ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2010. Том 17, № 5. С. 46–55

УДК 519.174

ЦИКЛЫ ДЛИНЫ СЕМЬ В PANCAKE ГРАФЕ *)

Е. В. Константинова, А. Н. Медведев

Аннотация. Ранее в pancake графе P_n, $n \geqslant 3$, являющемся графом Кэли на симметрической группе перестановок с порождающим множеством всех префикс-реверсалов, доказано существование циклов длины l, $6 \leqslant l \leqslant n!$. В настоящей статье даётся характеризация циклов длины семь, представленных в виде последовательности префикс-реверсалов. Доказано, что через любую вершину графа P_n, $n \geqslant 4$, проходит $7(n-3)$ циклов длины семь, а всего в графе имеется $n!(n-3)$ различных циклов длины семь.

Ключевые слова: pancake граф, граф Кэли, симметрическая группа, вложение циклов.

Введение

Определим граф P_n, $n \geqslant 2$, как граф Кэли $P_n = (\mathrm{Sym}_n, \mathrm{PR})$ на симметрической группе Sym_n перестановок $\pi = [\pi_1\,\pi_2\,\ldots\,\pi_n]$, где $\pi_i = \pi(i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, с порождающим множеством $\mathrm{PR} = \{r_i \in \mathrm{Sym}_n,\ 2 \leqslant i \leqslant n\}$ всех префикс-реверсалов r_i, меняющих порядок элементов внутри интервала $[1, i]$, $2 \leqslant i \leqslant n$, перестановки π при умножении на неё справа: $[\pi_1\,\ldots\,\pi_i\,\pi_{i+1}\,\ldots\,\pi_n]\,r_i = [\pi_i\,\ldots\,\pi_1\,\pi_{i+1}\,\ldots\,\pi_n]$. Расстояние в графе P_n определяется как наименьшее число префикс-реверсалов, переводящих одну перестановку в другую. В иностранной литературе граф P_n принято называть *блинчиковым* (the pancake graph), поскольку именно этот граф рассматривается в блинчиковой задаче, поставленной Гутманом [3] в 1975 г., где он задавался вопросом: каково минимальное количество флипов, позволяющих упорядочить стопку блинчиков разного размера в соответствии с их размером от минимального наверху до максимального внизу, где под флипом понимается операция переворачивания стопки блинчиков от верхнего до некоторого фиксированного. Если перенумеровать все блинчики в стопке от 1 до n в соответствии с их размером, то получим некоторую перестановку, на которой префикс-реверсал выполняет ту же операцию, что и флип на стопке блинчиков. Тогда задача

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09–01–00244).

сводится к определению минимального расстояния между произвольной перестановкой π и единичной перестановкой $I_n = [1\,2 \ldots n]$ в графе P_n, т. е. к определению диаметра данного графа. В настоящий момент проблема по-прежнему не решена, известны лишь верхние и нижние оценки, а также точные значения диаметра вплоть до $n = 17$. Обзор последних результатов представлен в [5].

Исследованием циклической структуры данного графа интересовались начиная с 1984 г., когда Закс [7] доказал гамильтоновость графа P_n и предложил алгоритм формирования цикла длины $l = n!$ на основе элементов порождающего множества графа. В 1995 г. этот результат подтверждён Каневским и Фенгом [4], которые доказали, что в графе P_n содержатся все циклы длины l, где $6 \leqslant l \leqslant n! - 2$ и $l = n!$. Наличие цикла длины $l = n! - 1$ в графе P_n, $n \geqslant 4$, доказано в 2006 г. группой тайваньских учёных [6]. Однако в некоторых задачах на графе P_n, в частности, при поиске его хроматического числа [1], интересен не только сам факт наличия в нём циклов, но и их точное описание. В настоящей статье даётся характеризация циклов длины семь C_7 в графе P_n, $n \geqslant 4$. Основная теорема формулируется следующим образом.

