ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2010. Том 17, № 6. С. 77–95

УДК 519.1

О СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСКАХ РЁБЕРНЫХ ГРАФОВ

Д. Б. Хорошилова

Аннотация. Исследуются совершенные раскраски рёберных графов. Даётся описание всех возможных совершенных раскрасок рёберных графов в два цвета и перечисляются все матрицы параметров для таких раскрасок. Кроме того, предлагается простая конструкция, позволяющая строить совершенные раскраски произвольных рёберных графов, и осуществляется характеризация совершенных раскрасок, которые могут быть получены с её помощью.

Ключевые слова: совершенная раскраска, рёберный граф.

Введение

Данная работа представляет собой очередное исследование, посвящённое так называемым совершенным раскраскам, или равномерным разбиениям, которые являются одним из видов алгебраических структур на графах. Существует два основных направления подобных исследований. Первое заключается в изучении свойств совершенных раскрасок как алгебраических структур, связи этих свойств с некоторыми дополнительными характеристиками графов, такими как регулярность, транзитивность, дистанционная инвариантность (см., например, [2, 11]); при этом неизбежно применяются алгебраические методы. Второе направление состоит в исследовании всевозможных совершенных раскрасок заданного графа или класса графов; здесь алгебраические приёмы также бывают полезны, но зачастую алгебраический подход найти не удаётся, поэтому приходится задействовать комбинаторно-перечислительные рассуждения. Ранее изучались совершенные раскраски таких графов и классов графов, как плоские триангуляции минимальной степени пять [1], графы двоичных и q-значных n-мерных гиперкубов [6], графы бесконечных решёток [4, 5, 9, 12], графы Джонсона [3, 8, 13]. В данной статье речь пойдёт о совершенных раскрасках рёберных графов.

1. Основные определения

Прежде всего дадим определение совершенной раскраски.

Определение 1. Раскраска вершин обыкновенного неориентированного графа в цвета из множества $\{1, 2, \ldots, s\}$ называется *совершенной с матрицей параметров* $M = (m_{ij})$ порядка s, если для каждой вершины цвета i число смежных с ней вершин цвета j равно m_{ij} для любых $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

В литературе вместо фразы «совершенная раскраска вершин графа» часто употребляются выражения «совершенная раскраска графа» или просто «совершенная раскраска».

Очевидно, что если M — матрица параметров некоторой совершенной раскраски, то её элементы являются неотрицательными целыми числами, причём $m_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $m_{ji} = 0$ (поскольку отношение смежности симметрично, т. е. носитель матрицы M симметричен). Ввиду вышесказанного всюду далее матрица параметров есть квадратная матрица с симметричным носителем без нулевых строк и столбцов (иначе говоря, требуется, чтобы в раскраске были использованы все цвета), элементами которой являются целые неотрицательные числа.

Напомним, что *рёберным графом* $L(G)$ графа G называется граф, вершины которого соответствуют рёбрам графа G, и две вершины в графе $L(G)$ *смежны* тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра графа G имеют общую вершину.

Далее вместо совершенной раскраски вершин графа $L(G)$ — рёберного графа графа G — мы будем говорить о совершенной раскраске *рёбер* графа G. Подразумевается, что это одно и то же.

Наконец введём несколько технических понятий, которые будут нам постоянно требоваться при изучении совершенных раскрасок рёберных графов.

Полной степенью ребра называется число всех смежных с ним рёбер данного графа. Граф называется *рёберно-регулярным*, если полные степени всех его рёбер совпадают. Нетрудно убедиться, что связный граф является рёберно-регулярным в том и только в том случае, когда он регулярный или двудольный бирегулярный.

Определение 2. Будем говорить, что

регулярный граф является (d_1, d_2)-*разбиваемым*, если существует разбиение его рёбер на два регулярных остовных подграфа с полными степенями рёбер d_1 и d_2;

двудольный бирегулярный граф $G = (V', V'', E)$ является (d_1, d_2)-*разбиваемым*, если существует разбиение $E = E_1 \sqcup E_2$ его рёбер на два двудольных бирегулярных подграфа $G_1 = (V', V'', E_1)$ и $G_2 = (V', V'', E_2)$ с

полными степенями рёбер d_1 и d_2 соответственно;

граф, каждая компонента связности которого является либо регулярным, либо двудольным бирегулярным графом, является (d_1, d_2)-*разбиваемым*, если все его компоненты связности являются (d_1, d_2)-разбиваемыми.

2. Некоторые свойства совершенных раскрасок рёберных графов

В этом разделе получены несколько вспомогательных утверждений, которые потребуются в дальнейшем при доказательстве характеризационных теорем, а также приведена конструкция, порождающая богатый класс совершенных раскрасок произвольных рёберных графов.

Пусть дана совершенная раскраска рёбер графа G в цвета $\{1, 2, \ldots, s\}$ с матрицей параметров M. Каждой вершине u графа G сопоставим s-мерный вектор, у которого i-я координата равна числу инцидентных вершине u рёбер цвета i, и будем рассматривать его как «цвет» вершины.

Определение 3. Раскраску вершин графа, полученную из совершенной раскраски его рёбер описанным выше способом, будем называть *индуцированной данной раскраской рёбер* или *рёберно-индуцированной*.

Всюду далее будем обозначать вектор, задающий цвет вершины u в рёберно-индуцированной раскраске, через $C(u)$, его j-ю компоненту через $C_j(u)$; кроме того, введём обозначения M_i для i-й строки матрицы параметров M и E_i для s-мерной вектор-строки с единицей на i-й позиции и нулями на всех остальных.

Лемма 1. *Любая рёберно-индуцированная раскраска вершин графа является совершенной.*

Доказательство. Если $\{u, v\} \in E(G)$ — ребро цвета i, то очевидно верно

$$C(u) + C(v) = M_i + 2E_i, \tag{1}$$

здесь $C(u)$ и $C(v)$ рассматриваются как вектор-строки. Из (1) следует, что для любой вершины цвета C^1 число её соседей цвета C^2 равно

$$\sum_{i:\ C^1 + C^2 = M_i + 2E_i} C_i^1.$$

Очевидно, что это число зависит только от C^1 и C^2, но не от выбора конкретной вершины, следовательно, раскраска вершин является совершенной. Лемма 1 доказана.

