ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2010. Том 17, № 6. С. 56–67

УДК 519.146

# О ЗАДАЧЕ КОМПАКТНОГО СУММИРОВАНИЯ ВЕКТОРОВ ВНУТРИ МИНИМАЛЬНОЙ ПОЛОСЫ

*А. С. Козлов*

**Аннотация.** Предложена новая задача компактного суммирования векторов. В качестве области суммирования рассматривается замкнутая полоса нефиксированного направления на плоскости. Цель — найти минимальную величину $\rho$ такую, что для любого ограниченного и уравновешенного семейства векторов существует полоса ширины $\rho$, внутри которой можно просуммировать это семейство векторов. Задача рассмотрена в трёх вариантах: строгом, нестрогом и $k$-нестрогом. В строгом случае запрещён выход частичных сумм за пределы области суммирования, в нестрогом случае запрещён выход двух подряд идущих частичных сумм, в $k$-нестрогом — выход $k+1$ подряд идущих частичных сумм. Получены первоначальные нетривиальные оценки для минимальной ширины полосы в каждом из трёх вариантов: $1 \leqslant \rho \leqslant \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leqslant \rho_{ns} \leqslant 1$ и $\frac{1}{k+1} \leqslant \rho_k \leqslant \frac{1}{2}$ при $k \geqslant 2$ соответственно.

**Ключевые слова:** суммирование векторов в полосе, компактное суммирование, нестрогое суммирование, эффективный алгоритм.

## Введение

Статья посвящена задачам строгого и нестрогого суммирования векторов евклидовой плоскости внутри полосы минимальной ширины. Подобными задачами занимаются с 1913 г., когда Штейниц [24] рассмотрел суммирование векторов в $\mathbb{R}^m$ внутри шара, радиус которого не зависит от числа векторов.

Пусть задано пространство $\mathbb{R}^m$ с произвольной нормой $s$. Назовём семейство векторов $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ в $\mathbb{R}^m$ таких, что $\|v_i\|_s \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$, и $\sum v_i = 0$, *ограниченным* и *уравновешенным*. Назовём *частичными суммами* векторы $\Sigma_k^\pi = \sum\limits_{i=1}^{k} v_{\pi(i)}$, $k = 1, \ldots, n$, где $\pi$ — некоторая перестановка. Штейниц [24] доказал, что для любого фиксированного $m$ существует такой фиксированный радиус $r$, что для любого ограниченного и уравновешенного семейства векторов в $\mathbb{R}^m$ существует перестановка, для которой все частичные суммы лежат внутри шара радиуса $r$

с центром в начале координат. Радиус $r$ не зависит от числа векторов в семействе $V$, а зависит только от размерности пространства $m$ и нормы $s$. Задаче оценки минимального радиуса суммирования ограниченного уравновешенного семейства векторов в пространствах различной размерности и для различных норм посвящены также работы Гросса [20], Бергстрёма [18], Дамстига и Гальперина [19], М. И. Кадеца [3], Беренда [17], С. В. Севастьянова [4, 5, 9], Банащика [12–15] и др. В обзоре [21] описаны многие результаты по этой задаче. Когда речь идёт о минимизации области суммирования, то говорят о задаче *компактного* суммирования векторов.

Затем в функциональном анализе потребовалась подобная задача, только с другой областью суммирования, когда каждая координата ограничивается отдельно. Например, в случае, когда абсолютное значение первой координаты ограниченно единицей, а остальных — константой, суммирование в $\mathbb{R}^m$ с нормой $l_\infty$ рассмотрено в [7, 16, 23].

В 1974 г. открыта связь между задачей суммирования векторов внутри минимального шара и некоторыми проблемами в теории расписаний [1, 4]. В дальнейшем она расширена на многие задачи типа open-shop, flow-shop и job-shop [8, 21]. Стало ясно, что оценки точности приближённого решения этих задач лучше, если для каждой задачи теории расписаний использовать свою индивидуальную область суммирования векторов (например, правильный треугольник или шестиугольник [22]). Для задачи flow-shop с тремя машинами подходящей областью оказался фиксированный угол на плоскости [6]. Вследствие этого возник интерес к задаче о суммировании векторов внутри минимального нефиксированного угла на плоскости [11] (задаче, которая не имеет известной связи с теорией расписаний).