Теорема 1. *В графе P_n, $n \geqslant 4$, через каждую его вершину проходит ровно $7(n-3)$ различных циклов длины семь.*

Мы также приводим точное описание циклов длины семь на основе префикс-реверсалов. Важным следствием теоремы 1 является

Следствие 1. *В графе P_n, $n \geqslant 4$, имеется $n!\,(n-3)$ различных циклов длины семь.*

Кроме того, очевидные оценки на число N_7 независимых циклов длины семь в данном графе получаются из теоремы 1 и имеют следующий вид.

Следствие 2. *В графе P_n, $n \geqslant 4$, имеется $\frac{n!}{8} \leqslant N_7 \leqslant \frac{n!}{7}$ независимых циклов длины семь.*

Для доказательства этих фактов требуется знание иерархической структуры графа, которое представлено в следующем разделе. Доказательство результатов дано в разд. 2. Общепринятые термины и обозначения соответствуют [2].

1. Структурные свойства графа

Известно, что граф Кэли $\Gamma = (G, S)$ с множеством вершин $V = G$, где G — некоторая конечная группа с единичным элементом e, и множеством рёбер $E = \{\{g, gs\} \mid g \in G,\ s \in S\}$. Здесь $S \subset G$ — порождаю-

щее множество группы такое, что $e \notin S$ и $S = S^{-1}$ является вершинно-транзитивным, $|S|$-регулярным и имеет порядок, совпадающий с порядком группы. Следовательно, для графа P_n верна

Лемма 1. *Граф P_n, $n \geqslant 2$, — вершинно-транзитивный $(n-1)$-регулярный неориентированный граф порядка $n!$ без петель и кратных рёбер.*

Кроме того, граф P_n, $n \geqslant 3$, обладает иерархической структурой, а именно, состоит из n копий $P_{n-1}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в каждой из которых

$$V_i = \{[\pi_1 \, \dots \, \pi_{n-1} \, i] \mid \pi_k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i\}, \, 1 \leqslant k \leqslant n-1\},$$

— множество вершин, $|V_i| = (n-1)!$,

$$E_i = \{\{[\pi_1 \, \dots \, \pi_{n-1} \, i], [\pi_1 \, \dots \, \pi_{n-1} \, i] \, r_j\}, \, 2 \leqslant j \leqslant n-1\},$$

— множество рёбер, $|E_i| = \frac{(n-1)!(n-2)}{2}$. Любые две копии $P_{n-1}(i), P_{n-1}(j)$, $i \neq j$, соединяются $(n-2)!$ рёбрами вида $\{[i \, \pi_2 \, \dots \, \pi_{n-1} \, j], \, [j \, \pi_{n-1} \, \dots \, \pi_2 i]\}$, где

$$[i \, \pi_2 \, \dots \, \pi_{n-1} \, j] \, r_n = [j \, \pi_{n-1} \, \dots \, \pi_2 \, i].$$

Префикс-реверсалы r_j, $2 \leqslant j \leqslant n-1$, определяют внутренние рёбра в каждой из n копий $P_{n-1}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, а префикс-реверсал r_n определяет внешние рёбра между копиями. Копии $P_{n-1}(i)$ будем также называть $(n-1)$-*копиями*.

Далее под вершиной графа P_n будем понимать перестановку, которая этой вершине соответствует, а циклы будем описывать, используя последовательность префикс-реверсалов. *Формой цикла C_l длины l в графе P_n, $n \geqslant 3$,* будем называть последовательность префикс-реверсалов $C_l = r_{i_1} \, \dots \, r_{i_l}$, где $2 \leqslant i_j \leqslant n$ и $i_j \neq i_{j+1} \, ((j+1) \bmod l)$ для любого $j \in \{1, \dots, l\}$, таких, что $\pi \, r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$, где $\pi \in \mathrm{Sym}_n$. Цикл C_l длины l будем также называть l-*циклом*. Отметим следующие свойства данного представления циклов.