Определение 4. Пусть дана совершенная раскраска рёбер графа G в цвета $\{1,2,\ldots,s\}$ с матрицей параметров M. Для $i,j\in\{1,2,\ldots,s\}$ будем называть вектор $\Delta(i,j)=M_i-M_j+2(E_i-E_j)$ *разностью* цветов i и j.

Лемма 2. *Пусть имеется путь в графе G, состоящий из чередующихся рёбер цветов i и j. Тогда цвета нечётных (в нумерации, начинающейся с нуля) вершин указанного пути в рёберно-индуцированной раскраске, рассматриваемые как целочисленные векторы, образуют векторную арифметическую прогрессию с вектором-разностью, совпадающим с разностью $\Delta(i,j)$ цветов i и j, а цвета чётных вершин образуют векторную арифметическую прогрессию с противоположным вектором-разностью.*

Доказательство. Пусть $(u_0,e_1,u_1,\ldots,e_n,u_n)$ — некоторый путь в графе G, состоящий из чередующихся рёбер цветов i и j. Напомним, что $C(u)$ для $u\in V(G)$ является s-мерным вектором с неотрицательными целочисленными координатами. Посмотрим, как связаны между собой цвета вершин рассматриваемого пути.

Поскольку рёбра с чётными номерами покрашены цветом j, рёбра с нечётными номерами — цветом i, верны равенства:

$$C(u_{2k})+C(u_{2k+1})-2E_i=M_i,\quad k\in\{0,\ldots,\lfloor n/2\rfloor\},$$

$$C(u_{2k-1})+C(u_{2k})-2E_j=M_j,\quad k\in\{1,\ldots,\lfloor n/2\rfloor\}.$$

Отсюда следует, что $C(u_{k+2})-C(u_k)=(-1)^k\left(M_j-M_i+2(E_j-E_i)\right)$. Лемма 2 доказана.

Определение 5. Будем называть *непродолжаемым* в графе G путь $(u_0,e_1,u_1,e_2,\ldots,e_n,u_n)$, состоящий из чередующихся рёбер цветов i и j, такой, что вершина u_0 не инцидентна никакому ребру цвета j, а вершина u_n не инцидентна никакому ребру цвета j, если n чётно, и никакому ребру цвета i, если n нечётно.

Замечание 1. Очевидно, что непродолжаемый путь есть максимальный по включению путь в графе G, состоящий из чередующихся рёбер цветов i и j.

Пусть дана совершенная раскраска рёбер графа G в цвета $\{1,2,\ldots,s\}$ с матрицей параметров M. Если $i,j\in\{1,2,\ldots,s\}$, $i\neq j$ и $m_{ij}\neq 0$ (т. е. любое ребро цвета i смежно по крайней мере с одним ребром цвета j и наоборот), будем говорить, что цвета i и j *видят* друг друга.

Лемма 3. *В графе G с заданной совершенной раскраской рёбер существует непродолжаемый путь, состоящий из чередующихся рёбер двух*

различных видящих друг друга цветов, тогда и только тогда, когда разность указанных цветов отлична от нуля.

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Рассмотрим непродолжаемый путь $(u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, e_n, u_n)$ в графе G, состоящий из чередующихся рёбер цветов i и j. Так как данные цвета видят друг друга, должно выполняться $n > 1$. Для рёберно-индуцированной раскраски вершин графа G верно $C_j(u_0) = 0,\ C_j(u_2) \geqslant 1$. Но отсюда по предыдущей лемме следует, что $\Delta(i, j) = -C(u_2) + C(u_0) \neq 0$ (так как верно $\Delta_j(i, j) = -C_j(u_2) + C_j(u_0) \leqslant -1 < 0$).

Перейдём к доказательству достаточности. Пусть вершина u инцидентна некоторому ребру цвета i. Тогда по определению совершенной раскраски рёбер и в силу равенства (1) верно $0 \leqslant C(u) \leqslant M_i + E_i$ (имеется в виду, что неравенства выполняются покоординатно). Аналогично, для любой вершины v, инцидентной ребру цвета j, верно $0 \leqslant C(v) \leqslant M_j + E_j$. Поскольку $\Delta(i, j) \neq 0$, в любой векторной арифметической прогрессии с разностью $\Delta(i, j)$ существует лишь конечное число членов, ограниченных нулевым вектором снизу и вектором $\max\{M_i + E_i, M_j + E_j\}$ сверху (максимум берётся покоординатно). То же верно и для разности $\Delta(j, i) = -\Delta(i, j)$.

Искомый непродолжаемый путь можно построить следующим образом: возьмём путь, состоящий из одного ребра цвета i. Если этот путь ни с какого конца нельзя продолжить ребром цвета j, то утверждение доказано; в противном случае выбираем любое из возможных продолжений и смотрим, является ли оно, в свою очередь, продолжаемым. Из приведённых выше рассуждений и из леммы 2 следует, что за конечное число шагов мы получим непродолжаемый путь, состоящий из чередующихся рёбер цветов i и j. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть задана совершенная раскраска рёбер графа G. Тогда для любого выбранного цвета подграф графа G, образованный рёбрами указанного цвета, представляет собой объединение регулярных и двудольных бирегулярных графов.*

Доказательство. Рассмотрим ребро цвета i, концевые вершины которого в рёберно-индуцированной раскраске имеют цвета C^1 и C^2 (возможно, эти цвета совпадают). Тогда в силу (1) верно $C^1 + C^2 = M_i + 2E_i$, и если у любого другого ребра цвета i один из концов покрашен цветом C^1, то второй конец будет иметь цвет $M_i + 2E_i - C^1 = C^2$. Кроме того, так как рёберно-индуцированная раскраска вершин является совершенной, для всех вершин одного и того же цвета число инцидентных им рёбер цвета i одинаково. Следовательно, каждая компонента связно-

сти в подграфе графа G, образованном рёбрами цвета i, является либо регулярным графом, множество вершин которого совпадает с множеством всех вершин графа G, имеющих в индуцированной раскраске цвет C: $2C = M_i + 2E_i$, либо двудольным бирегулярным графом с долями, представляющими собой множества всех вершин графа G, имеющих в индуцированной раскраске некоторые цвета C^1 и C^2 соответственно, такие, что $C^1 + C^2 = M_i + 2E_i$. Лемма 4 доказана.