Понятие нестрогого суммирования векторов получается ослаблением условия принадлежности всех частичных сумм области суммирования. Когда речь идёт о задачах нестрогого суммирования, для частичных сумм разрешается сколь угодно раз нарушать требование нахождения внутри области суммирования, однако при этом никакие две подряд идущие частичные суммы не должны выходить за пределы области одновременно. Именно задачи нестрогого суммирования используются для доказательства оценок в теории расписаний. Например, в [22] рассматривается несколько задач компактного суммирования векторов в нестрогом смысле, каждая из которых соответствует некоторой задаче теории расписаний. Причём подстройка к нуждам теории расписаний придала этим задачам вид весьма необычный по сравнению с первоначальным

пониманием компактного суммирования векторов. Область суммирования в обычном понимании в этих задачах заменена семейством полупространств в $\mathbb{R}^m$, и нестрогое суммирование относительно этого семейства понимается как нестрогое суммирование в каждом из полупространств. Под минимизацией области суммирования понимается минимизация целевой функции от параметров семейства полупространств. В этой же статье рассмотрены задачи нестрогого суммирования векторов внутри фиксированных ограниченных и неограниченных выпуклых множеств, удовлетворяющих определённым условиям.

В нашей статье рассматривается предложенная С. В. Августиновичем задача суммирования векторов внутри минимальной полосы нефиксированного направления на евклидовой плоскости. Легко доказать оценки $1 \leqslant \rho \leqslant 2$ минимальной ширины $\rho$ полосы суммирования. Получены нетривиальная оценка сверху $\rho \leqslant \frac{3}{2}$ и оценки $\frac{1}{2} \leqslant \rho_{ns} \leqslant 1$ минимальной ширины полосы $\rho_{ns}$ в случае нестрогого суммирования векторов. Верхняя оценка $\rho_{ns} \leqslant 1$ доказана в [10]. Здесь она получается в качестве «бесплатного приложения» к алгоритму получения оценки $\rho \leqslant \frac{3}{2}$, поскольку оценка для нестрогого суммирования достигается на той же самой перестановке векторов. Рассмотрено обобщение понятия нестрогого суммирования векторов на *$k$-нестрогое* суммирование, когда запрещается одновременный выход за пределы контролируемой области $k+1$ подряд идущих частичных сумм. Нестрогое суммирование является 1-нестрогим. Получены оценки $\frac{1}{k+1} \leqslant \rho_k \leqslant \frac{1}{2}$ при $k \geqslant 2$ минимальной ширины полосы суммирования $\rho_k$ в этом случае.

## 1. Постановки задач суммирования векторов внутри минимальной полосы

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^2$. *Полосой* в $\mathbb{R}^2$ будем называть замкнутую область между двумя произвольными параллельными прямыми, *шириной полосы* — расстояние между этими прямыми. Пусть семейство векторов $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ в $\mathbb{R}^2$ ограничено и уравновешено. Для такого семейства векторов и некоторой перестановки $\pi \in S_n$ рассмотрим частичные суммы $\Sigma_k^\pi = \sum\limits_{i=1}^{k} v_{\pi(i)}$, $k = 1, \ldots, n$. Если последовательно соединить частичные суммы $\Sigma_k^\pi$, то получим многоугольник, называемый *траекторией суммирования*. Будем говорить, что семейство $V$ *допускает строгое суммирование внутри области* $G$, если существует такая перестановка $\pi$, что все частичные суммы $\Sigma_k^\pi$ лежат в $G$. Определим величину $S(V)$ — минимальную ширину такой полосы для семейства $V$, что $V$ допускает строгое суммирование внутри этой

полосы. Нас будет интересовать величина $\rho = \sup\limits_V S(V)$ — *минимальная универсальная ширина полосы строгого суммирования*, где супремум берётся по всем ограниченным уравновешенным семействам векторов на плоскости. Понятно, что любое ограниченное уравновешенное семейство векторов $V$ на какой-то перестановке $\pi$ укладывается в полосу ширины $\rho$, что обосновывает «универсальность» данной величины применительно к любому такому семейству.

