ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сентябрь—октябрь 2010. Том 17, № 5. С. 56–66

УДК 519.87

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ЦИРКУЛЯНТНЫЕ СЕТИ

Э. А. Монахова

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации циркулянтных сетей, состоящая в максимизации числа вершин при заданных степени и диаметре графа. На основе изучения циркулянтов с образующими, представленными в виде степеней нечётного числа, получены новые улучшенные нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей всех размерностей $k \geqslant 4$. Построены бесконечные семейства циркулянтов, достигающих найденные оценки.

Ключевые слова: циркулянтная сеть, диаметр, максимальный порядок графа.

Введение

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k, n$ — целые числа такие, что

$$1 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k < n/2.$$

Граф C с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и множеством рёбер $E = \{(i,j) \mid |i-j| \equiv s_l \bmod n,\ l = \overline{1,k}\}$ называется *циркулянтным*, числа $S = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ — *образующими*, $(n; S)$ — *параметрическим описанием*, k — *размерностью*, n — *порядком* графа.

Циркулянтные сети (графы) [2, 4, 7] изучаются при проектировании и анализе вычислительных систем, в теории графов и дискретной математике, в качестве топологии для мультипроцессорных систем и компьютерных сетей. Циркулянтные графы применяются также как модели химических реакций и в теории кодирования при построении совершенных кодов, исправляющих ошибки [1]. Циркулянтные сети вида $C(n; 1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$ с образующими, представленными в виде степеней $s \geqslant 2$, назовём, следуя [12], *мультипликативными циркулянтами*.

Важнейшей метрической характеристикой графа является диаметр (оценивает максимальную структурную задержку в сети). *Диаметром* графа G называется $d(G) = \max\limits_{i,j \in V} d(i,j)$, где $d(i,j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j графа G. Для любых натуральных d и k через $M(d,k)$ обозначим максимально возможное (достижимое) натуральное n такое, что существует множество образующих $S =$

$(1, s_2, \ldots, s_k)$, при котором $d(C(n;S)) \leqslant d$. В [2, 4, 7] можно найти обзоры результатов по оценкам диаметра и достижимого порядка k-мерных, $k \geqslant 2$, циркулянтных графов.

Для $k = 2$ решена задача построения семейств двумерных циркулянтов с единичной образующей и максимальным порядком $M(d, 2) = 2d(d + 1) + 1$ при любом диаметре d (см., например, [2]).

Приведём известные результаты, касающиеся оценок диаметра и достижимого порядка k-мерных, $k \geqslant 3$, циркулянтных графов.

В [13] показано, что

$$M(d, k) \leqslant 1 + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i C_d^{k-i} 2^{k-i},$$

получена нижняя граница диаметра для любых n и k порядка $\frac{1}{2}(k!)^{1/k} n^{1/k}$ и доказано, что графы вида $C(n; 1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$, где $s \geqslant 3$ — нечётное число и $n = s^k$, имеют диаметр $d = k\lfloor s/2 \rfloor$.

Этот результат улучшен в [5]: пусть d и k — натуральные числа, $d \geqslant k \geqslant 3$, и пусть $p = \lfloor (d - k + 3)/k \rfloor$, тогда

$$M(d, k) \geqslant N = 2p \sum_{i=0}^{k-1} (4p)^i = \frac{1}{2}(4/k)^k d^k + O(d^{k-1}). \tag{1}$$

В [10, 11] рассмотрены свойства мультипликативных циркулянтных графов вида $C(n; 1, s, \ldots, s^{k-1})$ с нечётным $s \geqslant 3$ и $2s^{k-1} < n \leqslant s^k$ и получена общая формула для диаметра:

$$d(n; 1, s, s^2, \ldots, s^{k-1}) = (k - 1)\lfloor s/2 \rfloor + \lceil (n - s^{k-1})/(2s^{k-1}) \rceil. \tag{2}$$

В [12] исследовались свойства мультипликативных циркулянтов вида $C(n; 1, s, \ldots, s^{k-1})$ с чётным $s \geqslant 2$ и $n = s^k$ и получен их диаметр:

$$d(s^k; 1, s, s^2, \ldots, s^{k-1}) = ks/2 - \lfloor k/2 \rfloor.$$

Показано также, что мультипликативные циркулянтные сети как графы с образующими, представленными в виде степеней целого числа, имеют простые алгоритмы парного [11, 12] и трансляционного обменов [12], эффективны относительно трассировки интегральных схем, живучести и отказоустойчивости [10, 11].