1. Если $r_{i_1} \, \dots \, r_{i_l}$ является формой некоторого цикла, то $r_{i_l} \, \dots \, r_{i_1}$ также является формой того же самого цикла, заданного в обратном направлении. Действительно, при умножении обеих частей равенства $\pi \, r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$ справа на $r_{i_l} \, \dots \, r_{i_1}$ получим $\pi = \pi r_{i_l} \, \dots \, r_{i_1}$.

2. В зависимости от выбора вершины l-цикл может быть представлен $2\,l$ формами (не обязательно разными). В самом деле, при умножении обеих частей равенства $\pi \, r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$ справа на r_{i_1} получим $(\pi \, r_{i_1}) \, r_{i_2} \, \dots \, r_{i_l} \, r_{i_1} = \pi \, r_{i_1}$, где $\pi \, r_{i_1}$ — перестановка, $r_{i_2} \, \dots \, r_{i_l} \, r_{i_1}$ — форма того же самого l-цикла. Применяя аналогичные рассуждения далее, получим l форм одного и того же l-цикла, а с учётом предыдущего свойства их будет $2\,l$.

3. Разные формы l-цикла описывают разные l-циклы для фиксированной вершины π. Действительно, так как для любой π инцидентные ей рёбра задаются $(n-1)$ префикс-реверсалами, то $\pi\, r_{i_j} \dots r_{i_l}\, r_{i_1} \dots r_{i_{j-1}} = \pi$, если $\pi\, r_{i_1} \dots r_{i_l} = \pi$, где $2 \leqslant j \leqslant n-1$.

Канонической формой цикла C_l длины l будем называть форму с лексикографически максимальной последовательностью индексов $i_1 \dots i_l$. Очевидно, что из канонической формы цикла могут быть получены все другие его формы.

Сегментом $[i,\, j]$ *перестановки* $\pi = [\pi_1 \dots \pi_i \dots \pi_j \dots \pi_n]$ будем называть все элементы, заключённые между π_i и π_j включительно. Любая перестановка может быть представлена в виде последовательности сегментов. Будем использовать символы $\{i,\, j,\, k\}$ и $\{\alpha,\, \beta,\, \gamma\}$ для обозначения одноэлементных и многоэлементных сегментов соответственно. Например, $\pi = [i\, \pi_2\, \pi_3\, \pi_4\, j\, \pi_6\, \pi_7\, \pi_8\, k]$ может быть записана в виде $\pi = [i\, \alpha\, j\, \beta\, k]$, где $\alpha = [\pi_2\, \pi_3\, \pi_4]$, $\beta = [\pi_6\, \pi_7\, \pi_8]$. Под записью $\overline{\alpha}$ будем понимать сегмент, получающийся инверсией элементов α. Очевидно, что $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$. Через $|\alpha|$ будем обозначать число элементов в сегменте α.

Докажем простую вспомогательную лемму. Расстояние $d = d(\pi, \tau)$ между вершинами π и τ в графе P_n — это наименьшее число префикс-реверсалов, переводящих перестановку π в перестановку τ, т. е.

$$\pi\, r_{i_1}\, r_{i_2} \dots r_{i_d} = \tau.$$

Обозначим $\overline{\pi} = \pi\, r_n$ и $\overline{\tau} = \tau\, r_n$.

Лемма 2. *Пусть $\pi \neq \tau$ принадлежат одной и той же $(n-1)$-копии графа P_n, $n \geqslant 3$, и пусть $d(\pi, \tau) \leqslant 2$. Тогда $\overline{\pi}, \overline{\tau}$ принадлежат разным $(n-1)$-копиям этого графа.*