Будем говорить, что семейство $V$ *допускает $k$-нестрогое* ($k = 1, 2, \dots$) суммирование внутри области $G$, если существует такая перестановка $\pi$, что никакие $k+1$ частичные суммы, идущие подряд, не лежат вне $G$. При этом считается, что первая и последняя частичные суммы идут подряд (1-нестрогое суммирование будем кратко называть *нестрогим*). Аналогично $S(V)$ определим $S_{ns}(V)$ $(S_k(V))$ — минимальную ширину полосы, внутри которой можно просуммировать $V$ в нестрогом ($k$-нестрогом) смысле. Аналогично $\rho$ определим $\rho_{ns} = \sup\limits_V S_{ns}(V)$ и $\rho_k = \sup\limits_V S_k(V)$.

Задачи строгого, нестрого и $k$-нестрого суммирования внутри минимальной полосы заключаются в нахождении величин $\rho$, $\rho_{ns}$ и $\rho_k$ соответственно.

## 2. Задачи строгого и нестрогого суммирования векторов внутри минимальной полосы

Легко доказываются следующие оценки величины $\rho$:

$$1 \leqslant \rho \leqslant 2.$$

Для доказательства нижней оценки рассмотрим ограниченное семейство из $n$ единичных векторов таких, что каждый последующий получается из предыдущего поворотом на угол $\frac{2\pi}{n}$. Нетрудно видеть, что это семейство является уравновешенным. Для каждого такого семейства верно $S(V) \geqslant 1 - \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, в качестве $\varepsilon_n$ можно взять величину $1 - \cos\frac{\pi}{n}$. Идея этого примера состоит в том, что для каждого возможного направления полосы существует почти ортогональный вектор этого семейства, отклоняющийся от ортогонального направления не более, чем на угол $\frac{\pi}{n}$.

Оценка $\rho \leqslant 2$ доказывается следующим образом. Для начала заметим, что если мы выбрали направление полосы, то задача сводится к одномерному случаю: семейство векторов $V$ допускает компактное суммирование внутри полосы тогда и только тогда, когда множество проекций $V^*$ этого семейства на направление, ортогональное полосе, допускает

компактное суммирование внутри проекции этой полосы, т. е. внутри отрезка, длина которого равна ширине полосы. Зафиксируем произвольное направление полосы. Рассмотрим семейство $V^*$ проекций векторов из $V$ на ортогональное направление. Будем строить перестановку $\pi$ для проекций. Тем самым задача свелась к одномерной задаче о суммировании чисел с нулевой суммой внутри отрезка минимальной длины. Через $\Sigma_k^\pi$ в дальнейшем будем обозначать частичные суммы проекций (т. е. чисел). Индексы всех нулевых чисел из $V^*$ поставим в начало перестановки $\pi$. Если уже выбрано $k$ чисел и $\Sigma_k^\pi \leqslant 0$, то берём положительное число. Оно существует среди оставшихся, так как общая сумма чисел равна нулю. Если $\Sigma_k^\pi > 0$, то берём отрицательное. Действуя в соответствии с изложенной стратегией пока не закончатся числа, получим перестановку, «укладывающую» числа в отрезок $[-1, 1]$, т. е. перестановку, которая укладывает векторы из $V$ в полосу ширины 2.

Таким образом, оценки $1 \leqslant \rho \leqslant 2$ доказаны. Следующая теорема улучшает оценку сверху.