Другие структурные характеристики, связанные с диаметром, для циркулянтных графов вида $C(s^k; 1, s, \ldots, s^{k-1})$ рассмотрены в [8]. В [6]

получены более точные оценки диаметра по сравнению с [13] для циркулянтов вида $C(n; 1, s, \ldots, s^{k-1})$, где n — простое число. В [7] рассмотрена задача уменьшения диаметра по сравнению с [13] для ориентированных мультипликативных циркулянтных сетей с произвольным n.

Следует отметить, что функция $M(d, k)$ для размерности $k = 3$ и любого диаметра d найдена [9] и построены бесконечные семейства трёхмерных циркулянтов с порядком, совпадающим с $M(d, 3)$. В [3] получена нижняя оценка достижимого числа вершин циркулянтов размерности четыре и любого нечётного диаметра $d > 1$, улучшенная на $O\left(\frac{3}{2}d^3\right)$ по сравнению с [5]. Этот результат является частным случаем теоремы 1 при $k = 4$.

Данная работа вносит вклад в исследование диаметра циркулянтных сетей и определение нижних оценок экстремальной функции $M(d, k)$ при $k \geqslant 4$. На основе изучения циркулянтов с образующими, представленными в виде степеней нечётного числа s, получены новые нижние оценки достижимого числа вершин циркулянтных сетей всех размерностей $k \geqslant 4$. Изучение свойств мультипликативных циркулянтов с чётным s является предметом следующей работы.

1. Новые семейства мультипликативных циркулянтных сетей

Рассмотрим множество мультипликативных циркулянтных сетей вида $C(n; 1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$, $k \geqslant 3$, с нечётным $s \geqslant 3$. В теореме 1 представлены два новых бесконечных семейства рассматриваемых сетей, которые улучшают известные оценки достижимого порядка циркулянтных графов. Исследование диаметров графов найденных семейств позволяет скорректировать формулу для диаметра, приведённую в 2006 г. в работе Пархами [10] для мультипликативных циркулянтов любой размерности. Далее $D(x)$, $0 \leqslant x < n$, обозначает длину кратчайшего пути из вершины 0 в вершину x.

Теорема 1. *Пусть $k \geqslant 3$, $s \geqslant 3$ — нечётное число, $S = (1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$. Если*

$$n = \lceil s/2 \rceil \sum_{i=0}^{k-2} s^i + \lfloor s/2 \rfloor s^{k-1}, \tag{3}$$

то

$$d(n; S) = \begin{cases} \frac{k}{2}\lceil s/2 \rceil - 1 & \text{\textit{при чётном } } k \text{ \textit{ или } } s \equiv 3 \bmod 4, \\ \lfloor \frac{k}{2}\lceil s/2 \rceil \rfloor & \text{\textit{при нечётном } } k \text{ \textit{ и } } s \equiv 1 \bmod 4. \end{cases} \tag{4}$$

Если

$$n = \lceil s/2 \rceil \sum_{i=0}^{k-1} s^i, \tag{5}$$

то

$$d(n; S) = \lfloor k/2 \cdot \lceil s/2 \rceil \rfloor. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим мультипликативный циркулянтный граф $C(n; 1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$, где $s \geqslant 3$ — нечётное число и значение n равно (3) или (5).

Для любой вершины $0 \leqslant x < n$ существует каноническое [12] разложение x по степеням s:

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} c_i s^i,$$

где $|c_i| \leqslant \lfloor s/2 \rfloor$, $i = \overline{0, k-2}$, $0 \leqslant c_{k-1} \leqslant \lfloor s/2 \rfloor$ в случае (3), $0 \leqslant c_{k-1} \leqslant \lceil s/2 \rceil$ в случае (5). Коэффициенты c_i получаются следующим образом: выбираем такое $c_0 \equiv x \bmod s$, что $|c_0| \leqslant \lfloor s/2 \rfloor$, в качестве c_i, $i = \overline{1, k-1}$, выбираем такие целые

$$c_i \equiv \frac{1}{s^i}\left(x - \sum_{j=0}^{i-1} c_j s^j\right) \bmod s,$$

что $|c_i| \leqslant \lfloor s/2 \rfloor$, $i = \overline{0, k-2}$, $0 \leqslant c_{k-1} \leqslant \lfloor s/2 \rfloor$ в случае (3), $0 \leqslant c_{k-1} \leqslant \lceil s/2 \rceil$ в случае (5).