Доказательство. Пусть $\pi,\, \tau \in P_{n-1}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. их последний элемент равен i. Тогда если $d(\pi, \tau) = 1$ и если положить $\pi = [j\, \alpha\, k\, \beta\, i]$, то $\tau = [k\, \overline{\alpha}\, j\, \beta\, i]$, где $j \neq k \neq i$. Отсюда $\overline{\pi} = [i\, \overline{\beta}\, k\, \overline{\alpha}\, j]$, $\overline{\tau} = [i\, \overline{\beta}\, j\, \alpha\, k]$, а поскольку их последние элементы различны, они принадлежат разным копиям $P_{n-1}(j)$, $P_{n-1}(k)$, где $1 \leqslant i \neq j \neq k \leqslant n$. Если $d(\pi, \tau) = 2$, то в $P_{n-1}(i)$ имеется смежная с π и τ вершина ω, последний элемент которой равен i. Перестановки π и τ получаются из ω умножением её на различные (отличные от r_n) префикс-реверсалы справа. Таким образом, первые элементы π и τ будут различны, что эквивалентно тому, что последние элементы перестановок $\overline{\pi} = \pi\, r_n$ и $\overline{\tau} = \tau\, r_n$ будут различны, т. е. они вновь будут принадлежать разным $(n-1)$-копиям графа P_n.

Теорема 2 [4, 6]. *В графе P_n, $n \geqslant 3$, имеются циклы C_l длины l, $6 \leqslant l \leqslant n!$.*

Характеризация циклов длины шесть представлена следующей леммой.

Лемма 3. *В графе P_n, $n \geqslant 3$, через каждую его вершину проходит ровно один цикл длины шесть канонической формы $C_6 = r_3\, r_2\, r_3\, r_2\, r_3\, r_2$.*

Доказательство. Если $n = 3$, то $P_3 \cong C_6$ и 6-цикл формируется следующим образом: $[123] \xrightarrow{r_2} [213] \xrightarrow{r_3} [312] \xrightarrow{r_2} [132] \xrightarrow{r_3} [231] \xrightarrow{r_2} [321] \xrightarrow{r_3} [123]$, что соответствует канонической форме $C_6 = r_3\, r_2\, r_3\, r_2\, r_3\, r_2$.

Покажем, что 6-циклы другой формы в P_n, $n \geqslant 4$, не возникают. Очевидно, что 6-цикл не может возникнуть на вершинах двух разных $(n-1)$-копий. В самом деле, пусть $\pi,\, \tau \in P_{n-1}(i)$, $\pi \neq \tau$, тогда из леммы 2 следует, что если $\overline{\pi},\, \overline{\tau} \in P_{n-1}(j)$, $j \neq i$, где $\overline{\pi} = \pi\, r_n$, $\overline{\tau} = \tau\, r_n$, то $d(\pi,\, \tau) \neq 1$ и $d(\pi,\, \tau) \neq 2$, т. е. $d(\pi,\, \tau) \geqslant 3$. Предположим, что на вершинах $\pi, \tau, \overline{\pi}, \overline{\tau}$ имеется 6-цикл. Тогда если $d(\pi, \tau) = 3$, то вершины $\overline{\pi}$, $\overline{\tau}$ должны быть смежными в $P_{n-1}(j)$. Следовательно, по лемме 2 вершины $\pi = \overline{\pi}\, r_n$, $\tau = \overline{\tau}\, r_n$ должны принадлежать разным $(n-1)$-копиям, а это не так, поскольку $\pi,\, \tau \in P_{n-1}(i)$. Если $d(\pi, \tau) = 4$, то должно выполняться $\overline{\pi} = \overline{\tau}$, что невозможно, поскольку $\pi \neq \tau$. Таким образом, 6-цикл не может возникнуть на вершинах двух разных $(n-1)$-копий.