**Теорема 1.** *Верна оценка $\rho \leqslant \frac{3}{2}$ минимальной универсальной ширины полосы строгого суммирования векторов.*

Доказательство. Пусть $V$ — ограниченное и уравновешенное семейство векторов в $\mathbb{R}^2$. Возьмём полосу шириной 1, симметричную относительно начала координат. Произвольно выбрав ориентацию полосы, рассмотрим две оставшиеся области плоскости «слева» и «справа» от полосы (будем обозначать их через $L$ и $R$ соответственно). Подсемейства векторов $V \cap L$ и $V \cap R$ будем обозначать через $V_L$ и $V_R$ соответственно. При этом векторы, лежащие на границе полосы, можно как включать, так и не включать в $V_L$ и $V_R$. Пусть $N_L = |V_L|$, $N_R = |V_R|$. По понятным причинам можно повернуть полосу (и принять решение о включении/невключении векторов, лежащих на границе полосы, в семейства $V_L$ и $V_R$) так, чтобы выполнилось равенство $N_L = N_R$. Это критерий выбора направления полосы. Как только мы выбрали направление полосы, задача сводится к одномерному случаю.

Ясно, что перестановка векторов семейства $V$ «укладывает» частичные суммы в полосу ширины $l$ тогда и только тогда, когда эта же перестановка «укладывает» проекции векторов этого семейства на направление, ортогональное полосе, в отрезок длины $l$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно просуммировать проекции векторов из $V$ в отрезке длины $\frac{3}{2}$.

Векторы из $V_L \cup V_R$ назовём *длинными*, а оставшиеся векторы из $V$ (лежащие в полосе) — *короткими*.

Прямую, на которую осуществляем проецирование векторов из $V$, выберем в качестве координатной оси и ориентируем её в сторону области $R$. (Это означает, что все векторы из $R$ имеют «положительные» координаты, а все векторы из $L$ — «отрицательные».) Можно без ограничения общности считать сумму проекций длинных векторов неотрицательной. Проекцию вектора $v_i$ будем обозначать через $v_i^*$. Обозначим через $V^*$, $L^*$ и $R^*$ множества проекций векторов из $V$, $V_L$ и $V_R$ соответственно. Проекции длинных векторов назовём *длинными*, а коротких векторов — *короткими*. Занумеруем проекции из $R^*$ в порядке убывания, а из $L^*$ — в порядке возрастания. В соответствии с полученной нумерацией обозначим проекции из $R^*$ и $L^*$ через $r_i^*$ и $l_i^*$, $i = 1, \dots, N_R = N_L$.

Докажем неравенство

$$\max_i (r_i^* + l_i^*) - \min_i (r_i^* + l_i^*) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Для этого достаточно показать, что для любых $i, j$ $(i < j)$ выполнено

$$|(r_i^* + l_i^*) - (r_j^* + l_j^*)| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Пусть $i < j$. Тогда $r_i^* \geqslant r_j^*$ и $l_i^* \leqslant l_j^*$, $z_1 \doteq r_i^* - r_j^*$, $z_2 \doteq l_j^* - l_i^* \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $|z_1 - z_2| \leqslant \frac{1}{2}$. Отсюда следует неравенство (2).

Обозначим через $K_+$, $K_-$ множества неотрицательных и отрицательных коротких проекций соответственно. Назовём пару длинных проекций $(r_i^*, l_i^*)$ *неотрицательной*, если их сумма неотрицательна, в противном случае — *отрицательной*. Множества неотрицательных и отрицательных пар длинных проекций обозначим через $D_+$ и $D_-$ соответственно. Пусть $\alpha = \max\limits_{i=1,\dots,N_L} (r_i^* + l_i^*)$.

Алгоритм построения перестановки $\pi$.

При построении перестановки $\pi$ удаляются числа из $K_+$, $K_-$ и пары чисел из $D_+$, $D_-$, поэтому множества $K_+, K_-, D_+, D_-$ будем считать изменяющимися. Алгоритм состоит из двух этапов.