Определение 6. Пусть имеется совершенная раскраска рёбер графа G с матрицей параметров M. Цвета i и j называются *сопряжёнными* в данной раскраске, если подграф $G[i,j]$ графа G, индуцированный рёбрами цветов i и j, представляет собой объединение регулярных и двудольных бирегулярных графов, причём пара подграфов графа $G[i,j]$, индуцированных рёбрами цветов i и j соответственно, образует (m_{ii}, m_{jj})-разбиение графа $G[i,j]$.

Лемма 5. *Пусть имеется совершенная раскраска рёбер графа G с матрицей параметров M. Тогда для любых двух выбранных цветов i и j следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *цвета i и j сопряжены в данной совершенной раскраске*;

(ii) $M_i + 2E_i = M_j + 2E_j$;

(iii) $m_{ii} + 2 = m_{ji},\ m_{ij} = m_{jj} + 2$;

(iv) *в графе G существует цикл ненулевой чётной длины из чередующихся рёбер цветов i и j.*

Доказательство. Из леммы 3 и замечания 1 с очевидностью следует, что утверждения (ii) и (iv) равносильны. Утверждение (iii) непосредственно следует из (ii). Предполагая, что выполнено (iii) и применяя лемму 3 к подграфу $G[i,j]$ графа G, индуцированному рёбрами цветов i и j, получим, что в данном подграфе, а следовательно, и в самом графе G, существует цикл ненулевой чётной длины из чередующихся рёбер цветов i и j, т. е. из (iii) следует (iv). Далее, очевидно из определения (d_1, d_2)-разбиваемого графа, что утверждение (iii) следует из (i). Для завершения доказательства покажем, что (ii) влечёт (i). Действительно, имея в виду, что для любого ребра $\{u, v\}$ цвета i или j выполнено $C(u) + C(v) = M_i + 2E_i = M_j + 2E_j$ и хотя бы одной из вершин u, v инцидентны одновременно рёбра цветов i и j (так как $m_{ij} \neq 0$), и проводя рассуждения, подобные тем, что использовались при доказательстве леммы 4, легко показать, что подграф $G[i,j]$ графа G, индуцированный рёбрами цветов i и j, представляет собой объединение регулярных и двудольных бирегулярных графов, причём пара его подграфов, инду-

цированных рёбрами цветов i и j соответственно, образует его (m_{ii}, m_{jj})-разбиение, иначе говоря, цвета i и j являются сопряжёнными. Лемма 5 доказана.

Легко видеть, что отношение сопряжённости является отношением эквивалентности на множестве $\{1, 2, \dots, s\}$ и, следовательно, задаёт разбиение данного множества на смежные классы. Занумеруем указанные смежные классы числами $1, \dots, t$. По имеющейся совершенной раскраске рёбер графа G в цвета $\{1, 2, \dots, s\}$ построим соответствующую ей *фактор-раскраску* рёбер графа G в цвета $\{1, 2, \dots, t\}$ следующим образом: ребро будет иметь цвет k в фактор-раскраске тогда и только тогда, когда его цвет в исходной раскраске принадлежит классу смежности с номером k. Другими словами, фактор-раскраска рёбер получается из исходной совершенной раскраски рёбер объединением в один цвет всех цветов, принадлежащих одному и тому же классу смежности по отношению сопряжённости. Несложно убедиться, что фактор-раскраска является совершенной.

Определение 7. Две совершенные раскраски рёбер графа G будем называть *эквивалентными*, если их фактор-раскраски совпадают с точностью до переименования цветов.

Замечание 2. Эквивалентные раскраски, вообще говоря, могут содержать различное число цветов. Очевидно, что описанное отношение действительно является отношением эквивалентности на множестве совершенных раскрасок.

3. Вершинно-индуцированные раскраски

В этой части работы предложена простая богатая конструкция для совершенных раскрасок рёбер произвольных графов и доказано утверждение, характеризующее раскраски, которые могут быть получены с помощью указанной конструкции.

Пусть имеется совершенная раскраска вершин графа G с матрицей параметров M. Покрасим каждое ребро графа G неупорядоченной парой цветов $\{i, j\}$, в которые окрашены концы этого ребра.

Определение 8. Раскраску рёбер графа, полученную из раскраски его вершин вышеуказанным способом, будем называть *индуцированной данной совершенной раскраской вершин*, или *вершинно-индуцированной.*

В [10] доказана следующая

Лемма 6. *Любая вершинно-индуцированная раскраска рёбер является совершенной.*

Лемма 7. *Любая вершинно-индуцированная совершенная раскраска рёбер графа совпадает со своей фактор-раскраской с точностью до переименования цветов.*

Доказательство. Действительно, пусть имеется совершенная раскраска вершин графа G в цвета $\{1, 2, \ldots, s\}$ с матрицей параметров M. Тогда по определению вершинно-индуцированной раскраски рёбер для $i \in \{1, \ldots, s\}$ множество рёбер цвета $\{i, i\}$ есть в точности множество всех рёбер графа G, соединяющих две вершины цвета i. Аналогично для $i, j \in \{1, \ldots, s\}$, $i \neq j$, множество рёбер цвета $\{i, j\}$ есть множество всех рёбер графа G, соединяющих вершину цвета i с вершиной цвета j. Таким образом, никакие два подграфа графа G, индуцированные рёбрами двух различных цветов, не могут иметь одно и то же множество вершин, и поэтому не могут образовывать разбиение графа, являющегося объединением регулярных и двудольных бирегулярных графов. Следовательно, в имеющейся раскраске никакие два цвета не являются смежными, т. е. она совпадает со своей фактор-раскраской с точностью до переименования цветов. Лемма 7 доказана

Пусть дана совершенная раскраска рёбер графа G в цвета $\{1, \ldots, s\}$ с матрицей параметров M. Зафиксируем цвет $i \in \{1, \ldots, s\}$. По лемме 4 подграф $G[i]$ графа G, индуцированный рёбрами цвета i, представляет собой объединение регулярных и двудольных бирегулярных графов. Предположим, что указанный подграф является (d, d')-разбиваемым. Введём новый цвет $s+1$ и перекрасим в этот цвет рёбра одного из двух соответствующих подграфов графа $G[i]$. В результате такой операции произвольной вершине u графа G, которой прежде было инцидентно $C_i(u)$ рёбер цвета i, будет инцидентно $(d+2)/(d+d'+4) \cdot C_i(u)$ рёбер i и $(d+2)/(d+d'+4) \cdot C_i(u)$ цвета $s+1$. Таким образом, очевидно, что новая раскраска будет совершенной с матрицей параметров M' порядка $s+1$, определяемой правилами:

1) $m'_{jk} = m_{jk}, \quad j \neq s+1,\ k \notin \{i, s+1\}$;
2) $m'_{(s+1)k} = m_{ik}, \quad k \notin \{i, s+1\}$;
3) $m'_{k(s+1)} = \frac{d'+2}{d+2} m_{ki}, \quad k \notin \{i, s+1\}$;
4) $m'_{ii} = d,\ m'_{(s+1)(s+1)} = d',\ m'_{i(s+1)} = d'+2,\ m'_{(s+1)i} = d+2$.