Теперь покажем, что 6-цикл не может возникнуть на вершинах трёх разных $(n-1)$-копий. Пусть $\pi,\, \tau \in P_{n-1}(i)$, $\pi \neq \tau$, такие, что $d(\pi, \tau) \leqslant 2$. Тогда по лемме 2 вершины $\overline{\pi}, \overline{\tau}$ принадлежат разным $(n-1)$-копиям. Рассмотрим два случая. Пусть $d(\pi, \tau) = 1$. Тогда вершины $\pi, \tau, \overline{\pi}, \overline{\tau}$ принадлежат некоторому 6-циклу только в том случае, когда $d(\overline{\pi}, \overline{\tau}) = 3$. Покажем, что это не так. Пусть $\pi = [j\, \alpha\, k\, \beta\, i]$, где $j \neq k \neq i$. Тогда $\tau = [k\, \overline{\alpha}\, j\, \beta\, i]$, а $\overline{\pi} = [i\, \overline{\beta}\, k\, \overline{\alpha}\, j] \in P_{n-1}(j)$, $\overline{\tau} = [i\, \overline{\beta}\, j\, \alpha\, k] \in P_{n-1}(k)$. Кратчайший путь из $\overline{\pi}$ в копию $P_{n-1}(k)$ лежит через вершины $\omega = [k\, \beta\, i\, \overline{\alpha}\, j]$ и $\overline{\omega} = [j\, \alpha\, i\, \overline{\beta}\, k] \in P_{n-1}(k)$, т. е. $d(\overline{\pi}, \overline{\omega}) = 2$. Очевидно, что не существует префикс-реверсала, переводящего $\overline{\omega}$ в $\overline{\tau}$, т. е. $d(\overline{\omega}, \overline{\tau}) \neq 1$, а значит, $d(\overline{\pi}, \overline{\tau}) \neq 3$. Теперь пусть $d(\pi, \tau) = 2$. В этом случае вершины $\pi, \tau, \overline{\pi}, \overline{\tau}$ принадлежат некоторому 6-циклу тогда и только тогда, когда $d(\overline{\pi}, \overline{\tau}) = 2$. Но это невозможно, поскольку по лемме 2 вершины $\pi = \overline{\pi}\, r_n$ и $\tau = \overline{\tau}\, r_n$ должны будут принадлежать разным $(n{-}1)$-копиям. Следовательно, при $n \geqslant 4$ цикл длины шесть не может возникнуть на вершинах трёх разных $(n-1)$-копий.

Также очевидно, что 6-цикл не может возникнуть на вершинах четырёх и более разных $(n-1)$-копий, поскольку между копиями должно быть не менее четырёх внешних рёбер и внутри каждой из $(n-1)$-копий по крайней мере одно ребро, т. е. в этом случае циклом минимальной длины будет 8-цикл.

Таким образом, есть только одна каноническая форма $r_3\, r_2\, r_3\, r_2\, r_3\, r_2$, описывающая циклы длины шесть в графе P_n, $n \geqslant 3$. Эти циклы являются независимыми при $n \geqslant 4$, поскольку префикс-реверсалы r_i, $4 \leqslant i \leqslant n$, определяют внешние рёбра по отношению к циклам длины шесть, а значит, через каждую вершину графа проходит ровно один цикл длины шесть канонической формы. Лемма 3 доказана.

Очевидно из леммы 3 вытекает

Следствие 3. *В графе P_n, $n \geqslant 3$, содержится $\frac{n!}{6}$ независимых циклов длины шесть.*

2. Циклы длины семь

Приведём полную формулировку теоремы 1 и её доказательство.

Теорема 1. *В графе P_n, $n \geqslant 4$, через каждую его вершину проходит ровно $7\,(n-3)$ различных циклов длины семь канонической формы*

$$C_7 = r_k\, r_{k-1}\, r_k\, r_{k-1}\, r_{k-2}\, r_k\, r_2, \tag{1}$$

где $4 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство проведём индукцией по k, где k — размерность графа P_k, $k \geqslant 4$.

При $k = 4$ по условию теоремы в графе P_4 через любую его вершину проходит ровно семь различных циклов длины семь. Поскольку по лемме 1 граф является вершинно-транзитивным, достаточно это показать для любой его вершины. В частности, в табл. 1 представлены все

Таблица 1

Циклы длины семь в графе P_4, проходящие через вершину [1234].