Этап 1. Строим перестановку $\pi$ только с использованием пар длинных проекций из $D_+, D_-$; этап продолжается, пока не закончатся пары из $D_-$. При этом для каждого чётного $k$ частичная сумма $\Sigma_k^\pi$ будет находиться в промежутке $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Первой выберем произвольную пару чисел $(r_i^*, l_i^*)$ из $D_-$. Если $D_- = \varnothing$, то переходим к этапу 2. В качестве первого и второго числа в перестановке $\pi$ берём номера $t$ и $m$ векторов $v_t = r_i$ и $v_m = l_i$. Для удобства в дальнейшем будем считать, что

*$t$ — номер вектора $r_i$*. Пусть $k$ — чётное число уже выбранных векторов. Тогда если $\Sigma_k^\pi \geqslant -\alpha$, то берём любую пару чисел $(r_i^*, l_i^*)$ из $D_-$, а в качестве следующих чисел перестановки берём номера векторов $r_i$, $l_i$ (в таком порядке). В этом случае будем говорить, что *добавили пару чисел $(r_i^*, l_i^*)$ к частичной сумме.* Если $\Sigma_k^\pi < -\alpha$, то прибавляем к текущей частичной сумме произвольную пару $(r_i^*, l_i^*)$ из $D_+$. (Она существует, поскольку сумма всех пар чисел из $D_+, D_-$ неотрицательна.) Заметим, учитывая (1), что все частичные суммы на первом этапе алгоритма лежат в отрезке $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, а сумма, полученная в конце этапа, будет лежать в $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Этап 2. Объединяем числа $K_-$, $K_+$ и суммы пар из $D_+$ в одно множество. Поскольку числа из этого множества по модулю не превосходят $\frac{1}{2}$, их можно строго просуммировать в отрезке $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$, начиная с частичной суммы, оставшейся после этапа 1. Заменяя суммы пар из $D_+$ самими этими парами, получаем нестрогое суммирование чисел в отрезке $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$ и строгое суммирование в $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. (Последнее следует из того, что пара из $D_+$ прибавляется к текущей сумме только в том случае, когда эта сумма отрицательна.) Таким образом, получаем перестановку $\pi$, которая «укладывает» проекции из $V^*$ в отрезок $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Непосредственно из описания алгоритма следует, что получаемая им перестановка векторов обеспечивает их нестрогое суммирование в отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, откуда следует оценка $\rho_{ns} \leqslant 1$. Наш алгоритм имеет трудоёмкость $O(n \log n)$. Это следует из того, что искомый поворот полосы, обеспечивающий выполнение равенства $N_L = N_R$, можно найти методом бисекции, просмотрев $O(\log n)$ положений полосы. При этом каждый просмотр занимает $O(n)$ единиц времени. На самом деле, верен более сильный результат, доказанный в [10] (оценка верна для любого заданного направления полосы; искомая перестановка векторов находится с трудоёмкостью $O(n)$). Следующая теорема устанавливает оценки для $\rho_{ns}$ сверху и снизу.

**Теорема 2.** *Минимальная универсальная ширина полосы нестрогого суммирования векторов удовлетворяет оценкам $\frac{1}{2} \leqslant \rho_{ns} \leqslant 1$.*

Доказательство. Оценка $\rho_{ns} \leqslant 1$ доказана выше. Оценка $\rho_{ns} \geqslant \frac{1}{2}$ следует из более общей оценки $\rho_k \geqslant \frac{1}{k+1}$, доказываемой в следующем разделе. Теорема 2 доказана.

## 3. $k$-Нестрогое суммирование векторов внутри минимальной полосы

При нестрогом суммировании векторов мы разрешаем частичным суммам иногда выходить за пределы «контрольной» (или «желаемой») области, при соблюдении условия, что никакие две идущие подряд частичные суммы не находятся вне этой области. Однако представляет интерес и более общая ситуация, когда мы разрешаем не более чем $k$ идущим подряд суммам выходить за пределы области. Мы называем это *$k$-нестрогим суммированием векторов* в заданной области $G$. В частности, представляют интерес следующие вопросы: убывает ли минимальная универсальная ширина полосы с ростом $k$ монотонно или же фиксируется на некоторой величине? Если верен первый ответ, то как быстро убывает величина $\rho_k$ с ростом $k$ и стремится ли она к нулю в пределе? Доказываемые ниже теоремы, хотя и не дают исчерпывающих ответов на поставленные вопросы, однако предоставляют материал для дальнейших исследований в этом направлении.