Также легко понять, что совершенная раскраска вершин графа G, индуцированная новой совершенной раскраской рёбер, совпадает с совершенной раскраской вершин, индуцированной исходной совершенной раскраской рёбер графа G, с точностью до переименования цветов.

Определение 9. Добавление нового цвета в совершенную раскраску

рёбер графа описанным выше способом будем называть *операцией расщепления цветов.*

Замечание 3. Пусть дана некоторая совершенная раскраска рёбер графа G, совпадающая с точностью до переименования цветов со своей фактор-раскраской (т. е. раскраска, в которой никакие два цвета не являются сопряжёнными). Тогда очевидно, что произвольная совершенная раскраска указанного графа эквивалентна данной тогда и только тогда, когда может быть получена из неё многократным применением операции расщепления цветов и, возможно, переименованием цветов.

Лемма 8. *Совершенная раскраска рёбер графа G эквивалентна некоторой вершинно-индуцированной совершенной раскраске рёбер данного графа тогда и только тогда, когда для любых двух рёбер, покрашенных одним и тем же цветом, совпадают неупорядоченные пары цветов их концевых вершин в рёберно-индуцированной раскраске.*

Доказательство. Докажем необходимость. По лемме 7 фактор-раскраска исходной совершенной раскраски рёбер графа G совпадает с некоторой вершинно-индуцированной раскраской с точностью до переименования цветов. Из определения очевидно, что в любой вершинно-индуцированной раскраске для любых двух рёбер $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_2, v_2\}$, покрашенных одним и тем же цветом, верно

$$\{C(u_1),\ C(v_1)\} = \{C(u_2), C(v_2)\}.$$

Следовательно, для исходной совершенной раскраски рёбер графа G для любых двух рёбер (u_1, v_1) и (u_2, v_2), цвета которых сопряжены, выполняется $\{C(u_1),\ C(v_1)\} = \{C(u_2),\ C(v_2)\}$. В частности, указанное верно для двух рёбер одного и того же цвета.

Для доказательства достаточности сначала заметим, что если цвета i и j сопряжены, то по лемме 5 выполнено $M_i + 2E_i = M_j + 2E_j$, откуда следует, что для любых двух рёбер $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_2, v_2\}$, покрашенных цветами i и j соответственно, верно

$$C(u_1) + C(v_1) = M_i + 2E_i = M_j + 2E_j = C(u_2) + C(v_2).$$

Кроме того, обоим концам ребра $\{u_2, v_2\}$ инцидентны рёбра цвета i, следовательно, верно $C(u_2),\ C(v_2) \in \{C(u_1),\ C(v_1)\}$. Пусть для определённости $C(u_2) = C(u_1)$, тогда $C(v_2) = C(u_1) + C(v_1) - C(u_2) = C(v_1)$, т. е. $\{C(u_1),\ C(v_1)\} = \{C(u_2),\ C(v_2)\}$. Теперь рассмотрим новую совершенную раскраску рёбер графа G, индуцированную совершенной раскраской вершин графа G, индуцированной исходной совершенной раскраской

рёбер, проще говоря, раскраску, в которой ребру $\{u, v\}$ сопоставлен цвет $\{C(u), C(v)\}$. Очевидно, что в новой раскраске рёбра, покрашенные в исходной раскраске сопряжёнными цветами, будут покрашены одним и тем же цветом. Кроме того, ясно, что рёбра $\{u_1, v_1\}$ и $\{u_2, v_2\}$, цвета которых в исходной раскраске не сопряжены, в новой раскраске будут покрашены различно (поскольку суммы $C(u_1) + C(v_1)$ и $C(u_2) + C(v_2)$ должны отличаться). Таким образом, новая раскраска, которая является вершинно-индуцированной, совпадает с точностью до переименования цветов с фактор-раскраской исходной совершенной раскраски. Отсюда немедленно следует утверждение леммы. Лемма 8 доказана.

4. Совершенные раскраски рёберных графов в два цвета

Если ограничиться рассмотрением совершенных раскрасок, в которых используются только два цвета (так называемых 2-раскрасок), то удаётся получить их полную характеризацию для рёберных графов.

Перед формулировкой характеризационной теоремы введём ещё одно техническое определение и докажем несложное утверждение.

Определение 10. Пусть $V_0, \ldots, V_n$, $n \geqslant 1$, — непересекающиеся множества. На множествах вершин V_i и V_{i+1}, $i = 0, \ldots, n-1$, построим непустой двудольный бирегулярный граф, степени вершин в каждой доле обозначим через d_i^+ и d_{i+1}^- соответственно. На множестве вершин V_n построим регулярный граф степени d_n (возможно, $d_n = 0$). Положим $d_0^- = 0$, $d_n^+ = d_n$.

Полученный граф называется (a, b, c, d)-*каскадным*, если выполняются следующие условия:

1) для всех чётных $i = 0, \ldots, n-1$ верно $d_i^+ + d_{i+1}^- = a+2$ и $d_i^- + d_{i+1}^+ = b$;

2) для всех нечётных $i = 1, \ldots, n-1$ верно $d_i^+ + d_{i+1}^- = d + 2$ и $d_i^- + d_{i+1}^+ = c$;

3) если $d_n \neq 0$, n чётно, то верно $2d_n = a + 2$ и $2d_n^- = b$;

4) если $d_n \neq 0$, n нечётно, то верно $2d_n = d + 2$ и $2d_n^- = c$.