Коэффициенты c_i, $i = \overline{0, k-1}$, являются координатами пути из 0 в x прямого направления — пути, в который максимальная образующая входит со знаком $+$. Длина этого пути $D^+(x)$ равна $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c_i|$. Имеем

$$x - n = \sum_{i=0}^{k-1} c'_i s^i,$$

где $c'_i = c_i - \lceil s/2 \rceil$, $i = \overline{0, k-2}$, $c'_{k-1} = c_{k-1} - \lfloor s/2 \rfloor$ в случае (3), $c'_{k-1} = c_{k-1} - \lceil s/2 \rceil$ в случае (5). Для $i = \overline{0, k-2}$ преобразуем коэффициенты c'_i в c''_i таким образом, чтобы выполнялось условие $|c''_i| \leqslant \lfloor s/2 \rfloor$, $i = \overline{0, k-2}$.

Коэффициенты c''_i, $i = \overline{0, k-1}$, являются координатами пути из 0 в $x-n$ обратного направления — пути, в который максимальная образующая входит со знаком $-$. Длина пути $D^-(x-n)$ равна $\sum\limits_{i=0}^{k-1} |c''_i|$. Для любой

вершины $0 \leqslant x < n$ длина кратчайшего пути удовлетворяет неравенству

$$D(x) \leqslant \min\{D^+(x), D^-(x-n)\}.$$

Случай 1. Пусть значение n равно (3). Покажем, что диаметр d графа $C(n; 1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$ равен (4). Для этого докажем, что для любой вершины $0 \leqslant x < n$ имеет место неравенство

$$D^+(x)+D^-(x-n) \leqslant k\lceil s/2\rceil-1 = \begin{cases} 2d+1 & \text{при чётном } k \text{ или } s \equiv 3 \bmod 4, \\ 2d & \text{при нечётном } k \text{ и } s \equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$$

Далее выполняется преобразование коэффициентов c_i' в c_i'' последовательно для $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

1. Если $i \in \overline{0, k-2}$ и $c_i \leqslant 0$, то заменяем c_i' на $c_i'' = c_i' + s$ и соответственно c_{i+1}' на $c_{i+1}'' = c_{i+1}' - 1$. Очевидно, при такой замене сумма $|c_i''| + |c_{i+1}''|$ не увеличивается по сравнению с суммой $|c_i'| + |c_{i+1}'|$. При этом $0 \leqslant c_i'' \leqslant \lfloor s/2\rfloor$ и

$$|c_i| + |c_i''| = \lfloor s/2\rfloor.$$

1a. Если $i = k-2$ или $c_{i+1} > 1$, то при $i = k-2$

$$|c_{k-1}| + |c_{k-1}''| = \lfloor s/2\rfloor + 1, \tag{7}$$

при $c_{i+1} > 1$

$$|c_{i+1}| + |c_{i+1}''| = \lceil s/2\rceil + 1.$$

Конец замены.

1b. Если $i < k-2$ и $c_{i+1} \leqslant 1$, то процесс замены коэффициентов продолжается: заменяем c_{i+1}'' на новое значение $c_{i+1}'' = c_{i+1}'' + s$ и соответственно c_{i+2}' — на $c_{i+2}'' = c_{i+2}' - 1$. При этом $-1 \leqslant c_{i+1}'' \leqslant \lfloor s/2\rfloor$ и

$$|c_{i+1}| + |c_{i+1}''| = \begin{cases} \lfloor s/2\rfloor - 1, & \text{если } -\lfloor s/2\rfloor < c_{i+1} \leqslant 0, \\ \lceil s/2\rceil, & \text{если } c_{i+1} \in \{-\lfloor s/2\rfloor, 1\}. \end{cases}$$

2. Увеличить i на 1 и перейти к п. 1a.