**Определение 1.** Полоса $\{x \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(x, P) \leqslant \varepsilon\}$, где $\operatorname{dist}(x, P) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in P\}$, называется *$\varepsilon$-расширением полосы $P$*.

**Теорема 3.** *Для $k$-нестрогого суммирования векторов на плоскости верна следующая оценка минимальной универсальной ширины полосы*:

$$\rho_k \geqslant \frac{1}{k+1}, \quad k \geqslant 1.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых $k \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ существует такое ограниченное уравновешенное семейство векторов $V_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$, что

$$S(V_\varepsilon) \geqslant \frac{1}{k+1} - \varepsilon. \tag{3}$$

Семейство $V_\varepsilon$ состоит из $k+2$ векторов единичной длины ($k+1$ из которых направлены по гипотенузе, а $(k+2)$-й — по катету прямоугольного треугольника, рис. 1) и из $N$ «мелких» векторов (направленных по другому катету прямоугольного треугольника), каждый из которых имеет длину $\varepsilon_N = \frac{\sqrt{k^2+2k}}{N}$. Выберем $N$ так, чтобы выполнялось неравенство $2k\varepsilon_N \leqslant \varepsilon$.

Для доказательства (3) нужно рассмотреть произвольную траекторию суммирования векторов из $V_\varepsilon$ и доказать, что ширина любой полосы, содержащей её в $k$-нестрогом смысле, не меньше $\frac{1}{k+1} - \varepsilon$. На рис. 2 показан общий вид траектории суммирования $V_\varepsilon$, вектор $AB$ — это един-

ственный единичный вектор, непараллельный остальным.

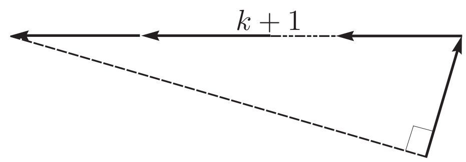


Рис. 1. Семейство $V_\varepsilon$

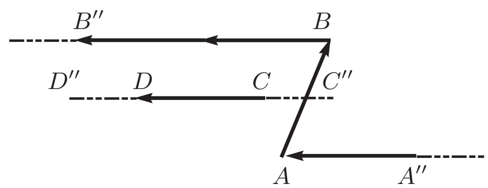


Рис. 2. Траектория суммирования векторов $V_\varepsilon$

Рассмотрим произвольную полосу $P$, которая $k$-нестрого содержит траекторию суммирования векторов $V_\varepsilon$. Найдём ближайшую к $A$ частичную сумму, принадлежащую $P$ и предшествующую $A$ в траектории суммирования (возможно, это сама $A$), назовём её $A'$. Аналогично найдём ближайшую к $B$ частичную сумму, принадлежащую $P$ и следующую за $B$ в траектории суммирования, назовём её $B'$. Часть траектории суммирования $A'$–$A$–$B$–$B'$ по определению $k$-нестрогого суммирования содержит не более $k+1$ векторов. Удалим из этой части траектории суммирования все мелкие векторы, фиксировав точки $A$ и $B$. При этом мы сдвинем точку $A'$ в $A''$, а $B'$ в $B''$, причём расстояния $A'A''$ и $B'B''$ не превосходят $k\varepsilon_N$, поэтому $A''$ и $B''$ лежат в $k\varepsilon_N$-расширении $P$. Будем рассматривать $A''B''$ как вектор, начало и конец которого лежат в точках $A''$ и $B''$.

