2 февраля 2010 г.
Переработанный вариант —
28 июля 2010 г.