3. Если $i \in \overline{0, k-2}$ и $c_i > 0$, то $|c_i'| = |c_i - \lceil s/2\rceil| \leqslant \lfloor s/2\rfloor$. Тогда $c_i'' = c_i'$ и

$$|c_i| + |c_i''| = \lceil s/2\rceil.$$

Если $i = k-1$ и c'_{k-1} не изменялся при выполнении п. 1, то из условия $0 \leqslant c_{k-1} \leqslant \lfloor s/2 \rfloor$ следует, что $-\lfloor s/2 \rfloor \leqslant c''_{k-1} = c'_{k-1} \leqslant 0$ и

$$|c_{k-1}| + |c''_{k-1}| = \lfloor s/2 \rfloor. \tag{8}$$

Из пп. 1a и 1b следует, что если менялись коэффициенты c'_i для $i = \overline{j, j+p}$, то

$$\sum_{i=j}^{j+p} (|c_i| + |c''_i|) \leqslant (p+1)\lceil s/2 \rceil.$$

Учитывая это и суммируя результаты выполнения пп. 1–3, получаем для любой вершины $0 \leqslant x < n$

$$\sum_{i=0}^{k-1} (|c_i| + |c''_i|) \leqslant k\lceil s/2 \rceil - 1.$$

Следовательно, или $D^+(x) \leqslant d$, или $D^-(x-n) \leqslant d$. Покажем, что в данном графе существует хотя бы одна вершина x такая, что $D(x) = d$. Рассмотрим три возможных варианта.

(a) Пусть $k \geqslant 3$ — нечётное и $\lceil s/2 \rceil$ — нечётное числа. В этом случае n — чётное число и в качестве искомой вершины возьмём $x_0 = \frac{n}{2}$. Найдём каноническое разложение x_0 по степеням s:

$$x_0 = -\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} \sum_{i=0}^{(k-3)/2} s^{2i} + (\lfloor s/2 \rfloor/2 + 1) \sum_{i=0}^{(k-3)/2} s^{2i+1} + \frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} s^{k-1}.$$

Имеем

$$x_0 - n = -\frac{n}{2} = \frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} \sum_{i=0}^{(k-3)/2} s^{2i} - (\lfloor s/2 \rfloor/2 + 1) \sum_{i=0}^{(k-3)/2} s^{2i+1} - \frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} s^{k-1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| = \sum_{i=0}^{k-1} |c''_i| = \frac{k\lceil s/2 \rceil - 1}{2} = d.$$

Рассмотрение длин альтернативных путей из 0 в x_0 показывает, что они все больше d. Следовательно, $D(x_0) = d$.

(b) Пусть $\lceil s/2 \rceil$ — чётное число. В этом случае n — нечётное число при любом k и в качестве искомой вершины возьмём

$$x_0 = \frac{n + s^{k-1}}{2} = \frac{\lceil s/2 \rceil}{2} \sum_{i=0}^{k-1} s^i.$$

Имеем

$$x_0 - n = -\frac{\lceil s/2 \rceil}{2} \sum_{i=0}^{k-2} s^i - \left(\frac{\lceil s/2 \rceil}{2} - 1 \right) s^{k-1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| = \frac{k}{2} \lceil s/2 \rceil = d + 1, \quad \sum_{i=0}^{k-1} |c_i''| = d.$$

Длины всех других возможных путей из 0 в x_0 не меньше d. Следовательно, $D(x_0) = d$.

(c) Пусть $k \geqslant 4$ — чётное число и $\lceil s/2 \rceil$ — нечётное число. В этом случае n — нечётное число и в качестве искомой вершины возьмём

$$x_0 = \left(\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} + 1 \right) \sum_{i=0}^{k/2-1} s^{2i} + \frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} \sum_{i=0}^{k/2-1} s^{2i+1}.$$

Имеем

$$x_0 - n = -\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} \sum_{i=0}^{k/2-1} s^{2i} - \left(\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} + 1 \right) \sum_{i=0}^{k/2-2} s^{2i+1} - \frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} s^{k-1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| = \frac{k}{2} \lceil s/2 \rceil = d + 1, \quad \sum_{i=0}^{k-1} |c_i''| = d.$$

Длины всех других возможных путей из 0 в x_0 не меньше d. Следовательно, $D(x_0) = d$.

Случай 2. Пусть значение n равно (5). Покажем, что диаметр d графа $C(n; 1, s, s^2, \ldots, s^{k-1})$ равен (6). Для этого докажем, что для любой вершины $0 \leqslant x < n$ имеет место неравенство

$$D^+(x) + D^-(x-n) \leqslant k \lceil s/2 \rceil = \begin{cases} 2d & \text{при чётном } k \text{ или } s \equiv 3 \bmod 4, \\ 2d+1 & \text{при нечётном } k \text{ и } s \equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$$

Далее преобразование коэффициентов c_i' в c_i'' выполняется так же, как в случае 1 (пп. 1–3), только с заменой в (7) и (8) значения $\lfloor s/2 \rfloor$ на $\lceil s/2 \rceil$.