Отрезок траектории суммирования $A''$–$A$–$B$–$B''$ содержит не более $k+1$ единичных векторов. Поскольку всего единичных векторов $k+2$, существует единичный вектор $X = CD$, не входящий в $A''$–$A$–$B$–$B''$. Аналогично тому, как мы нашли точки $A'$ и $B'$ для вектора $AB$, находим точки $C'$ и $D'$ для вектора $CD$. Точка $C'$ — первая частичная сумма, предшествующая точке $C$ и лежащая в $P$, точка $D'$ — первая частичная сумма после $D$, которая лежит в $P$. Удаляем мелкие векторы из отрезка траектории $C'$–$C$–$D$–$D'$, фиксировав точки $C$ и $D$. При этом $C'$ переходит в $C''$, $D'$ — в $D''$, причём расстояния $C'$–$C''$, $D'$–$D''$ не превосходят $k\varepsilon_N$, поэтому точки $C''$ и $D''$ лежат в $k\varepsilon_N$-расширении $P$.

Поскольку все векторы траектории $C''$–$C$–$D$–$D''$ лежат на одной прямой, вектор $CD$ также содержится в $k\varepsilon_N$-расширении полосы $P$.

Нетрудно показать, что минимальная ширина $k\varepsilon_N$-расширения полосы $P$, содержащего точки $A'', B'', C, D$, не может быть меньше минимальной высоты в треугольнике со сторонами $A''B''$, $X$ и $A''B''+X$. С другой стороны, эта высота равна $\sin\alpha$, где $\alpha$ — угол между $X$ и $A''B''+X$. Заметим, что $\alpha$ минимален, когда число единичных векторов в $A''$–$A$–$B$–$B''$ равно $k+1$, при этом $\sin\alpha = \frac{1}{k+1}$. Так как ширина полосы $P$ на $2k\varepsilon_N$ меньше ширины её $k\varepsilon_N$-расширения, она не меньше $\frac{1}{k+1} - 2k\varepsilon_N$, отсюда следует (3) и утверждение теоремы. Теорема 3 доказана.

Как легко видеть, доказанная в теореме 3 оценка ширины минимальной полосы $k$-нестрогого суммирования данного семейства векторов точна. Она достигается на траектории суммирования, изображённой на рис. 2. Логично предположить, что чем больше $k$, тем меньше $\rho_k$, причём строго меньше. Хотя вопрос равенства между $\rho$ и $\rho_{ns}$ остаётся открытым, из следующей теоремы следует, что $\rho > \rho_2$.

**Теорема 4.** *Для $k$-нестрогого суммирования векторов на плоскости верна следующая оценка минимальной универсальной ширины полосы*:

$$\rho_k \leqslant \frac{1}{2}, \quad k \geqslant 2.$$

Доказательство. Заметим, что $\rho_k$ — невозрастающая по $k$ величина, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $\rho_2 \leqslant \frac{1}{2}$.

Рассмотрим произвольное ограниченное и уравновешенное семейство векторов $V$. Повторим процедуру выбора полосы для семейства векторов $V$, описанную в теореме 1. В результате получим направление полосы $P$, множество $D$ пар длинных проекций (причём суммарное число в каждой паре лежит в промежутке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$) и множество $K$ коротких проекций из этого же отрезка. Поскольку все полученные числа по модулю не превосходят $\frac{1}{2}$, их можно 1-нестрого просуммировать в отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ алгоритмом, описанным в [10]. Добавляем числа к текущей частичной сумме по правилу: если имеется число, оставляющее частичную сумму в пределах отрезка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, то добавляем его. Если такого числа нет, то имеются положительное и отрицательное числа. Тогда при добавлении их по очереди частичная сумма останется в отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Поскольку, учитывая (1), эти положительное и отрицательное числа не могут соответствовать двум парам длинных проекций, указанный алгоритм даст