Замечание 4. Очевидно, что в (a, b, c, d)-каскадном графе G множества $V_0, \ldots, V_n$ образуют дистанционное расслоение (distance partition [11]) множества его вершин V относительно подмножества V_0 (а также относительно V_n). Тогда из условий 1–4 немедленно следует, что V_0 и V_n являются полностью регулярными кодами (completely regular subsets [11]) в графе G.

Замечание 5. Легко понять, что, покрасив рёбра бирегулярных графов с долями V_i и V_{i+1} цветом 1 для чётных i и цветом 2 для нечётных i,

$i = 0, \ldots, n-1$, и покрасив рёбра регулярного графа с множеством вершин V_n цветом 1, если n чётно, и цветом 2, если n нечётно, мы получим совершенную раскраску заданного (a, b, c, d)-каскадного графа с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Несложно показать, пользуясь леммой 8, что построенная совершенная раскраска рёбер данного (a, b, c, d)-каскадного графа не эквивалентна никакой его вершинно-индуцированной совершенной раскраске при $n > 3$, при $n = 3$ в случае $d_3 \neq 0$, или $d_0^+ \neq d_3^-$, или $d_1^+ \neq d_2^-$, и при $n = 2$ для $d_2 \neq 0$.

Замечание 6. Двудольный бирегулярный граф с мощностями долей n_1 и n_2 и степенями вершин в каждой доле d_1 и d_2 соответственно существует тогда и только тогда, когда $d_1 \leqslant n_2,\ d_2 \leqslant n_1$ и выполняется $n_1/n_2 = d_2/d_1$. Если для данных n_1, n_2, d_1, d_2 двудольный бирегулярный граф существует, то он не обязательно единственный, следовательно, (a, b, c, d)-каскадный граф не определяется однозначно множествами V_i и величинами $d_i^+,\ d_{i+1}^-,\ i = 0, \ldots, n-1$, и d_n.

Лемма 9. *Зафиксируем набор параметров (a, b, c, d). Для заданных $n \geqslant 1$ и величин $d_i^+ > 0,\ d_{i+1}^- > 0,\ i = 0, \ldots, n-1$, и $d_n \geqslant 0$, удовлетворяющих условиям 1–4 с выбранными параметрами (a, b, c, d), всегда существует соответствующий (a, b, c, d)-каскадный граф.*

Доказательство. Заметим, что если $|V_n|$ чётна и $|V_n|/2 \geqslant d_n$, то в силу замечания 6 существует двудольный регулярный граф степени d_n с множеством вершин V_n. Для доказательства существования требуемого (a, b, c, d)-каскадного графа осталось убедиться, что можно выбрать множества $V_0, \ldots, V_n$ так, что выполняются неравенства

$$|V_i| \geqslant d_{i+1}^-,\ |V_{i+1}| \geqslant d_i^+, \quad |V_{i+1}|/|V_i| = d_i^+/d_{i+1}^-$$

и $|V_n|$ — чётное число, большее либо равное $2d_n$. Этого можно добиться, положив

$$|V_0| = 2(d_n + 1) \prod_{i=0}^{n-1} d_{i+1}^- d_i^+, \quad |V_{i+1}| = |V_i| \frac{d_i^+}{d_{i+1}^-}, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Лемма 9 доказана.

Характеризационная теорема для совершенных 2-раскрасок рёберных графов формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Совершенная 2-раскраска рёбер связного графа G с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ существует тогда и только тогда, когда верно*

хотя бы одно из двух утверждений:

1) $a+b=c+d,\ a+2=c,\ d+2=b$ *и граф* G *является регулярным или двудольным бирегулярным* (a,d)*-разбиваемым*;

2) *граф* G *либо* (a,b,c,d)*-каскадный, либо* (d,c,b,a)*-каскадный.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости рассмотрим два случая.

Случай 1. Все вершины графа G видят рёбра обоих цветов. Из леммы 3 и замечания 2 следует, что в этом случае верно $\Delta(1,2) = M_1 - M_2 + 2(E_1 - E_2) = 0$. Но такое равенство означает, что индуцированная раскраска вершин графа G есть либо раскраска в один цвет, либо раскраска в два цвета с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & b' \\ c' & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что в первом случае граф G обязан быть регулярным, а во втором — двудольным бирегулярным. Поскольку цвет вершины в индуцированной раскраске есть вектор (в данном случае двумерный), i-я компонента которого равняется числу инцидентных данной вершине рёбер цвета i, то подграфы графа G, индуцированные рёбрами каждого цвета, также будут регулярными в первом случае и двудольными бирегулярными во втором, т. е. будут образовывать разбиение графа G.

Случай 2. В графе G существует вершина, которой инцидентны рёбра только одного цвета. С точностью до переименования цветов можно считать, что некоторая вершина u_0 графа G видит только рёбра цвета 1. Докажем, что в этом случае граф G является (a,b,c,d)-каскадным.

Поскольку граф G связен и его рёбра покрашены в два цвета, существует путь $(u_0,\{u_0,u_1\},u_1,\{u_1,u_2\},u_2)$ такой, что ребро $\{u_0,u_1\}$ имеет цвет 1, ребро $\{u_1,u_2\}$ — цвет 2. По выбору u_0 верно $C_2(u_0)=0$, для u_2 выполняется $C_2(u_2)\geqslant 1$, следовательно, верно $C(u_0)-C(u_2)\neq 0$. С другой стороны, из леммы 2 следует, что $C(u_0)-C(u_2)=\Delta(1,2)$. По лемме 3 отсюда вытекает, что в графе существует непродолжаемый путь из рёбер чередующихся цветов, который можно построить способом, описанным в доказательстве леммы 3. В частности, начиная строить такой путь с ребра $\{u_0,u_1\}$, мы получим непродолжаемый путь

$$(u_0,\{u_0,u_1\},u_1,\ldots,\{u_{l-1},u_l\},u_l),$$

состоящий из чередующихся рёбер цветов 1 и 2 и начинающийся в вершине u_0.