№	описание через вершины	описание через префикс-реверсалы
1	1234-4321–2341–1432–3412–4312–2134	$r_4\, r_3\, r_4\, r_3\, r_2\, r_4\, r_2$
2	1234–3214–4123–2143–1243–3421–4321	$r_3\, r_4\, r_3\, r_2\, r_4\, r_2\, r_4$
3	1234–4321–2341–3241–1423–4123–3214	$r_4\, r_3\, r_2\, r_4\, r_2\, r_4\, r_3$
4	1234–3214–2314–4132–1432–2341–4321	$r_3\, r_2\, r_4\, r_2\, r_4\, r_3\, r_4$
5	1234–2134–4312–3412–2143–4123–3214	$r_2\, r_4\, r_2\, r_4\, r_3\, r_4\, r_3$
6	1234–4321–3421–1243–4213–3124–2134	$r_4\, r_2\, r_4\, r_3\, r_4\, r_3\, r_2$
7	1234–2134–4312–1342–2431–3421–4321	$r_2\, r_4\, r_3\, r_4\, r_3\, r_2\, r_4$

циклы длины семь, проходящие через вершину [1234], которые легко получаются, если рассмотреть слоевую структуру графа P_4 относительно этой вершины. По теореме 2 в графе P_4 отсутствуют 3-, 4-, 5-циклы, т. е.

в первом и втором слоях будут находиться соответственно три и шесть вершин, причём среди вершин одного и того же слоя не будет смежных. Первые смежные вершины, принадлежащие одному и тому же слою, появятся в третьем слое. Это и будут вершины, принадлежащие циклам длины семь. Всего таких пар вершин будет семь, по числу циклов длины семь, представленных в табл. 1. Легко видеть, что канонической формой всех этих циклов является форма $r_4\, r_3\, r_4\, r_3\, r_2\, r_4\, r_2$, соответствующая (1) при $k = 4$.

Теперь предположим, что теорема верна при $k = n - 1$ и докажем утверждение для $k = n$, используя иерархическое строение графа P_n. В силу предположения через любую вершину любой $(n-1)$-копии проходит $7((n-1)-3) = 7(n-4)$ различных циклов длины семь, содержащих только вершины той копии, которой данная вершина принадлежит. Помимо циклов длины семь, лежащих внутри одной и той же $(n-1)$-копии, в P_n могут возникнуть циклы длины семь, проходящие через вершины разных $(n-1)$-копий. Возможны следующие три случая.

Случай 1. Предположим, что цикл C_7^* длины семь появляется на вершинах двух $(n-1)$-копий, т. е. либо две вершины C_7^* лежат в $P_{n-1}(i)$, а пять — в $P_{n-1}(j)$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, либо три вершины C_7^* лежат в $P_{n-1}(i)$, а четыре — в $P_{n-1}(j)$. В обоих случаях для вершин π, $\tau \in P_{n-1}(i)$, $\pi \neq \tau$, цикла C_7^* выполняется $d(\pi, \tau) \leqslant 2$. Тогда по лемме 2 вершины $\overline{\pi}$, $\overline{\tau}$ должны лежать в разных $(n-1)$-копиях, что противоречит нашему предположению. Следовательно, 7-цикл не может возникнуть на вершинах двух $(n-1)$-копий.