2-нестрогое суммирование исходных чисел (проекций исходных векторов) в этом отрезке. Теорема 4 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Белов И. С., Столин Я. Н.** Алгоритм в одномаршрутной задаче календарного планирования // Математическая экономика и функциональный анализ. — М.: Наука, 1974. — С. 248–257.
2. **Гринберг В. С., Севастьянов С. В.** Значение константы Штейница // Функцион. анализ и его прил. — 1980. — Т. 14. — С. 56–57.
3. **Кадец М. И.** Об одном свойстве векторных ломаных в $n$-мерном пространстве // Успехи мат. наук. — 1953. — Т. 8. — С. 139–143.
4. **Севастьянов С. В.** Об асимптотическом подходе к некоторым задачам теории расписаний // Управляемые системы. — 1975. — № 14. — С. 40–51.
5. **Севастьянов С. В.** О приближенном решении некоторых задач теории расписаний // Методы дискрет. анализа. — 1978. — Т. 32. — С. 66–75.
6. **Севастьянов С. В.** Алгоритмы с оценками для задач Джонсона и Акерса — Фридмана в случае трех станков // Управляемые системы. —1988 — № 22. — С. 51–57.
7. **Севастьянов С. В.** Теорема о компактном суммировании векторов в двумерном пространстве // Методы дискрет. анализа. — 1988. — Т. 47. — С. 61–65.
8. **Севастьянов С. В.** Геометрия в теории расписаний // Модели и методы оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1988. — С. 226–261. (Тр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Т. 10.)
9. **Севастьянов С. В.** О компактном суммировании векторов // Дискрет. математика. — 1991. — Т. 3, № 3. — С. 66–72.
10. **Севастьянов С. В.** Нестрогое суммирование векторов на плоскости и его применение в задачах теории расписаний // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 1995. — Т. 2, № 2. —С. 69–100.
11. **Avgustinovich S. V., Sevast'janov S. V.** Vector summation within minimal angle // Comput. Geom. — 1993. — Vol. 2. — P. 235–239.
12. **Banaszczyk W.** The Steinitz constant of the plane // J. Reine Angew. Math. — 1987. — Bd 373. — S. 218–220.
13. **Banaszczyk W.** A note on the Steinitz constant of the Euclidean plane // C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can. — 1990. — Vol. 12, N 4. — P. 97–102.
14. **Banaszczyk W.** The Steinitz lemma on rearrangement of series for nuclear spaces // J. Reine Angew. Math. — 1990. — Bd 403. — S. 187–200.
15. **Banaszczyk W.** The Steinitz lemma in $l^2_\infty$ // Period. Math. Hung. — 1991. — Vol. 22. — P. 183–186.
16. **Barany I., Grinberg V. S.** A vector-sum theorem in two-dimensional space // Period. Math. Hung. — 1985. — Vol. 16. — P. 135–138.
17. **Behrend F. A.** The Steinitz–Gross theorem on sums of vectors // Can. J. Math. — 1954. — Vol. 6. — P. 108–124.

18. **Bergsröm V.** Zwei Satze über ebene Vectorpolygone // Abhendleungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. — 1931. — Bd 8. — S. 206–214.
19. **Damsteeg I., Halperin I.** The Steinitz–Gross theorem on sums of vectors // Proc. Trans. Royal Soc. Canada. — 1950. — Vol. XLIV. — P. 31–35.
20. **Gross W.** Bedingt konvergente Reihen // Monatsh. Math. Physik. — 1917. — Bd 28. — S. 221–237.
21. **Sevast'janov S. V.** On some geometric methods in scheduling theory: a survey // Discrete Appl. Math. — 1994. — Vol. 55. — P. 59–82.
22. **Sevastianov S.** Nonstrict vector summation in multi-operation scheduling // Ann. Oper. Res. — 1998. — Vol. 83. — P. 179–211.
23. **Sevast'janov S. V., Banaszczyk W.** To the Steinitz lemma in coordinate form // Diskrete Math. — 1997. — Bd 169. — S. 145–152.
24. **Steinitz E.** Bedingt konvergente Reihen und convexe Systeme // J. Reine Angew. Math. — 1913. — Bd 143. — S. 128–175.

*Козлов Александр Сергеевич,*
e-mail: alexandr_kozlov@ngs.ru

Статья поступила
16 июня 2010 г.

Переработанный вариант —
28 августа 2010 г.