1. Если данный путь симметричен, т. е. l нечётно и $C(u_{\frac{l-1}{2}})=C(u_{\frac{l+1}{2}})$ (откуда по определению рёберно-индуцированной раскраски легко следует $C(u_k)=C(u_{l-k}),\ k=0,\ldots,\frac{l-1}{2}$), то положим $n=\frac{l-1}{2}$. Выберем для

$k = 0, \ldots, \frac{l-1}{2}$ в качестве множества V_k множество всех вершин, покрашенных в рёберно-индуцированной раскраске цветом $C(u_k)$, и положим $d_k^- = C_2(u_k)$, $d_k^+ = C_1(u_k)$ для чётных k и $d_k^- = C_1(u_k)$, $d_k^+ = C_2(u_k)$ для нечётных k (напомним, что d_n^+ мы договорились считать равным d_n).

2. Если построенный непродолжаемый путь несимметричен, то положим $n = l$, для $k = 0, \ldots, l$ в качестве V_k возьмём множество всех вершин цвета $C(u_k)$ и положим $d_k^- = C_2(u_k)$, $d_k^+ = C_1(u_k)$ при чётном k, $d_k^- = C_1(u_k)$, $d_k^+ = C_2(u_k)$ при нечётном k.

Легко проверить, что для выбранных значений d_i^+ и d_{i+1}^- требования 1–4 из определения (a, b, c, d)-каскадного графа выполняются по определению совершенной раскраски рёбер. Кроме того, из определений рёберно-индуцированной раскраски и множеств V_k ясно, что если u — вершина из множества V_k, то любая смежная с ней вершина v в зависимости от цвета ребра $\{u, v\}$ принадлежит либо множеству V_{k-1}, либо множеству V_{k+1} (считаем, что множество V_{-1} пусто, а множество V_{n+1} совпадает с V_n, если $d_n \neq 0$, и пусто в противном случае). Следовательно, граф G является (a, b, c, d)-каскадным. Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема даёт некоторую информацию о матрицах параметров совершенных раскрасок рёберных графов в два цвета.

Определение 11. Матрица параметров M называется *допустимой* для графа G, если существует совершенная раскраска данного графа с соответствующими параметрами.

Замечание 7. Несложно убедиться, что если матрица параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является допустимой для некоторого связного графа G, то с необходимостью выполняется $b, c \neq 0$.

Зная структуру совершенных 2-раскрасок рёберных графов, можно перечислить все матрицы параметров, допустимые для таких графов.

Теорема 2. *Матрица параметров* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b, c \neq 0$, *является допустимой для некоторого связного рёберного графа тогда и только тогда, когда выполнено ровно одно из трёх условий*:

(i) $a + 2 = c$, $d + 2 = b$ *и наибольший общий делитель чисел* b *и* c *отличен от единицы*;

(ii) $a + 2 > c$ *и* $d + 2 > b$;

(iii) *либо* $a + 2 \leqslant c$, $d + 2 > b$ *и существует натуральное число* k *такое,*

что выполняется

$$b = \frac{k}{k+1}\cdot(d+2) \ \text{ и } \ k(c-(a+2)) < a+1,$$

$$\text{либо } d+2 \leqslant b, \quad a+2 > c$$

и существует натуральное число k такое, что выполняется

$$c = \frac{k}{k+1}\cdot(a+2) \ \text{ и } \ k(b-(d+2)) < d+1.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b, c \neq 0$, является допустимой для связного рёберного графа G. По теореме 1 отсюда следует, что верно одно из двух утверждений.

1. Граф G является регулярным или двудольным бирегулярным (a, d)-разбиваемым, и верно $a+b = c+d$, $a+2 = c$, $d+2 = b$. Возьмём произвольное ребро графа G. Пусть одному концу выбранного ребра инцидентно b_1 рёбер цвета 2 и c_1 рёбер цвета 1, а второму концу — $b - b_1$ рёбер цвета 2 и $c - c_1$ рёбер цвета 1. Поскольку граф G является регулярным или двудольным бирегулярным и его подграфы, образованные рёбрами цветов 1 и 2 соответственно, образуют его (a, d)-разбиение, верно $\frac{b_1}{b-b_1} = \frac{c_1}{c-c_1}$, откуда следует $bc_1 = cb_1$. Так как $b_1 < b$ и $c_1 < c$, такое равенство возможно тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель чисел b и c отличен от единицы.

2. Граф G является либо (a, b, c, d)-каскадным, либо (d, c, b, a)-каскадным. Пусть G — (a, b, c, d)-каскадный граф, рассмотрим путь $(u_0, \{u_0, u_1\}, u_1, \{u_1, u_2\}, u_2)$, $u_k \in V_k$, $k = 0, 1, 2$, в графе G. Ребро $\{u_0, u_1\}$ покрашено цветом 1, ребро $\{u_1, u_2\}$ — цветом 2. Зная цвета вершин u_0, u_1, u_2 в рёберно-индуцированной раскраске, можем восстановить матрицу параметров совершенной раскраски рёбер. В частности, верно $b = C_2(u_1)$, $d = C_2(u_1) + C_2(u_2) - 2$. Поскольку ребро $\{u_1, u_2\}$ покрашено цветом 2, верно $C_2(u_2) \geqslant 1$, откуда следует $d+2 > b$. Аналогично показывается, что если граф G является (d, c, b, a)-каскадным, то верно $a+2 > c$.

Заметим, что в случае, когда d_n равно нулю и n чётно, (a, b, c, d)-каскадный граф является также (d, b, c, a)-каскадным, следовательно, одновременно выполнены неравенства $d+2 > b$ и $a+2 > c$, т. е. реализуется случай (ii) из утверждения теоремы.

Осталось рассмотреть единственный случай, когда граф G является (для определённости) (a, b, c, d)-каскадным, но не (d, c, b, a)-каскадным. В этом случае, как мы уже показали, верно $d+2 > b$; кроме того, мы можем считать $a+2 \leqslant c$, потому что если это не так, то реализуется случай

(ii) из утверждения теоремы. Поскольку G является (a,b,c,d)-каскадным графом, но не (d,c,b,a)-каскадным, в нём нет вершин, которым инцидентны только рёбра цвета 2. Следовательно, если $(u_0,\{u_0,u_1\},u_1,\ldots,\{u_{l-1},u_l\},u_l)$ — непродолжаемый путь из рёбер чередующихся цветов в графе G, то рёбра $\{u_0,u_1\}$ и $\{u_{l-1},u_l\}$ покрашены цветом 1. Отсюда, в частности, следует, что l нечётно. Положим $k=\frac{l-1}{2}$. Так как $\Delta(1,2)=((a+2)-c,b-(d+2))$ и $C(u_l)=C(u_1)+k\Delta(1,2)$ в силу утверждения (ii), имеем

$$C_2(u_l)=C_2(u_1)+k(b-(d+2)).$$

Вершинам u_1 и u_l инцидентны только рёбра цвета 1, поэтому верно $C_2(u_l)=0$, $C_2(u_1)=b$. В результате получаем равенство $(k+1)b=k(d+2)$.