Суммируя результаты выполнения пп. 1–3, получаем для любой вершины $0 \leqslant x < n$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(|c_i| + |c_i''|) \leqslant k\lceil s/2 \rceil.$$

Следовательно, или $D^+(x) \leqslant d$, или $D^-(x-n) \leqslant d$. Остаётся показать, что в данном графе существует хотя бы одна вершина x такая, что $D(x) = d$. Рассмотрим три возможных варианта.

(a) Пусть $k \geqslant 4$ — чётное и $\lceil s/2 \rceil$ — нечётное числа. В этом случае n — чётное число и в качестве искомой вершины возьмём

$$x_0 = \frac{n}{2} = \frac{\lceil s/2 \rceil \sum\limits_{i=0}^{k-1} s^i}{2}.$$

Тогда $x_0 - n = -\frac{n}{2}$. Найдём каноническое разложение x_0 по степеням s:

$$x_0 = -\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} \sum_{i=0}^{k/2-1} s^{2i} + \left(\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} + 1\right) \sum_{i=0}^{k/2-1} s^{2i+1}.$$

Для канонических разложений x_0 и $x_0 - n$ по степеням s имеем

$$\sum_{i=0}^{k-1}|c_i| = \sum_{i=0}^{k-1}|c_i''| = \frac{k}{2}\lceil s/2 \rceil = d.$$

Длины всех других возможных путей из 0 в x_0 больше d. Следовательно, $D(x_0) = d$.

(b) Пусть $k \geqslant 3$ — нечётное и $\lceil s/2 \rceil$ — нечётное числа. В этом случае n — нечётное число и в качестве искомой вершины возьмём $x_0 = \frac{n+1}{2}$. Найдём каноническое разложение x_0 по степеням s:

$$x_0 = \left(\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} + 1\right) \sum_{i=0}^{(k-1)/2} s^{2i} - \frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} \sum_{i=0}^{(k-3)/2} s^{2i+1}.$$

Имеем

$$x_0 - n = -\frac{n-1}{2} = -\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} - \left(\frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} + 1\right) \sum_{i=1}^{(k-1)/2} s^{2i} + \frac{\lfloor s/2 \rfloor}{2} \sum_{i=0}^{(k-3)/2} s^{2i+1}.$$

Для канонических разложений x_0 и $x_0 - n$ по степеням s имеем

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| = \frac{k\lceil s/2\rceil + 1}{2} = d + 1$$

и

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i''| = \frac{k\lceil s/2\rceil - 1}{2} = d.$$

Длины всех других возможных путей из 0 в x_0 не меньше d. Следовательно, $D(x_0) = d$.

(c) Пусть $\lceil s/2\rceil$ — чётное число. В этом случае n — чётное число при любом k и в качестве искомой вершины возьмём

$$x_0 = \frac{n}{2} = \frac{\lceil s/2\rceil}{2} \sum_{i=0}^{k-1} s^i.$$

Тогда $x_0 - n = -\frac{n}{2}$. Для канонических разложений x_0 и $x_0 - n$ по степеням s имеем

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i| = \sum_{i=0}^{k-1} |c_i''| = \frac{k}{2}\lceil s/2\rceil = d.$$

Длины всех других возможных путей из 0 в x_0 больше d. Следовательно, $D(x_0) = d$. Теорема 1 доказана.

2. Новые нижние оценки функции $M(d,k)$

Теорема 1 позволяет улучшить нижние оценки функции $M(d,k)$ для всех размерностей $k \geqslant 4$.

Следствие 1. *Пусть* $k > 4$ *и* $d \geqslant 2k - 3$ *— целые числа,* $p = \lfloor (d+3)/k-1 \rfloor$. *Тогда*

$$M(d,k) \geqslant n = (2p+1) \sum_{i=0}^{k-1} (4p+1)^i. \tag{9}$$

Доказательство. Значение n следует из (5), если $s = 4p+1$. Из сравнения (1) и (9) видно, что $n > N$ при одних и тех же значениях $d \in D$, которые следуют из определения p, и для любого $p \geqslant 1$

$$D = \{(p+1)k - 3 + j \mid j = \overline{0, k-1}\}. \tag{10}$$

Покажем, что для заданного $p \geqslant 1$ граф $C(n; 1, s, \ldots, s^{k-1})$ имеет диаметр $d(n; S) \leqslant (p+1)k - 3$. Это следует из того, что $s = 4p+1$ и в силу (6) $d(n; S) = \lfloor \frac{k}{2}(2p+1) \rfloor$, а значит, $d(n; S) \leqslant kp + k - 3$ при всех $k \geqslant 5$. Следствие 1 доказано.