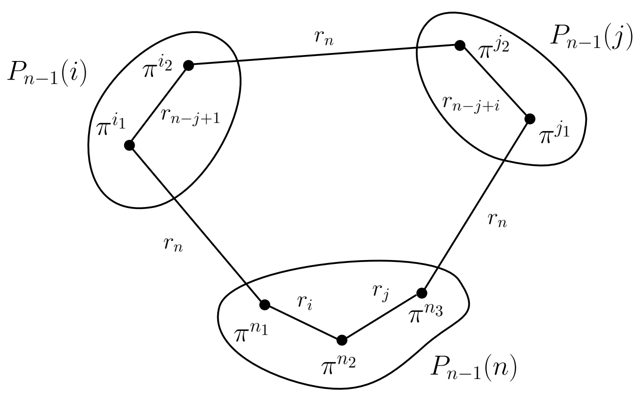

Рис. 1. Иллюстрация к случаю 2

Случай 2. Предположим, что цикл C_7^* длины семь возникает на вер-

шинах трёх $(n-1)$-копий так, что две вершины π^{i_1}, π^{i_2} лежат в копии $P_{n-1}(i)$, две другие π^{j_1}, π^{j_2} лежат в копии $P_{n-1}(j)$, остальные три вершины π^{n_1}, π^{n_2}, π^{n_3} лежат в копии $P_{n-1}(n)$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $i < j$ (рис. 1). Опишем цикл C_7^*. Поскольку граф является вершинно-транзитивным, положим не нарушая общности $\pi^{n_2} = I_n = [\alpha\, i \beta\, j\, \gamma\, n]$, где $\alpha = [1 \ldots i-1]$, $\beta = [i+1 \ldots j-1]$, $\gamma = [j+1 \ldots n-1]$ и $|\alpha| = i-1$, $|\beta| = j-i-1$, $|\gamma| = n-j-1$. По лемме 2 вершины π^{n_1} и π^{n_3} должны быть смежными с вершинами из разных $(n-1)$-копий, в нашем обозначении это $P_{n-1}(i)$ и $P_{n-1}(j)$, следовательно, они должны иметь вид:

$$\pi^{n_1} = \pi^{n_2}\, r_i = [i\, \overline{\alpha}\, \beta\, j\, \gamma\, n], \text{ где } \pi^{n_1}_j = j,$$
$$\pi^{n_3} = \pi^{n_2}\, r_j = [j\, \overline{\beta}\, i\, \overline{\alpha}\, \gamma\, n], \text{ где } \pi^{n_3}_{j-i+1} = i.$$

Тогда смежные им вершины в копиях $P_{n-1}(i)$ и $P_{n-1}(j)$ примут вид:

$$\pi^{i_1} = \pi^{n_1}\, r_n = [n\, \overline{\gamma}\, j\, \overline{\beta}\, \alpha\, i], \quad \text{где} \quad \pi^{i_1}_{n-j+1} = j,$$

$$\pi^{j_1} = \pi^{n_3}\, r_n = [n\, \overline{\gamma}\, \alpha\, i\, \beta\, j], \quad \text{где} \quad \pi^{j_1}_{n-j+i} = i.$$

Вершина π^{i_2} должна быть смежной с вершиной π^{i_1} и с одной из вершин, скажем π^{j_2}, копии $P_{n-1}(j)$, следовательно,

$$\pi^{i_2} = \pi^{i_1}\, r_{n-j+1} = [j\, \gamma\, n \overline{\beta}\, \alpha\, i], \quad \text{где} \quad \pi^{i_2}_1 = j.$$

С другой стороны, вершина π^{j_2} должна быть смежной с вершиной π^{j_1}, а поскольку она также является смежной с π^{i_2}, перестановка π^{j_2} примет вид:

$$\pi^{j_2} = \pi^{j_1}\, r_{n-j+i} = [i\, \overline{\alpha}\, \gamma\, n\, \beta\, j], \quad \text{где} \quad \pi^{j_2}_1 = i.$$

По нашему предположению вершины π^{i_2} и π^{j_2} инцидентны одному и тому же внешнему ребру, т. е. перестановка $\pi^* = \pi^{i_2}\, r_n = [i\, \overline{\alpha}\, \beta\, n\, \overline{\gamma}\, j]$ должна совпадать с перестановкой π^{j_2}. Это возможно только в случае, когда сегменты β и γ будут пустыми, т. е. $|\beta| = j-i-1 = 0$ и $|\gamma| = n-j-1 = 0$. Отсюда следует, что $j = n-1$ и $i = j-1 = n-2$, а цикл длины семь получается следующим образом:

$$\pi^{i_1} \xrightarrow{r_2} \pi^{i_2} \xrightarrow{r_n} \pi^{j_2} \xrightarrow{r_{n-1}} \pi^{j_1} \xrightarrow{r_n} \pi^{n_3} \xrightarrow{r_{n-1}} \pi^{n_2} \xrightarrow{r_{n-2}} \pi^{n_1} \xrightarrow{r_n} \pi^{i_1}.$$

Каноническая форма последнего $C_7 = r_n\, r_{n-1}\, r_n\, r_{n-1}\, r_{n-2}\, r_n\, r_2$ совпадает с (1) при $k = n$.