Из выражения для $C(u_l)$ следует, что

$$C_1(u_l)=C_1(u_1)+k(a+2-c).$$

Поскольку вершина u_l инцидентна хотя бы одному ребру цвета 1, верно $C_1(u_l)>0$. Так как любое ребро цвета 1 видит a рёбер своего цвета, верно $C_1(u_1)\leqslant a+1$. Из вышесказанного следует неравенство $k(c-a+2)<a+1$.

Достаточность. Для доказательства достаточности в каждом из трёх случаев построим по данной матрице параметров граф и его 2-раскраску, имеющую требуемые параметры.

(i) Пусть $a+2=c$, $d+2=b$ и наибольший общий делитель чисел b и c равен q, $q>1$. Рассмотрим полный двудольный граф с долями мощности $\frac{1}{q}(b+c)$ и $\frac{q-1}{q}(b+c)$. Выберем в нём двудольный бирегулярный остовный подграф со степенями вершин в каждой доле $\frac{q-1}{q}c$ и $\frac{1}{q}c$ соответственно и покрасим рёбра выбранного подграфа цветом 1, а рёбра его дополнения цветом 2. Мы получили совершенную 2-раскраску рёбер графа $K_{\frac{1}{q}(b+c),\frac{q-1}{q}(b+c)}$ с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(ii) Пусть $a+2>c$ и $d+2>b$. Построим (a,b,c,d)-каскадный граф вида: $n=2$, $d_0^+=a+2-c$, $d_1^-=c$, $d_1^+=b$, $d_2^-=d+2-b$, $d_2=0$. Покрасив рёбра двудольного бирегулярного графа с долями V_0 и V_1 цветом 1, а рёбра двудольного бирегулярного графа с долями V_1 и V_2 цветом 2, получим совершенную 2-раскраску рёбер построенного (a,b,c,d)-каскадного графа с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(iii) Пусть (для определённости) $a+2\leqslant c$, $d+2>b$ и существует натуральное число k такое, что $b=\frac{k}{k+1}\cdot(d+2)$ и $k(c-(a+2))<a+1$. Будем

строить (a,b,c,d)-каскадный граф так, чтобы он содержал непродолжаемый путь $(u_0,\{u_0,u_1\},u_1,\ldots,\{u_{l-1},u_l\},u_l)$, состоящий из чередующихся рёбер цветов 1 и 2, для которого $l=2k+1$, $C(u_0)=(1,0)$, $C(u_1)=(a+1,b)$ и выполнено

$$C(u_{2j})=C(u_0)+j(c-(a+2),d+2-b),\quad j=0,\ldots,k,$$

$$C(u_{2j+1})=C(u_1)-j(c-(a+2),d+2-b),\quad j=0,\ldots,k.$$

Заметим, что из неравенств $a+2\leqslant c$, $d+2>b$ следует, что $C(u_{2j})>0$ (покоординатно), $j=0,\ldots,k$. Кроме того, имеем

$$C(u_{2j+1})=(a+1-j(c-(a+2)),b-j(d+2-b)),\quad j=0,\ldots,k,$$

поэтому из условий на k вытекает, что верно $C_1(u_{2j+1})>0$, $j=0,\ldots,k$, $C_2(u_{2j+1})>0$, $j=0,\ldots,k-1$, $C_2(u_l)=0$.

Построим (a,b,c,d)-каскадный граф и его 2-раскраску следующим образом: в качестве n возьмём l — число вершин в непродолжаемом пути — и для $j=0,\ldots,n$ при чётном j положим $d_j^-=C_2(u_j)$, $d_j^+=C_1(u_j)$, а при нечётном j положим $d_j^-=C_1(u_j)$, $d_j^+=C_2(u_j)$. (Ещё раз напомним, что по договорённости $d_n^+=d_n$). Несложно проверить, что d_i^+ и d_{i+1}^- удовлетворяют требованиям 1–4 из определения (a,b,c,d)-каскадного графа. Построим соответствующий (a,b,c,d)-каскадный граф (это возможно по лемме 9). По замечанию 6 на таком графе естественным образом задаётся совершенная раскраска с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Теорема 2 доказана.

Так как регулярные графы образуют один из классов графов, допускающих разнообразные нетривиальные совершенные раскраски, интерес представляет следующее

Следствие 1. *Матрица параметров* $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $b,c\neq 0$, *является допустимой для регулярного рёберного графа тогда и только тогда, когда* $a+b=c+d$ *и выполнено ровно одно из двух условий*:

(i) $a+2=c$, $d+2=b$ *и наибольший общий делитель чисел* b *и* c *отличен от единицы*;

(ii) $a+2>c$ *и* $d+2>b$.

Доказательство. Применив теорему 2 и заметив, что условие (iii) этой теоремы исключается в силу требования $a+b=c+d$, получим утверждение следствия. Следствие 1 доказано.

Кроме того, из доказанной теоремы можно извлечь некоторые ограничения на матрицы параметров совершенных раскрасок рёберных графов в произвольное число цветов.