Для размерности $k = 4$ полученный ниже результат является обобщением теоремы 2 из [3] для всех целых $d \geqslant 5$.

Следствие 2. *Пусть $d \geqslant 5$ — целое число и $q = 2\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1$. Тогда*

$$M(d, 4) \geqslant n = \frac{q^4 + 1}{2} + q^2 + q.$$

Доказательство. Значение n следует из (3) при $k = 4$ и $s = q$. В силу (4) диаметр графа $C(n; 1, s, s^2, s^3)$ равен $d(n; S) = q$. Остаётся показать, что $n > N$ при любом $d \geqslant 5$.

Согласно (10) при $k = 4$ и любом $p \geqslant 1$ получаем

$$D = \{4p+1, 4p+2, 4p+3, 4p+4\}.$$

Для всех $d \in D$ имеем $N = 2p \sum\limits_{i=0}^{3} (4p)^i$. Если $d \in \{4p+1, 4p+2\}$, то $s = 4p+1$ и $n > N$. Если $d \in \{4p+3, 4p+4\}$, то $s = 4p+3$ и также $n > N$. Следствие 2 доказано.

Таким образом, найдены улучшенные оценки функции $M(d, k)$ и построены достигающие их семейства циркулянтных сетей размерностей $k \geqslant 4$, превосходящие по соотношению n/d семейства циркулянтов, полученные ранее [4, 5, 10, 12, 13]. Из сравнения диаметров графов семейств, полученных в теореме 1, и формулы (2) при $k \geqslant 3$ следует её справедливость при $s = 3$ для семейства (5). При $k \geqslant 4$ и нечётном $s > 3$ формула (2) опровергается найденными семействами графов и поэтому даёт только верхнюю оценку диаметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мартинес К., Стаффорд Э., Байвиде Р., Габидулин Э. М.** Представление гексагональных созвездий с помощью графов Эйзенштейна — Якоби // Пробл. передачи инф. — 2008. — Т. 44, вып. 1. — С. 3–13.
2. **Монахов О. Г., Монахова Э. А.** Параллельные системы с распределенной памятью: структуры и организация взаимодействий. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. — 242 с.
3. **Монахова Э. А.** Оптимизация циркулянтных сетей связи размерности четыре // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 3. — С. 58–64.

4. **Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distrib. Comput. — 1995. — Vol. 24. — P. 2–10.
5. **Chen S., Jia X.-D.** Undirected loop networks // Networks. — 1993. — Vol. 23. — P. 257–260.
6. **Garcia C., Sole P.** Diameter lower bounds for Waring graphs and multiloop networks // Discrete Math. — 1993. — Vol. 111. — P. 257–261.
7. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // Theor. Comput. Sci. — 2003.– Vol. 299. — P. 107–121.
8. **Liaw S.-C., Chang G. J., Cao F., Hsu D. F.** Fault-tolerant routing in circulant networks and cycle prefix networks // Ann. Combin. — 1998. — Vol. 2. — P. 165–172.
9. **Monakhova E.** Optimal triple loop networks with given transmission delay: topological design and routing // Proc. Int. Network Optimization Conf. (INOC'2003) (Evry/Paris, France). — 2003. — P. 410–415.
10. **Parhami B.** A class of odd-radix chordal ring networks // The CS'J J. Comput. Sci. Eng. — 2006. — Vol. 4, N 2–4. — P. 1–9.
11. **Parhami B.** Chordal rings based on symmetric odd-radix number systems // Proc. Int. Conf. Communications in Computing (Las Vegas, NV, June 27–30). Los Alamitos: IEEE Press, 2005. — P. 196–199.
12. **Stojmenovic I.** Multiplicative circulant networks. Topological properties and communication algorithms // Discrete Appl. Math. — 1997. — Vol. 77. — P. 281–305.
13. **Wong C. K., Coppersmith D.** A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. ACM. — 1974. — Vol. 21, N 3. — P. 392–402.

Монахова Эмилия Анатольевна,
e-mail: emilia@rav.sscc.ru

Статья поступила
10 марта 2010 г.
Переработанный вариант —
1 июля 2010 г.