Случай 3. Предположим, что цикл длины семь возникает на вершинах четырёх или более $(n-1)$-копий. Из иерархического строения графа

следует, что любая его вершина инцидентна единственному внешнему ребру. Следовательно, любой цикл в графе должен проходить как минимум через две вершины одной и той же $(n-1)$-копии, и существование цикла длины семь в данном предположении невозможно.

Таким образом, найдена единственная каноническая форма

$$r_n\, r_{n-1}\, r_n\, r_{n-1}\, r_{n-2}\, r_n\, r_2,$$

описывающая семь циклов длины семь, проходящих через вершины трёх различных $(n-1)$-копий графа P_n. Очевидно, что эти семь циклов проходят через любую вершину графа P_n. Напомним, что в силу индукционного предположения через любую вершину любой $(n-1)$-копии проходит $7(n-4)$ различных циклов длины семь. Следовательно, в графе P_n через любую его вершину проходит $7(n-4)+7=7(n-3)$ различных циклов длины семь канонической формы (1). Теорема 1 доказана

Доказательство следствия 1 следует немедленно из теоремы 1, если заметить, что в графе $n!$ вершин, а через каждую вершину проходит $7\,(n-3)$ различных циклов длины семь, т. е. в графе $n!\cdot 7(n-3)$ циклов длины семь. Однако каждый цикл был посчитан ровно семь раз (по количеству вершин в цикле), следовательно, в графе P_n, $n \geqslant 4$, имеется $n!(n-3)$ различных циклов длины семь. Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. Легко показать, что при $n=4$ в графе P_4 существует всего три независимых цикла длины семь. Например, следующие три 7-цикла являются в P_4 независимыми:

$$\begin{aligned}
C_7^1 &= 1234-2134-4312-1342-2431-3421-4321,\\
C_7^2 &= 3241-2341-1432-3412-2143-4123-1423,\\
C_7^3 &= 4213-2413-3142-4132-2314-1324-3124.
\end{aligned}$$

Тогда из иерархического строения графа следует, что в P_n, $n \geqslant 5$, имеется $n!/24$ копий P_4, в каждой из которых имеется ровно три независимых цикла, следовательно, в целом, в P_n их имеется по крайней мере $n!/8$, что даёт нам нижнюю оценку. Верхняя оценка получается в предположении, что каждая вершина принадлежит единственному циклу длины семь. Следствие 2 доказано.

Авторы благодарны рецензенту за ценные советы по улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Константинова Е. В.** О хроматическом числе некоторых графов Кэли// Тр. VIII Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». — М.: ФВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. — С. 149–155.
2. **Харари Ф.** Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 299 с.
3. **Dweighter H.** E 2569 in: Elementary problems and solutions // Amer. Math. Monthly. — 1975. — Vol. 82, N 1. — P. 1010.
4. **Kanevsky A., Feng C.** On the embedding of cycles in pancake graphs // Parallel comput. — 1995. — Vol. 21. — P. 923–936.
5. **Asai S., Kounoike Y., Shinano Y., Kaneko K.** Computing the diameter of 17-pancake graph using a PC cluster // Euro-Par 2006 Parallel Processing. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verl., 2006. — P. 1114–1124. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 4128.)
6. **Sheu J. J., Tan J. J. M., Chu K. T.** Cycle embedding in pancake interconnection networks // Proc. 23rd Workshop Comb. Math. Comput. Theory (Taiwan, 2006). — Changhua, Taiwan: Da-Yeh Univ. Press, 2006. — P. 85–92.
7. **Zaks S.** A new algorithm for generation of permutations // BIT. — 1984. — Vol. 24. — P. 196–204.

Константинова Елена Валентиновна,
e-mail: e_konsta@math.nsc.ru
Медведев Алексей Николаевич,
e-mail: an_medvedev@yahoo.com

Статья поступила
3 февраля 2010 г.
Переработанный вариант —
1 апреля 2010 г.