Следствие 2. *Пусть дана совершенная раскраска рёбер графа G с матрицей параметров M. Тогда для любых двух видящих друг друга цветов данной раскраски верны следующие утверждения*:

(i) *минор* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *матрицы M, образованный пересечением её строк и столбцов, соответствующих двум выбранным цветам, удовлетворяет одному из условий* (i)–(iii) *теоремы* 2;

(ii) *если матрица* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *удовлетворяет условию* (i), *то выбранные цвета сопряжены в данной раскраске и любая компонента связности в подграфе графа G, индуцированном рёбрами двух рассматриваемых цветов, представляет собой регулярный или двудольный бирегулярный (a, d)-разбиваемый граф с заданной естественным образом совершенной раскраской*;

(iii) *если матрица* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *удовлетворяет условию* (ii), *то любая компонента связности в подграфе графа G, индуцированном рёбрами двух выбранных цветов, представляет собой (a, b, c, d)-каскадный или (d, c, b, a)-каскадный граф с заданной естественным образом совершенной раскраской*;

(iv) *если матрица* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *удовлетворяет условию* (iii), *то любая компонента связности в подграфе графа G, индуцированном рёбрами двух выбранных цветов, представляет собой (a, b, c, d)-каскадный, но не (d, c, b, a)-каскадный граф (т. е. n нечётно или $d_n \neq 0$, где $n,\ d_n$ — из определения (a, b, c, d)-каскадного графа) с заданной естественным образом совершенной раскраской.*

Заключение

В статье проведена характеризация совершенных 2-раскрасок рёберных графов. Также предложена простая конструкция, позволяющая строить совершенные раскраски произвольных рёберных графов и охарактеризованы все раскраски, которые могут быть получены путём применения этой конструкции. Перечисленные результаты позволяют свести часть задач, связанных с исследованием совершенных раскрасок вершин рёберного графа $L(G)$, к задачам построения полностью регулярных кодов и совершенных раскрасок множества вершин исходного графа G.

Приложение. Матрицы параметров совершенных 2-раскрасок рёберных графов максимальной степени не больше 4. Доказанная в работе теорема 2 даёт простой критерий, позволяющий определить, является ли данная матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ допустимой для рёберного графа. Ниже с помощью указанного критерия перечислены все допустимые матрицы, удовлетворяющие условию $a+b \leqslant 4,\ c+d \leqslant 4$. Матрицы, которые могут быть получены друг из друга переименованием цветов, считаются одинаковыми. Через Δ и δ обозначены максимальная и минимальная степени вершин рёберного графа соответственно.

$\Delta = \delta = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Delta = 2,\ \delta = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\Delta = \delta = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\Delta = 3,\ \delta = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\Delta = 3,\ \delta = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\Delta = \delta = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\Delta = 4,\ \delta = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\Delta = 4,\ \delta = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\Delta = 4,\ \delta = 3$:

$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\Delta = \delta = 4$:

$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Бородин О. В., Фрид А. Э.** Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 3. — С. 3–16.
2. **Визинг В. Г.** Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 3–12.
3. **Могильных И. Ю.** О регулярности совершенных раскрасок графа Джонсона в два цвета // Пробл. передачи информации. — 2007. — Т. 43, № 4. — С. 37-44.
4. **Пузынина С. А.** Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2004. — Т. 11, № 1. — С. 79–92.
5. **Пузынина С. А.** Совершенные раскраски вершин графа $G(\mathbb{Z}^2)$ в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 37–54.
6. **Фон-Дер-Флаасс Д. Г.** Совершенные 2-раскраски гиперкуба // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 4. — С. 924—931.
7. **Харари Ф.** Теория графов. — М.: КомКнига, 2006. — 296 с.
8. **Avgustinovich S. V., Mogilnykh I. Yu.** Perfect 2-colorings of Johnson graphs $J(6,3)$ and $J(7,3)$ // Second International Castle Meeting on Coding Theory and Applications, ICMCTA 2008 (Castillo de la Mota, Medina del Campo, Spain, September 15–19, 2008). Proc. — Berlin: Springer-Verl., 2008. — P. 11—19. (Lect. Notes Comp. Sci.; Vol. 5228.)
9. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. — 2003. — Vol. 268, N 1–3. — P. 31–49.
10. **Cardosoa D. M., Rama P.** Spectral results on graphs with regularity constraint // Linear Algebra Appl. — 2007. — Vol. 423, N 1. — P. 90–98.
11. **Godsil C.** Equitable partitions // Combinatorics. Paul Erdös is Eighty. Keszthely (Hungary). — 1993. — Vol. 1. — P. 173–192.
12. **Krotov D. S.** Perfect colorings of $\mathbb{Z}^2$: nine colors. http://arxiv.org/abs/0901.0004. — 2008. — 177 p.
13. **Martin W. J.** Completely regular designs // J. Combin. Designs. — 1998. — Vol. 6, N 4. — P. 261-273.

Хорошилова Дарья Борисовна,
e-mail: dkhor@ngs.ru

Статья поступила
10 октября 2009 г.

Переработанный вариант —
25 июля 2010 г.

АННОТАЦИИ

УДК 519.725

ПРИБЛИЖЁННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ.

Береснев В. Л., Мельников А. А. — Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 6. — С. 3–19.

Рассматривается задача конкурентного размещения предприятий, в которой две соперничающие стороны (Лидер и Последователь) открывают последовательно свои предприятия, а каждый потребитель выбирает одно из открытых предприятий, исходя из своих предпочтений. Задача состоит в том, чтобы выбрать размещение предприятий Лидера так, чтобы получить максимальную прибыль, учитывая последующее размещение предприятий Последователем, который также стремится получить максимальную прибыль. Задача формулируется как задача двухуровневого целочисленного программирования. Предлагается способ вычисления верхней границы для величины максимальной прибыли Лидера. Соответствующий алгоритм состоит в построении классической задачи размещения предприятий на максимум и отыскании оптимального решения этой задачи. Одновременно с вычислением верхней границы строится начальное приближённое решение задачи конкурентного размещения предприятий. Предлагаются алгоритмы локального поиска для улучшения начального приближённого решения. Приводятся результаты вычислительного эксперимента с предложенными алгоритмами, позволяющие оценить точность получаемых приближённых решений и дать сравнительную оценку качества рассматриваемых алгоритмов построения приближённых решений исследуемой задачи. Табл. 1, библиогр. 13.

Ключевые слова: задача двухуровневого программирования, оптимальное некооперативное решение, верхняя граница, приближённое решение, локальный поиск.

УДК 510.53

ОРБИТЫ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ.

Вялый М. Н., Тарасов С. П. — Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2010. — Т. 17, № 6. — С. 20–49.

Установлена эквивалентность задачи о протыкании полиэдрального множества орбитой линейного отображения и задачи о пересечении регулярного языка с языком перестановок двоичных слов (перестановочным фильтром). Алгоритмическая разрешимость для обеих задач неизвестна. Первая из них обобщает хорошо известные открытые проблемы Сколема и неотрицательности, относящиеся к линейным рекуррентным последовательностям. Библиогр. 14.